ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2022-23
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Λύσεις Πέμπτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 6/5/2023 Ημερομηνία Παράδοσης: 19/5/2023, 16:00

Άσκηση 1 - Μετασχηματισμός Laplace I - Ορισμός

(α΄) Είναι

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-2|t|}e^{-st}dt \tag{1}$$
$$= \int_{-\infty}^{0} te^{2t}e^{-st}dt + \int_{0}^{+\infty} te^{-2t}e^{-st}dt \tag{2}$$
$$= \int_{-\infty}^{0} te^{(2-s)t}dt + \int_{0}^{+\infty} te^{(-2-s)t}dt \tag{3}$$
$$= e^{(2-s)t}\Big(\frac{(2-s)t-1}{(2-s)^2}\Big)\Big]_{-\infty}^{0} + e^{(-2-s)t}\Big(\frac{(-2-s)t-1}{(-2-s)^2}\Big)\Big]_{0}^{+\infty} \tag{4}$$

Για τον όρο

$$e^{(2-s)t}\Big(\frac{(2-s)t-1}{(2-s)^2}\Big)\Big]_{-\infty}^{0}$$

έχουμε

$$e^{(2-s)t}\Big(\frac{(2-s)t-1}{(2-s)^2}\Big)\Big]_{-\infty}^{0} = -\frac{1}{(2-s)^2} - \lim_{t\to-\infty} e^{(2-s)t}\Big(\frac{(2-s)t-1}{(2-s)^2}\Big) \tag{5}$$
$$= -\frac{1}{(2-s)^2} - 0 = -\frac{1}{(2-s)^2} \tag{6}$$

με $\sigma < 2$, ενώ για τον όρο

$$e^{(-2-s)t}\Big(\frac{(-2-s)t-1}{(-2-s)^2}\Big)\Big]_{0}^{+\infty}$$

έχουμε

$$e^{(-2-s)t}\Big(\frac{(-2-s)t-1}{(-2-s)^2}\Big)\Big]_{0}^{+\infty} = \lim_{t\to+\infty} e^{(-2-s)t}\Big(\frac{(-2-s)t-1}{(-2-s)^2}\Big) + \frac{1}{(-2-s)^2} \tag{7}$$
$$= 0 + \frac{1}{(2+s)^2} = \frac{1}{(2+s)^2} \tag{8}$$

με $\sigma > -2$. Οπότε συνολικά

$$X(s) = \frac{1}{(2+s)^2} - \frac{1}{(2-s)^2} = \frac{(2-s)^2-(2+s)^2}{((2-s)(2+s))^2} = \frac{-8s}{(4-s^2)^2} \tag{9}$$

με $-2 < \sigma < 2$.

(β΄) Είναι

$$X(s) = \int_{0}^{1} e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big]_{0}^{1} = -\frac{1}{s}(e^{-s}-1) = \frac{1}{s}(1-e^{-s}), \ \forall s \tag{10}$$

Άσκηση 2 - Μετασχηματισμός Laplace II - Ιδιότητες

(α') $x(-3t) \longleftrightarrow \frac{1}{3}X(-\frac{s}{3}) = \frac{1}{3}\frac{e^{2s/3}}{-\frac{s}{3}+3} = \frac{e^{2s/3}}{9-s}$, με $\sigma < 9$.

(β') $x(t-2) \longleftrightarrow X(s)e^{-2s} = \frac{e^{-4s}}{s+3}$, με R_x.

(γ') $x(4t-1) \longleftrightarrow \frac{1}{4}X(\frac{s}{4})e^{-s/4} = \frac{e^{-3s/4}}{s+12}$, με $\sigma > -12$.

(δ') $2tx(t) \longleftrightarrow -2\frac{d}{ds}X(s) = -2\frac{(e^{-2s})'(s+3)-(s+3)'e^{-2s}}{(s+3)^2} = \frac{2e^{-2s}(2s+7)}{(s+3)^2}$, με R_x.

(ε') $e^{2t}x(t) \longleftrightarrow X(s-2) = \frac{e^{-2s+4}}{s+1}$, με $\sigma > -1$.

(ϛ') $\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow sX(s) = \frac{se^{-2s}}{s+3}$, με R_x.

(ζ') $x(t)*x(t) \longleftrightarrow X(s)X(s) = X^2(s) = \frac{e^{-4s}}{(s+3)^2}$, με R_x.

(η') $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \longleftrightarrow \frac{X(s)}{s} = \frac{e^{-2s}}{s(s+3)}$, με $\sigma > 0$.

Από τις παραπάνω περιπτώσεις μπορούμε να υπολογίσουμε το Μετασχ. Fourier από το Μετασχ. Laplace σε όλες πλην της τελευταίας, αφού σε αυτήν ο φανταστικός άξονας δεν περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης.

Άσκηση 3 - Μετασχηματισμός Laplace III - Ιδιότητες

Είναι

$$y(t) = x_1(t-2)*x_2(3-t) \longleftrightarrow Y(s) = X_1(s)e^{-2s}X_2(-s)e^{-3s} = X_1(s)X_2(-s)e^{-5s} \tag{11}$$

$$= \frac{1}{s+2}\frac{1}{-s+3}e^{-5s} = \frac{1}{(s+2)(3-s)}e^{-5s} \tag{12}$$

με $\{\sigma > -2\} \cap \{\sigma < 3\} = \{-2 < \sigma < 3\}$.

Άσκηση 4 - Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace - I

Θα είναι

$$X(s) = \frac{2(s+2)}{s^2+7s+12} = \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s+3} \tag{13}$$

με $\sigma > -3$. Βρίσκουμε τις σταθερές

$$A = X(s)(s+4)\Big|_{s=-4} = 4 \tag{14}$$

$$B = X(s)(x+3)\Big|_{s=-3} = -2 \tag{15}$$

οπότε

$$X(s) = \frac{4}{s+4} + \frac{-2}{s+3} \tag{16}$$

Επιλέγουμε επιμέρους πεδία σύγκλισης $\sigma > -4$ και $\sigma > -3$, έτσι ώστε η τομή τους να είναι $\sigma > -3$, όπως μας δίνεται. Από πίνακες ζευγών μετασχ. Laplace παίρνουμε

$$x(t) = (4e^{-4t} - 2e^{-3t})u(t) \tag{17}$$

Άσκηση 5 - Διαφορικές Εξισώσεις και Μετασχ. Laplace

(α΄) Είναι

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \frac{d}{dt}y(t) - 2y(t) = x(t) \longleftrightarrow s^2Y(s) + sY(s) - 2Y(s) = X(s) \tag{18}$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2+s-2} = \frac{1}{(s+2)(s-1)} \tag{19}$$

(β΄) Τα πιθανά πεδία σύγκλισης είναι

i. $R_H = \{\sigma > 1\}$

ii. $R_H = \{-2 < \sigma < 1\}$

iii. $R_H = \{\sigma < -2\}$

(γ΄) Αναλύοντας σε Μερικά Κλάσματα θα έχουμε

$$H(s) = \frac{1}{(s+2)(s-1)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-1} = -\frac{1}{3}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{3}\frac{1}{s-1} \tag{20}$$

Οπότε για κάθε περίπτωση έχουμε

i. αιτιατότητα: $R_H = \{\sigma > 1\}$, κι έτσι

$$h(t) = -\frac{1}{3}e^{-2t}u(t) + \frac{1}{3}e^{t}u(t) \tag{21}$$

ii. ευστάθεια: $R_H = \{-2 < \sigma < 1\}$, κι έτσι

$$h(t) = -\frac{1}{3}e^{-2t}u(t) - \frac{1}{3}e^{t}u(-t) \tag{22}$$

iii. ούτε ευστάθεια, ούτε αιτιατότητα: $R_H = \{\sigma < -2\}$, κι έτσι

$$h(t) = \frac{1}{3}e^{-2t}u(-t) - \frac{1}{3}e^{t}u(-t) \tag{23}$$

Άσκηση 6 - Μετασχ. Laplace και Συστήματα

(α΄) Υπάρχουν δυο πόλοι στις θέσεις $s_1 = -2$, $s_2 = -1/3$ και ένα μηδενικό στη θέση $s = -1$. Επίσης, υπάρχει ένα μηδενικό στο άπειρο, γιατί ξέρουμε ότι όσοι πόλοι, τόσα μηδενικά πρέπει να υπάρχουν σε ένα σύστημα.

(β΄) Αναπτύσσοντας σε Μερικά Κλάσματα, θα είναι

$$H(s) = \frac{2(s+1)}{(s+2)(s+1/3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+1/3} = \frac{6}{5}\frac{1}{s+2} + \frac{4}{5}\frac{1}{s+\frac{1}{3}} \tag{24}$$

και αφού το σύστημα είναι αιτιατό, θα έχουμε $R_H : \{\sigma > -\frac{1}{3}\}$. Από τα ζεύγη μετασχ. Laplace θα έχουμε

$$h(t) = \frac{6}{5}e^{-2t}u(t) + \frac{4}{5}e^{-t/3}u(t) \tag{25}$$

(γ΄) Ναι, μπορούμε να υπολογίσουμε τον Μ. Fourier από το Μ. Laplace αφού ο φανταστικός άξονα περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης. Είναι

$$H(f) = \frac{2(j2\pi f + 1)}{(j2\pi f + 2)(j2\pi f + \frac{1}{3})} \tag{26}$$

(δ΄) Ο μετασχ. Laplace της εισόδου είναι

$$X(s) = \frac{2}{s+3}, \;\; \sigma > -3 \tag{27}$$

Οπότε

$$Y(s) = X(s)H(s) = \frac{2}{s+3}\frac{2(s+1)}{(s+2)(s+\frac{1}{3})} \tag{28}$$

Αναπτύσσοντας σε Μερικά Κλάσματα, καταλήγουμε στη σχέση

$$Y(s) = \frac{12}{5}\frac{1}{s+2} - 3\frac{1}{s+3} + \frac{3}{5}\frac{1}{s+\frac{1}{3}}, \;\; R_Y \supseteq R_H \cap R_X : \{\sigma > -\frac{1}{3}\} \tag{29}$$

Άρα από τους Πίνακες μετασχ. Laplace θα έχουμε

$$y(t) = \frac{12}{5}e^{-2t}u(t) - 3e^{-3t}u(t) + \frac{3}{5}e^{-t/3}u(t) \tag{30}$$

(ε΄) Έχουμε

$$y(t) = \delta(t) \longleftrightarrow Y(s) = 1 = H(s)X(s) \Longleftrightarrow X(s) = \frac{1}{H(s)} = \frac{(s+2)(s+\frac{1}{3})}{2(s+1)} \tag{31}$$

Πρέπει όμως $R_X : \{\sigma > -1\}$ έτσι ώστε $R_H \cap R_X \neq \emptyset$. Είναι

$$X(s) = \frac{s^2 + \frac{7}{3}s + \frac{2}{3}}{2s+2} \tag{32}$$

Διαιρώντας τα πολυώνυμα έχουμε

$$X(s) = \frac{1}{2}s + \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\frac{1}{s+1} \tag{33}$$

οπότε από τους Πίνακες μετασχ. Laplace έχουμε

$$x(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\delta(t) + \frac{2}{3}\delta(t) - \frac{1}{3}e^{-t}u(t) \tag{34}$$

(ϛ΄) Είναι

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2s+2}{s^2 + \frac{7}{3}s + \frac{2}{3}} \Longleftrightarrow Y(s)(s^2 + \frac{7}{3}s + \frac{2}{3}) = (2s+2)X(s) \tag{35}$$

και με αντίστροφο μετασχ. Laplace

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \frac{7}{3}\frac{d}{dt}y(t) + \frac{2}{3}y(t) = 2\frac{d}{dt}x(t) + 2x(t) \tag{36}$$

[⋆] Άσκηση 7 - Διαφορικές Εξισώσεις και μετασχ. Laplace

(α΄) Εφαρμόζοντας μετασχ. Laplace και στα δυο μέλη, εύκολα καταλήγουμε στο

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+\frac{1}{4}}{(s+1)(s+\frac{1}{2})} \tag{37}$$

Το πεδίο σύγκλισης είναι το $\sigma > -\frac{1}{2}$, λόγω αιτιατότητας.

(β΄) Υπάρχουν δυο πόλοι στις θέσεις $s = -1$ και $s = -1/2$ κι ένα μηδενικό στις θέσεις $s = -1/4$ και $s = \infty$. Το σύστημα είναι ευσταθές καθώς ο φανταστικός άξονας περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης.

(γ') Αναπτύσσοντας σε Μερικά Κλάσματα, θα έχουμε

$$H(s) = \frac{s+\frac{1}{4}}{(s+1)(s+\frac{1}{2})} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+\frac{1}{2}} = \frac{3/2}{s+1} - \frac{1/2}{s+\frac{1}{2}} \tag{38}$$

Από τους Πίνακες αντίστρ. μετασχ. Laplace έχουμε

$$h(t) = (\frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-t/2})u(t) \tag{39}$$

(δ') Χρησιμοποιώντας το μονόπλευρο μετασχ. Laplace και τις ιδιότητές του, έχουμε

$$s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) + \frac{3}{2}sY(s) - \frac{3}{2}y(0^-) + \frac{1}{2}Y(s) = \frac{1}{4}X(s) + sX(s) - x(0^-) \tag{40}$$

$$y(s)(s^2 + \frac{3}{2}s + \frac{1}{2}) - (s + \frac{3}{2}) = X(s)(s + \frac{1}{4}) \tag{41}$$

$$Y(s) = X(s)\frac{s+\frac{1}{4}}{(s+1)(s+\frac{1}{2})} + \frac{s+\frac{3}{2}}{(s+1)(s+\frac{3}{2})} \tag{42}$$

$$= \frac{s+\frac{1}{4}}{(s+1)^2(s+\frac{1}{2})(s+2)} + \frac{s+\frac{3}{2}}{(s+1)(s+\frac{1}{2})} \tag{43}$$

Αναπτύσσοντας σε Μερικά Κλάσματα και τους δυο όρους και κάνοντας πράξεις καταλήγουμε στο

$$y(t) = \left(\frac{7}{6}e^{-2t} - \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{4}{3}e^{-t/2} + \frac{3}{2}te^{-t}\right)u(t) \tag{44}$$