ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2022-23
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Λύσεις Τέταρτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 7/4/2023 Ημερομηνία Παράδοσης: 25/4/2023, 16:00

Άσκηση 1 - ΓΧΑ Συστήματα Ι

(α΄) Είναι

$$H(f) = 1 - 8\frac{1}{2+j2\pi f} + 5\frac{1}{3+j2\pi f} = \frac{(j2\pi f)^2 + 2(j2\pi f) - 8}{(j2\pi f)^2 + 5(j2\pi f) + 6} \quad (1)$$

(β΄) Είναι

$$x(t) = 2\cos(2t + 0.0396\pi) = 2\cos\left(2\pi\frac{1}{\pi}t + 0.0396\pi\right) \quad (2)$$

Άρα σύμφωνα με τη θεωρία

$$y(t) = 2\left|H\left(\frac{1}{\pi}\right)\right|\cos\left(2t + 0.0396\pi + \phi_H\left(\frac{1}{\pi}\right)\right) \quad (3)$$

με

$$H\left(\frac{1}{\pi}\right) = \frac{-4 + j4 - 8}{-4 + 10j + 6} = \frac{-6 + 2j}{1 + j5} = \frac{(-6+2j)(1-j5)}{26} = \frac{4}{26} + j\frac{32}{26} = \frac{2}{13} + j\frac{16}{13} \quad (4)$$

οπότε

$$\left|H\left(\frac{1}{\pi}\right)\right| = \frac{1}{13}\sqrt{260} = 1.24 \quad (5)$$

$$\phi_H\left(\frac{1}{\pi}\right) = \tan^{-1}\frac{\frac{16}{13}}{\frac{2}{13}} = \tan^{-1}(8) = 0.4604\pi \quad (6)$$

Οπότε

$$y(t) = 2.48\cos(2t + 0.5\pi) \quad (7)$$

(γ΄) Είναι

$$Y(f) = H(f)X(f) = \frac{(j2\pi f)^2 + 2(j2\pi f) - 8}{(j2\pi f)^2 + 5(j2\pi f) + 6}\frac{1}{j2\pi f + 4} = \frac{j2\pi f - 2}{(j2\pi f + 3)(j2\pi f + 2)} \quad (8)$$

(δ΄) Έχουμε

$$Y(f) = \frac{A}{j2\pi f + 3} + \frac{B}{j2\pi f + 2} \quad (9)$$

με

$$A = \frac{j2\pi f - 2}{j2\pi f + 2}\Big|_{j2\pi f = -3} = 5 \quad (10)$$

$$B = \frac{j2\pi f - 2}{j2\pi f + 3}\Big|_{j2\pi f = -2} = -4 \quad (11)$$

οπότε

$$Y(f) = 5\frac{1}{j2\pi f + 3} - 4\frac{1}{j2\pi f + 2} \longleftrightarrow y(t) = 5e^{-3t}u(t) - 4e^{-2t}u(t) \quad (12)$$

Άσκηση 2 - ΓΧΑ Συστήματα ΙΙ

(α΄) Είναι

$$(j2\pi f)^2 Y(f) + 3(j2\pi f)Y(f) + 2Y(f) = 2X(f) \tag{13}$$

(β΄) Έχουμε

$$Y(f)((j2\pi f)^2 + j6\pi f + 2) = 2X(f) \Longleftrightarrow H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{2}{(j2\pi f)^2 + 3j2\pi f + 2} \tag{14}$$

(γ΄) Αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα έχουμε

$$H(f) = \frac{A}{j2\pi f + 2} + \frac{B}{j2\pi f + 1} \tag{15}$$

με

$$A = \frac{2}{j2\pi f + 1}\Big|_{j2\pi f = -2} = -2 \tag{16}$$

$$B = \frac{2}{j2\pi f + 2}\Big|_{j2\pi f = -1} = 2 \tag{17}$$

Άρα

$$H(f) = -2\frac{1}{j2\pi f + 2} + 2\frac{1}{j2\pi f + 1} \longleftrightarrow h(t) = -2e^{-2t}u(t) + 2e^{-t}u(t) \tag{18}$$

Άσκηση 3 - Ιδανικά φίλτρα Ι

(α΄) Η θεμελιώδης συχνότητα ισούται με

$$f_0 = \text{ΜΚΔ}\{600, 1000, 1500\} = 100 \text{ Hz} \tag{19}$$

Άρα η περίοδος του είναι

$$T_0 = \frac{1}{f_0} = 0.01 \text{ s} \tag{20}$$

(β΄) Είναι

$$x(t) = 2\cos(2\pi 600t - \pi/3) - \cos(2\pi 1000t + \pi/8) + \cos(2\pi 1500t) \tag{21}$$

$$= e^{-j\pi/3}e^{j2\pi 600t} + e^{j\pi/3}e^{-j2\pi 600t} - \left(\frac{1}{2}e^{j\pi/8}e^{j2\pi 1000t} + \frac{1}{2}e^{-j\pi/8}e^{-j2\pi 1000t}\right) + \frac{1}{2}e^{j2\pi 1500t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi 1500t} \tag{22}$$

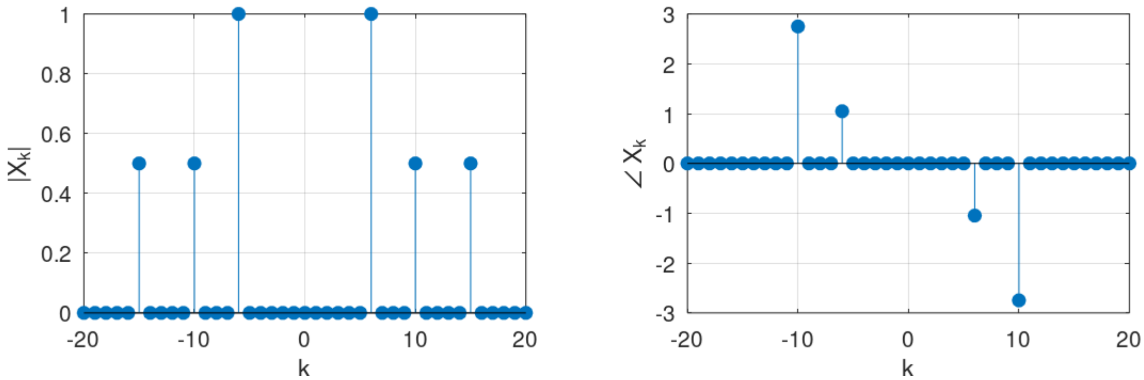
$$= e^{-j\pi/3}e^{j2\pi 600t} + e^{j\pi/3}e^{-j2\pi 600t} - \frac{1}{2}e^{j\pi/8}e^{j2\pi 1000t} - \frac{1}{2}e^{-j\pi/8}e^{-j2\pi 1000t} + \frac{1}{2}e^{j2\pi 1500t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi 1500t} \tag{23}$$

$$= e^{-j\pi/3}e^{j2\pi 600t} + e^{j\pi/3}e^{-j2\pi 600t} + \frac{1}{2}e^{-j7\pi/8}e^{j2\pi 1000t} + \frac{1}{2}e^{7j\pi/8}e^{-j2\pi 1000t} + \frac{1}{2}e^{j2\pi 1500t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi 1500t} \tag{24}$$

Τα φάσματα φαίνονται στο Σχήμα 1.

(γ΄) Αναγνωρίζουμε την κρουστική απόκριση ως αυτή ενός ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου με συχνότητα αποκοπής $f_c = 1000$ Hz και μοναδιαίου πλάτους, άρα στην εξοδο θα παραμείνουν οι συχνότητες μικρότερες από 1000 Hz (χωρίς να την περιλαμβάνουν). Οπότε

$$y(t) = 2\cos(2\pi 600t - \pi/3) \tag{25}$$



Σχήμα 1: *Φάσματα Άσκησης 3.*

[⋆] Άσκηση 4 - Ιδανικά φίλτρα ΙΙ

Θα είναι

$$H(f) = F\{\cos(2\pi f_c t)\} * F\{1/\pi t\} \tag{26}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\delta(f - f_c) + \frac{1}{2}\delta(f + f_c)\right) * F\{1/\pi t\} \tag{27}$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\mathrm{sgn}(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\pi f} \tag{28}$$

οπότε από την ιδιότητα της δυικότητας

$$\frac{1}{j\pi t} \longleftrightarrow \mathrm{sgn}(-f) = -\mathrm{sgn}(f) \tag{29}$$

λόγω περιττότητας της συνάρτησης προσήμου. Επίσης

$$\frac{1}{\pi t} \longleftrightarrow -j\mathrm{sgn}(f) \tag{30}$$

Έτσι, από την εξίσωση (27) συνεχίζουμε και

$$H(f) = -\frac{j}{2}\mathrm{sgn}(f - f_c) - \frac{j}{2}\mathrm{sgn}(f + f_c) \tag{31}$$

Άσκηση 5 - Ειδικές κατηγορίες συστημάτων

(α΄) Είναι

$$\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = \frac{d}{dt}x(t) - x(t) \longleftrightarrow j2\pi f Y(f) + Y(f) = j2\pi f X(f) - X(f) \tag{32}$$

$$Y(f)(j2\pi f + 1) = X(f)(j2\pi f - 1) \tag{33}$$

$$\frac{Y(f)}{X(f)} = H(f) = \frac{j2\pi f - 1}{j2\pi f + 1} \tag{34}$$

Το μέτρο της απόκρισης σε συχνότητα είναι

$$|H(f)| = \frac{|j2\pi f - 1|}{|j2\pi f + 1|} = \frac{\sqrt{4\pi^2 f^2 + 1}}{\sqrt{4\pi^2 f^2 + 1}} = 1, \ \ \forall f \tag{35}$$

ενώ για τη φάση πρέπει να γράψουμε το $H(f)$ ως

$$H(f) = \frac{j2\pi f - 1}{j2\pi f + 1} \tag{36}$$

$$= \frac{-(1 - j2\pi f)(1 - j2\pi f)}{|1 + j2\pi f|^2} \tag{37}$$

$$= \frac{4\pi^2 f^2 - 1}{1 + 4\pi^2 f^2} + j\frac{4\pi f}{1 + 4\pi^2 f^2} \tag{38}$$

οπότε

$$\theta_h(f) = \tan^{-1}\frac{\Im\{H(f)\}}{\Re\{H(f)\}} = \tan^{-1}\frac{4\pi f}{4\pi^2 f^2 - 1} \tag{39}$$

(β΄) Είναι

$$H(f) = j2\pi f\frac{1}{1 + j2\pi f} - \frac{1}{j2\pi f + 1} \longleftrightarrow h(t) = \frac{d}{dt}e^{-t}u(t) - e^{-t}u(t) \tag{40}$$

$$= -e^{-t}u(t) + e^{-t}\delta(t) - e^{-t}u(t) \tag{41}$$

$$= \delta(t) - 2e^{-t}u(t) \tag{42}$$