ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2022-23
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

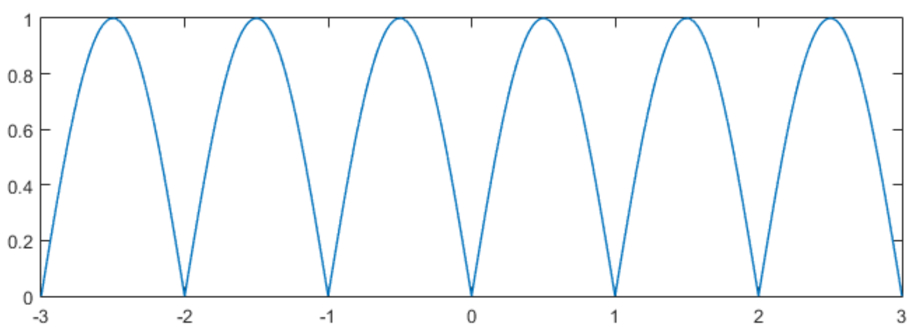
Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 19/3/2023 Ημερομηνία Παράδοσης: 4/4/2023, 16:00

Ασκηση 1 - Σειρά Fourier

(α΄) Δείτε το Σχήμα 1.

(β΄) Προφανώς από το Σχήμα 1, η περίοδός του είναι $T_0 = 1$ s.



Σχήμα 1: *Περιοδικό σήμα άσκησης 1.*

(γ΄) Είναι

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)dt = \int_0^1 \sin(\pi t)dt = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi t)\Big]_0^1 = \frac{2}{\pi} \tag{1}$$

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \int_0^1 \sin(\pi t)e^{-j2\pi kt}dt \tag{2}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2j}e^{j\pi t}e^{-j2\pi kt}dt - \int_0^1 \frac{1}{2j}e^{-j\pi t}e^{-j2\pi kt}dt \tag{3}$$

$$= \frac{1}{2j}\Big(\int_0^1 e^{j\pi t}e^{-j2\pi kt}dt - \int_0^1 e^{-j\pi t}e^{-j2\pi kt}dt\Big) \tag{4}$$

$$= \frac{1}{2j}\Big(\int_0^1 e^{-j(2\pi k-\pi)t}dt - \int_0^1 e^{-j(2\pi k+\pi)t}dt\Big) \tag{5}$$

$$= \frac{1}{2j}\Big(\int_0^1 e^{-j(\pi(2k-1))t}dt - \int_0^1 e^{-j(\pi(2k+1))t}dt\Big) \tag{6}$$

$$= \frac{1}{2j}\Big(\frac{1}{-j\pi(2k-1)}e^{-j(\pi(2k-1))t}\Big]_0^1 - \frac{1}{-j\pi(2k+1)}e^{-j(\pi(2k+1))t}\Big]_0^1\Big) \tag{7}$$

$$= \frac{1}{-j^2 2\pi(2k-1)}\Big(e^{-j(\pi(2k-1))} - 1\Big) - \frac{1}{-j^2 2\pi(2k+1)}\Big(e^{-j(\pi(2k+1))} - 1\Big) \tag{8}$$

$$= \frac{1}{2\pi(2k-1)}\Big(e^{-j(\pi(2k-1))} - 1\Big) - \frac{1}{2\pi(2k+1)}\Big(e^{-j(\pi(2k+1))} - 1\Big) \tag{9}$$

$$= \frac{1}{2\pi(2k-1)}\Big((e^{-j\pi})^{2k-1} - 1\Big) - \frac{1}{2\pi(2k+1)}\Big((e^{-j\pi})^{2k+1} - 1\Big) \tag{10}$$

Ο αριθμός $2k \pm 1$ είναι περιττός για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Έτσι

$$X_k = \frac{1}{2\pi(2k-1)}\Big((e^{-j\pi})^{2k-1} - 1\Big) - \frac{1}{2\pi(2k+1)}\Big((e^{-j\pi})^{2k+1} - 1\Big) \tag{11}$$

$$= \frac{1}{2\pi(2k-1)}\Big((-1)^{2k-1} - 1\Big) - \frac{1}{2\pi(2k+1)}\Big((-1)^{2k+1} - 1\Big) \tag{12}$$

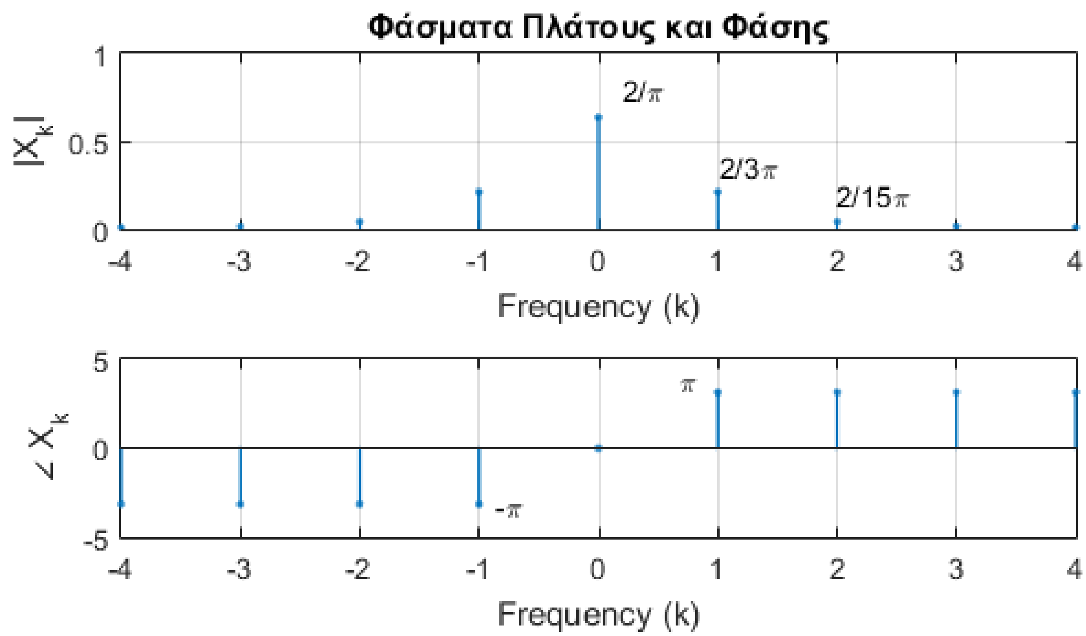
$$= \frac{1}{2\pi(2k-1)}\Big(-1 - 1\Big) - \frac{1}{2\pi(2k+1)}\Big(-1 - 1\Big) \tag{13}$$

$$= \frac{-2}{2\pi(2k-1)} - \frac{-2}{2\pi(2k+1)} = \frac{1}{\pi(2k+1)} - \frac{1}{\pi(2k-1)} \tag{14}$$

$$= \frac{2\pi k - 1 - 2\pi k - 1}{\pi(2k-1)(2k+1)} = \frac{-2}{\pi((2k)^2 - 1)} \tag{15}$$

$$= \frac{2}{\pi(1 - 4k^2)} \tag{16}$$

(δ΄) Τα φάσματα φαίνονται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: *Φάσματα άσκησης 1.*

Ασκηση 2 - Συντελεστές Fourier

Έχουμε

$$X_{2k} = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi(2k)f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} x(t)e^{-j2\pi(2k)f_0 t}dt + \frac{1}{T_0}\int_{T_0/2}^{T_0} -x(t - T_0/2)e^{-j2\pi(2k)f_0 t}dt \tag{17}$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} x(t)e^{-j2\pi(2k)f_0 t}dt - \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} x(u)e^{-j2\pi(2k)f_0(u+T_0/2)}du \tag{18}$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} x(t)e^{-j2\pi(2k)f_0 t}dt - \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} x(u)e^{-j2\pi(2k)f_0 u}e^{-j2\pi(2k)f_0 T_0/2}du \tag{19}$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} x(t)e^{-j2\pi(2k)f_0 t}dt - \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} x(u)e^{-j2\pi(2k)f_0 u}e^{-j2\pi k}du \tag{20}$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} x(t)e^{-j2\pi(2k)f_0 t}dt - \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} x(u)e^{-j2\pi(2k)f_0 u}du \tag{21}$$

$$= 0 \tag{22}$$

[⋆] Ασκηση 3 - Σειρές Fourier - Ιδιότητες

Για το σήμα της εκφώνησης έχουμε

$$P_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^4 dt = \frac{1}{2\pi}\frac{t^5}{5}\Big]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{2\pi^5}{5} = \frac{\pi^4}{5} \tag{23}$$

Από το θεώρημα του Parseval θα έχουμε

$$|X_0|^2 + \sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{+\infty} |X_k|^2 = \frac{\pi^4}{5} \tag{24}$$

και

$$X_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{1}{2\pi}\frac{t^3}{3}\Big]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{2\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3} \tag{25}$$

ενώ για τους συντελεστές του περιοδικού σήματος, παρατηρούμε ότι αν το παραγωγίσουμε παίρνουμε το σήμα

$$\frac{d}{dt}x(t) = 2t,\ \ -\pi < t < \pi \tag{26}$$

του οποίου γνωρίζουμε τους συντελεστές Fourier ως

$$X_k^d = \frac{2\pi}{\pi k}(-1)^k e^{j\pi/2},\ \ \forall k = \frac{2}{k}(-1)^k e^{j\pi/2},\ \ \forall k \tag{27}$$

’ρα οι συντελεστές του αρχικού σήματος θα είναι

$$X_k = \frac{1}{j2\pi k f_0}X_k^d = \frac{1}{j2\pi k f_0}\frac{2}{k}(-1)^k e^{j\pi/2} = \frac{2}{k^2}(-1)^k,\ \ \forall k \tag{28}$$

Οπότε

$$|X_0|^2 + \sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{+\infty} |X_k|^2 = \frac{\pi^4}{5} \tag{29}$$

$$\frac{\pi^4}{9} + \sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{+\infty} |X_k|^2 = \frac{\pi^4}{5} \tag{30}$$

$$\sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{+\infty} |X_k|^2 = \frac{\pi^4}{5} - \frac{\pi^4}{9} \tag{31}$$

$$\sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{+\infty} \frac{4}{k^4} = \frac{\pi^4}{5} - \frac{\pi^4}{9} \tag{32}$$

Η ακολουθία $1/k^4$ είναι άρτια, οπότε

$$\sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{+\infty} \frac{4}{k^4} = \frac{\pi^4}{5} - \frac{\pi^4}{9} \tag{33}$$

$$2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4}{k^4} = \frac{4\pi^4}{45} \tag{34}$$

$$8\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{4\pi^4}{45} \tag{35}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{4\pi^4}{360} \tag{36}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90} \tag{37}$$

που είναι και το ζητούμενο.

Άσκηση 4 - Μετασχηματισμός Fourier I - Ορισμός

(α΄) Είναι

$$\begin{aligned}
X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t}u(t-3)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{3}^{+\infty} e^{-2t}e^{-j2\pi ft}dt && (38)\\
&= \int_{3}^{+\infty} e^{-(2+j2\pi f)t}dt = -\frac{1}{2+j2\pi f}e^{-(2+j2\pi f)t}\Big]_3^{+\infty} && (39)\\
&= -\frac{1}{2+j2\pi f}(0-e^{-3(2+j2\pi f)}) = \frac{1}{2+j2\pi f}e^{-3(2+j2\pi f)} && (40)
\end{aligned}$$

(β΄) Είναι

$$\begin{aligned}
X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4|t|}e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{4t}e^{-j2\pi ft}dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-4t}e^{-j2\pi ft}dt && (41)\\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{(4-j2\pi f)t}dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-(4+j2\pi f)t}dt && (42)\\
&= \frac{1}{4-j2\pi f}e^{(4-j2\pi f)t}\Big]_{-\infty}^{0} - \frac{1}{4+j2\pi f}e^{-(4+j2\pi f)t}\Big]_{0}^{\infty} && (43)\\
&= \frac{1}{4-j2\pi f}(1-0) - \frac{1}{4+j2\pi f}(0-1) && (44)\\
&= \frac{1}{4-j2\pi f} + \frac{1}{4+j2\pi f} && (45)\\
&= \frac{8}{(4-j2\pi f)(4+j2\pi f)} && (46)\\
&= \frac{8}{16+4\pi^2 f^2} && (47)
\end{aligned}$$

(γ΄) Είναι

$$\begin{aligned}
X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-2t}u(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{0}^{+\infty} te^{-2t}e^{-j2\pi ft}dt && (48)\\
&= \int_{0}^{+\infty} te^{-(2+j2\pi f)t}dt = e^{-(2+j2\pi f)t}\Big(\frac{-(2+j2\pi f)t-1}{(-(2+j2\pi f))^2}\Big)\Big]_0^{+\infty} && (49)\\
&= \lim_{t\to+\infty} e^{-(2+j2\pi f)t}\Big(\frac{-(2+j2\pi f)t-1}{(-(2+j2\pi f))^2}\Big) + \frac{1}{(2+j2\pi f)^2} && (50)
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{(2+j2\pi f)^2}\lim_{t\to+\infty} e^{-(2+j2\pi f)t}(1+(2+j2\pi f)t) + \frac{1}{(2+j2\pi f)^2} \tag{51}$$

$$= 0 + \frac{1}{(2+j2\pi f)^2} = \frac{1}{(2+j2\pi f)^2} \tag{52}$$

μετά από εφαρμογή του κανόνα του De L'Hospital.

Άσκηση 5 - Μετασχηματισμός Fourier II - Ιδιότητες

(α΄) Είναι

$$Y(f) = \frac{1}{2}X(-f/2) = \frac{1}{2}\frac{4}{3-j2\pi\frac{f}{2}} = \frac{2}{3-j\pi f} \tag{53}$$

(β΄) Είναι

$$Y(f) = X(f)e^{-j2\pi 5f} = \frac{4}{3+j2\pi f}e^{-j10\pi f} = \frac{4e^{-j10\pi f}}{3+j2\pi f} \tag{54}$$

(γ΄) Είναι

$$Y(f) = \frac{1}{8}X(f/8)e^{-j2\pi f/4} = \frac{1}{8}\frac{4}{3+j2\pi\frac{f}{8}}e^{-j\pi f/2} = \frac{4e^{-j\pi f/2}}{24+j2\pi f} \tag{55}$$

(δ΄) Είναι

$$Y(f) = \frac{j}{2\pi}\frac{d}{df}X(f) = \frac{j}{2\pi}\frac{d}{df}\frac{4}{3+j2\pi f} = \frac{4}{(3+j2\pi f)^2} \tag{56}$$

(ε΄) Είναι

$$Y(f) = X\Big(f-\frac{6}{2\pi}\Big) = \frac{4}{3+j2\pi(f-\frac{6}{2\pi})} = \frac{4}{3+j(2\pi f-6)} \tag{57}$$

(ϛ΄) Είναι

$$Y(f) = j2\pi f X(f) = j2\pi f\frac{4}{3+j2\pi f} = \frac{j8\pi f}{3+j2\pi f} \tag{58}$$

[$\star$] Άσκηση 6 - Μετασχηματισμός Fourier - Γρίφος :-)

Εφ'όσον το σήμα είναι πραγματικό στο χρόνο, το $\Re\{X(f)\}$ θα αντιστοιχεί στο άρτιο μέρος του σήματος $x(t)$, δηλ. στο

$$x_e(t) = \frac{x(t)+x(-t)}{2} \tag{59}$$

Άρα

$$x_e(t) = |t|e^{-|t|} = \frac{x(t)+x(-t)}{2} \Longleftrightarrow x(t)+x(-t) = 2|t|e^{-|t|} = \begin{cases} 2te^{-t}, & t>0 \\ -2te^{t}, & t<0 \end{cases} \tag{60}$$

Αφού ισχύει ότι $x(t)=0,\, t<0 \Longrightarrow x(-t)=0,\ t>0$, τότε το $x(t)$ και το $x(-t)$ δεν "επικαλύπτονται", και άρα

$$x(t) = 2te^{-t}u(t) \tag{61}$$

Άσκηση 7 - Αντίστροφος Μετασχ. Fourier - I

Αφού γνωρίζουμε το μέτρο και τη φάση του μετασχηματισμού, μπορούμε να τον βρούμε ως

$$X(f) = |X(f)|e^{j\phi_x(f)} = 2(u(f+3)-u(f-3))e^{j(-3\pi f+\pi)} \tag{62}$$

Παρατηρούμε ότι

$$u(f+3)-u(f-3) = \mathrm{rect}\Big(\frac{f}{6}\Big) \tag{63}$$

(α') Άρα η πολική μορφή δίνεται ως

$$X(f) = |X(f)|e^{j\phi_x(f)} = 2\text{rect}\Big(\frac{f}{6}\Big)e^{j(-3\pi f+\pi)} \tag{64}$$

(β') Θα έχουμε

$$x(t) = F^{-1}\{X(f)\} = F^{-1}\{2\text{rect}\Big(\frac{f}{6}\Big)e^{j(-3\pi f+\pi)}\} \tag{65}$$

$$= F^{-1}\{-2\text{rect}\Big(\frac{f}{6}\Big)e^{j(-3\pi f)}\} \tag{66}$$

$$= F^{-1}\{-2\text{rect}\Big(\frac{f}{6}\Big)\} * F^{-1}\{e^{j(-2\pi\frac{3}{2}f)}\} \tag{67}$$

λόγω της ιδιότητας της συνέλιξης στο χρόνο $\Longleftrightarrow$ γινόμενο στη συχνότητα. Στη συνέχεια,

$$x(t) = -12\text{sinc}(6t) * \delta(t - \frac{3}{2}) \tag{68}$$

$$= -12\text{sinc}(6(t - 3/2)) \tag{69}$$

$$= -12\text{sinc}(6t - 9)) \tag{70}$$

$$= -12\text{sinc}(9 - 6t) \tag{71}$$

από την ιδιότητα της συνέλιξης σήματος με τη συνάρτηση δέλτα και λόγω αρτιότητας της συνάρτησης sinc. Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε με εφαρμογή του ορισμού ή με εφαρμογή της ιδιότητας της κλιμάκωσης και χρονικής μετατόπισης - όλες αυτές οι λύσεις είναι σωστές.

(γ') Προφανώς τα σημεία μηδενισμού είναι τα σημεία μηδενισμού του αριθμητή $\sin(\pi(9 - 6t))$, οπότε

$$\pi(9 - 6t) = k\pi \Longleftrightarrow t = \frac{9-k}{6},\ \ k \in \mathrm{Z} \tag{72}$$

Άσκηση 8 - Αντίστροφος Μετασχ. Fourier - II

Ο μετασχηματισμός γράφεται ως

$$X(f) = \frac{10}{24 - (2\pi f)^2 + j28\pi f} = \frac{10}{(2 + j2\pi f)(12 + j2\pi f)} \tag{73}$$

Αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα θα έχουμε

$$X(f) = \frac{10}{(2 + j2\pi f)(12 + j2\pi f)} = \frac{A}{2 + j2\pi f} + \frac{B}{12 + j2\pi f} \tag{74}$$

με

$$A = X(f)(2 + j2\pi f)\Big]_{j2\pi f=-2} = \frac{10}{12 + j2\pi f}\Big]_{j2\pi f=-2} = 1 \tag{75}$$

$$B = X(f)(12 + j2\pi f)\Big]_{j2\pi f=-12} = \frac{10}{2 + j2\pi f}\Big]_{j2\pi f=-12} = -1 \tag{76}$$

και άρα

$$X(f) = \frac{1}{2 + j2\pi f} - \frac{1}{12 + j2\pi f} \tag{77}$$

Από τα ζεύγη μετασχηματισμών στους Πίνακες μας καταλήγουμε ότι

$$x(t) = (e^{-2t} - e^{-12t})u(t) \tag{78}$$