ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2022-23
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Τρίτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 19/3/2023 Ημερομηνία Παράδοσης: 4/4/2023, 16:00

Οι ασκήσεις με [$\star$] είναι **bonus**, $+10$ μονάδες η καθεμία στο βαθμό αυτής της σειράς ασκήσεων (δηλ. μπορείτε να πάρετε μέχρι $80/60$ στο θεωρητικό κομμάτι αυτής της σειράς.)

Χρησιμοποιήστε τα ολοκληρώματα των πινάκων του Κεφαλαίου Υποβάθρου, όπου χρειάζεται.

Ασκηση 1 - Σειρά Fourier
Έστω το περιοδικό σήμα $x(t) = |\sin(\pi t)|$.

(α') Σχεδιάστε το σήμα ποιοτικά για $t \in [0, 4]$ και βρείτε τη βασική του περίοδο T_0.

(β') Υπολογίστε αναλυτικά την εκθετική Σειρά Fourier του χρησιμοποιώντας τις σχέσεις του Euler.

(γ') Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης για $k = \pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1, 0$.

Απ: $X_k = \dfrac{2}{\pi(1 - 4k^2)}$

Ασκηση 2 - Συντελεστές Fourier
Ενα σήμα με περίοδο T_0 λέγεται ότι έχει "συμμετρία μισού κύματος " αν ικανοποιεί τη σχέση

$$x(t) = -x\left(t - \frac{T_0}{2}\right) \tag{1}$$

Αυτό σημαίνει ότι το μισό της μιας περιόδου του σήματος ειναι το αρνητικό του άλλου μισού. Δείξτε ότι οι συντελεστές Σειράς Fourier που αντιστοιχούν στους άρτιους συντελεστές X_{2k}, είναι μηδέν για τα σήματα με μισού-κύματος συμμετρία.

Hint: Χρησιμοποιήστε τον ορισμό των X_k και "σπάστε" κατάλληλα το ολοκλήρωμα.

[$\star$] Ασκηση 3 - Σειρές Fourier - Ιδιότητες
Έστω το περιοδικό σήμα $x(t)$ που σε μια περίοδό του γράφεται ως

$$x(t) = t^2, \ -\pi < t < \pi \tag{2}$$

Αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90} \tag{3}$$

Άσκηση 4 - Μετασχηματισμός Fourier I - Ορισμός
Χρησιμοποιήστε τον ορισμό για να βρείτε το μετασχ. Fourier των παρακάτω σημάτων.

(α') $x(t) = e^{-2t}u(t-3)$

(β΄) $x(t) = e^{-4|t|}$

(γ΄) $x(t) = te^{-2t}u(t)$

Απ: (α) $X(f) = \frac{e^{-3(2+j2\pi f)}}{2+j2\pi f}$, (β) $X(f) = \frac{8}{16+4\pi^2 f^2}$, (γ) $X(f) = \frac{1}{(2+j2\pi f)^2}$

Άσκηση 5 - Μετασχηματισμός Fourier II - Ιδιότητες
Σας δίνεται ο μετασχ. Fourier ενός σήματος $x(t)$ ως

$$X(f) = \frac{4}{3+j2\pi f} \tag{4}$$

Βρείτε το μετασχ. Fourier των παρακάτω σημάτων με αποκλειστική χρήση ιδιοτήτων.

(α΄) $x(-2t)$

(β΄) $x(t-5)$

(γ΄) $x(8t-2)$

(δ΄) $tx(t)$

(ε΄) $e^{j6t}x(t)$

(ϛ΄) $\frac{dx(t)}{dt}$

Απ: (α) $\frac{2}{3-j\pi f}$, (β) $\frac{4e^{-j10\pi f}}{3+j2\pi f}$, (γ) $\frac{4}{24+j2\pi f}e^{-j\pi f/2}$, (δ) $\frac{4}{(3+j2\pi f)^2}$, (ε) $\frac{4}{3+j(2\pi f-6)}$, (στ) $\frac{j8\pi f}{3+j2\pi f}$

[⋆] Άσκηση 6 - Μετασχηματισμός Fourier - Γρίφος :-)
Έστω ότι για ένα σήμα $x(t)$ με μετασχ. Fourier $X(f)$ μας δίνονται οι παρακάτω πληροφορίες:

- είναι πραγματικό
- $x(t) = 0$ για $t < 0$
- ισχύει
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Re}\{X(f)\}e^{j2\pi ft}df = |t|e^{-|t|} \tag{5}$$
με $\mathrm{Re}\{X(f)\}$ το πραγματικό μέρος του μετασχ. Fourier του σήματος $x(t)$.

Βρείτε μια κλειστή έκφραση για το $x(t)$.

Απ: $x(t) = 2te^{-t}u(t)$

Άσκηση 7 - Αντίστροφος Μετασχ. Fourier - Ι
Αν γνωρίζετε ότι για ένα μετασχ. Fourier $X(f)$ ισχύει ότι

$$|X(f)| = 2(u(f+3) - u(f-3)) \tag{6}$$

με $u(\cdot)$ τη βηματική συνάρτηση, και

$$\phi_x(f) = -3\pi f + \pi \tag{7}$$

τότε βρείτε

(α΄) την πολική αναπαράσταση του μετασχ. Fourier $X(f)$

(β΄) το σήμα $x(t)$

(γ΄) τα σημεία μηδενισμού του σήματος $x(t)$

Απ: (β) $x(t) = -12\mathrm{sinc}(9-6t)$, (γ) $t = \frac{9-k}{6},\ k \in \mathbb{Z}$

Άσκηση 8 - Αντίστροφος Μετασχ. Fourier - II

Έστω ο μετασχ. Fourier

$$X(f) = \frac{10}{24 - (2\pi f)^2 + j28\pi f} \tag{8}$$

Προσέξτε ότι

$$24 - (2\pi f)^2 + j28\pi f = 24 + (j2\pi f)^2 + 14(j2\pi f) = (2 + j2\pi f)(12 + j2\pi f) \tag{9}$$

και εφαρμόστε ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα[1] για να βρείτε τον αντίστροφο Μετασχ. Fourier (δηλ. το σήμα στο χρόνο $x(t)$) χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της γραμμικότητας και γνωστά ζεύγη μετασχηματισμών που γνωρίζετε ήδη από τους Πίνακές σας.

Απ.: $x(t) = (e^{-2t} - e^{-12t})u(t)$

[1] Θυμηθείτε τη διαδικασία όπως περιγράφεται στο κεφάλαιο Υποβάθρου.