ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2022-23
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 7/4/2023 Ημερομηνία Παράδοσης: 25/4/2023, 16:00

Οι ασκήσεις με [$\star$] είναι **bonus**, $+10$ μονάδες η καθεμία στο βαθμό αυτής της σειράς ασκήσεων (δηλ. μπορείτε να πάρετε μέχρι $50/40$ στο θεωρητικό κομμάτι αυτής της σειράς.)

Σχήμα 1: *Το Πασχαλινό σας δώρο...*

Άσκηση 1 - ΓΧΑ Συστήματα Ι

Στο μάθημα είδατε ότι ο χώρος της συχνότητας είναι πολύ βοηθητικός όχι μόνο διαισθητικά αλλά και πρακτικά, καθώς μπορεί κανείς να βρει την έξοδο ενός ΓΧΑ συστήματος πιο εύκολα μέσω του μετασχ. Fourier αυτής.

(α΄) Έστω ότι γνωρίζετε ότι η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος δίνεται από τη σχέση

$$h(t) = \delta(t) - 8e^{-2t}u(t) + 5e^{-3t}u(t) \tag{1}$$

Βρείτε την απόκριση σε συχνότητα $H(f)$ για το σύστημα αυτό.

Απ: $H(f) = \frac{(j2\pi f)^2+2(j2\pi f)-8}{(j2\pi f)^2+5(j2\pi f)+6}$

(β΄) Βρείτε την έξοδο του συστήματος όταν στην είσοδο εμφανίζεται το περιοδικό σήμα

$$x(t) = 2\cos(2t + 0.0396\pi) \tag{2}$$

Απ: $y(t) = 2.48\cos(2t + 0.5\pi)$

(γ΄) Γνωρίζουμε ότι ένα σύστημα στο πεδίο της συχνότητας μπορεί να περιγραφεί ως σχέση εισόδου-εξόδου ως

$$Y(f) = H(f)X(f) \tag{3}$$

με $H(f)$ την απόκριση σε συχνότητα (δηλ. το μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης), και $Y(f), X(f)$ τους μετασχ. Fourier της εξόδου και της εισόδου, αντίστοιχα. Θέτοντας αρχικά (για ευκολία) $u = j2\pi f$ και παραγοντοποιώντας, βρείτε το μετασχ. Fourier $Y(f)$ της εξόδου του συστήματος αν στην είσοδό του παρουσιάζεται το σήμα $x(t) = e^{-4t}u(t)$.

Απ: $Y(f) = \frac{j2\pi f-2}{(j2\pi f+3)(j2\pi f+2)}$

(δ΄) Χρησιμοποιήστε ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα, την ιδιότητα της γραμμικότητας, και τους πίνακές σας με τα ζεύγη μετασχηματισμών για να βρείτε την έξοδο $y(t)$ στο πεδίο του χρόνου.

Απ: $y(t) = 5e^{-3t}u(t) - 4e^{-2t}u(t)$

Το αντίστοιχο της παραπάνω διαδικασίας είναι τρεις (!) συνελίξεις στο πεδίο του χρόνου (σχετικά εύκολες όμως).

Άσκηση 2 - ΓΧΑ Συστήματα ΙΙ

Γνωρίζετε ότι τα φυσικά ΓΧΑ συστήματα συνεχούς χρόνου περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές, δηλ.

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{d^k}{dt^k} a_k y(t) = \sum_{l=0}^{M} \frac{d^l}{dt^l} b_l x(t) \tag{4}$$

με a_k, b_l σταθερές. Επίσης, ξέρετε ότι για να βρει κανείς την κρουστική απόκριση $h(t)$ ενός τέτοιου συστήματος μπορεί να δουλέψει είτε στο πεδίο του χρόνου, είτε στο πεδίο της συχνότητας (αν το σύστημα είναι ευσταθές), είτε στο χώρο του Laplace (όπως θα δούμε μετά τις διακοπές). Ας δούμε πως μπορεί να γίνει αυτό μέσα από ένα παράδειγμα.

Έστω

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = 2x(t) \tag{5}$$

ένα ΓΧΑ σύστημα του οποίου ζητούμε την κρουστική απόκριση $h(t)$.

(α΄) Μεταφέρετε τη διαφορική εξίσωση στο πεδίο της συχνότητας, εφαρμόζοντας την ιδιότητα της παραγώγισης του μετασχ. Fourier.

(β΄) Γνωρίζουμε ότι ένα σύστημα στο πεδίο της συχνότητας μπορεί να περιγραφεί ως σχέση εισόδου-εξόδου ως

$$Y(f) = H(f)X(f) \tag{6}$$

με $H(f)$ την απόκριση σε συχνότητα (δηλ. το μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης), και $Y(f), X(f)$ τους μετασχ. Fourier της εξόδου και της εισόδου, αντίστοιχα. Φέρτε το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος στην παραπάνω μορφή και λύστε ως προς $H(f)$.

Απ: $H(f) = \frac{2}{(j2\pi f)^2+3(j2\pi f)+2}$

(γ΄) Χρησιμοποιήστε ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα και τους πίνακές σας με τα ζεύγη μετασχηματισμών για να βρείτε την κρουστική απόκριση $h(t)$.

Απ: $h(t) = (2e^{-t} - 2e^{-2t})u(t)$

Άσκηση 3 - Ιδανικά φίλτρα Ι

Έστω το περιοδικό σήμα

$$x(t) = 2\cos(2\pi 600t - \pi/3) - \cos(2\pi 1000t + \pi/8) + \cos(2\pi 1500t) \tag{7}$$

(α΄) Υπολογίστε την περίοδό του, T_0.

(β΄) Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης του σήματος.

(γ΄) Αν το $x(t)$ δίνεται ως είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t) = 2000\mathrm{sinc}(2000t)$, να βρείτε την έξοδο $y(t)$.

[⋆] Άσκηση 4 - Ιδανικά φίλτρα ΙΙ

Είδατε στο μάθημα ότι το ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο

$$h_{LP}(t) = 2f_c\mathrm{sinc}(2f_ct) = \frac{\sin(2\pi f_c t)}{\pi t} \tag{8}$$

Άραγε αν αντικαταστήσουμε τον αριθμητή με ένα συνημιτονο, δηλ.

$$h(t) = \frac{\cos(2\pi f_c t)}{\pi t} \tag{9}$$

ποιά είναι η απόκριση συχνότητας αυτού του φίλτρου; Προτείνουμε να χρησιμοποιήσετε γνωστά ζεύγη και ιδιότητες, αφού διαχωρίσετε "κατάλληλα" το κλάσμα.

Άσκηση 5 - Ειδικές κατηγορίες συστημάτων

Έστω το *ευσταθές* σύστημα που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = \frac{d}{dt}x(t) - x(t) \tag{10}$$

(α΄) Δείξτε ότι

$$|H(f)| = 1,\ \forall f \tag{11}$$

και

$$\theta_h(f) = \tan^{-1}\left(\frac{4\pi f}{4\pi^2 f^2 - 1}\right) \tag{12}$$

Τέτοια συστήματα ονομάζονται all-pass συστήματα (ολοπερατά, στα Ελληνικά).

(β΄) Δείξτε ότι η κρουστική απόκριση του συστήματος δίνεται ως

$$h(t) = \delta(t) - 2e^{-t}u(t) \tag{13}$$