ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2022-23
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 24/2/2023 Ημερομηνία Παράδοσης: Σάββατο, 11/3/2023, ώρα λήξης προόδου

Οι ασκήσεις με [$\star$] είναι **bonus**, $+10$ μονάδες η καθεμία στο βαθμό αυτής της σειράς ασκήσεων (δηλ. μπορείτε να πάρετε μέχρι $90/80$ σε αυτή τη σειρά.)

Άσκηση 1 - Εξισώσεις

(α΄) Λύστε την εξίσωση

$$\mathrm{Im}\left\{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+j\frac{1}{2}\right)e^{j\theta}\right\}=\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{1}$$

(β΄) Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις του Euler, δείξτε ότι

$$\int_0^{2\pi}\cos^4(\theta)d\theta=\frac{3\pi}{4} \tag{2}$$

Απ.: (α) $\theta=\begin{cases}2k\pi-\frac{\pi}{6}\\ 2k\pi-\frac{\pi}{2}\end{cases}, k\in\mathbb{Z}$

Άσκηση 2 - Ενέργεια και Ισχύς

Σχεδιάστε και ελέγξτε τα παρακάτω σήματα ως προς το αν είναι σήματα ενέργειας ή ισχύος (ή τίποτε από τα δυο), υπολογίζοντας την κατάλληλη ποσότητα με βάση τα hints που έχουν δοθεί σε σχετική διάλεξη.

(α΄) $x(t)=\begin{cases}t, & 0\le t\le 1\\ 2-t, & 1<t\le 2\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases}$

(β΄) $x(t)=\begin{cases}5\cos(\pi t), & -1\le t\le 1\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases}$

(γ΄) $x(t)=5\cos(\pi t)+\sin(10\pi t),\quad -\infty<t<+\infty$

(δ΄) $x(t)=e^{2t},\quad -\infty<t<+\infty$

(ε΄) $x(t)=e^{2t},\quad t\in[0,2]$

Απ.: (α) $2/3$, (β) 25, (γ) 13, (δ) $-$, (ε) $\frac{1}{4}(e^8-1)$

[$\star$] Άσκηση 3 - Μετασχηματισμοί Σημάτων

Έστω ένα σήμα $x(t)$ που έχει μη μηδενικές τιμές για $t<-2$ και $t>4$, δηλ.

$$x(t)=\begin{cases}0, & t\in[-2,4]\\ f(t), & t<-2 \text{ και } t>4\end{cases} \tag{3}$$

Για κάθε ένα από τα παρακάτω σήματα, βρείτε τις τιμές του t για τις οποίες το σήμα έχει **σίγουρα μηδενικές τιμές**.

(α) $x(t-3)$, (β) $x(t+4)$, (γ) $x(-t)$, (δ) $x(-t+2)$,
(ε) $x(-t-2)$, (στ) $x(3t)$, (ζ) $x(t/2)$

Άσκηση 4 - Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα

Σας δίνεται η παρακάτω διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 11\frac{d}{dt}y(t) + 18y(t) = \frac{d}{dt}x(t) + 2x(t) \tag{4}$$

με αρχικές συνθήκες $y(0^-) = 1$, $\frac{d}{dt}y(t)\Big|_{t=0^-} = -1$.

(α΄) Υπολογίστε την απόκριση μηδενικής εισόδου, $y_{zi}(t)$.

(β΄) Υπολογίστε την κρουστική απόκριση, $h(t)$.

(γ΄) Υπολογίστε την απόκριση μηδενικής κατάστασης, $y_{zs}(t)$, για είσοδο $x(t) = e^{at}u(t)$, $a \in \Re - \{-9\}$.

(δ΄) Θεωρήστε ότι το σύστημα είναι ΓΧΑ (δηλ. έχει μηδενικές αρχικές συνθήκες). Ελέγξτε την ευστάθεια και την αιτιατότητά του.

Απ.: (α) $y_{zi}(t) = \left[\frac{8}{7}e^{-2t} - \frac{1}{7}e^{-9t}\right]u(t)$, (β) $h(t) = e^{-9t}u(t)$, (γ) $y_{zs}(t) = \frac{1}{a+9}\left(e^{at} - e^{-9t}\right)u(t)$.

Άσκηση 5 - Συνέλιξη

Υπολογίστε τις συνελίξεις μεταξύ των σηματων

(i) $x(t) = u(t)$, $y(t) = -e^{-t}u(t-1)$

(ii) $x(t) = \mathrm{rect}(t)$, $y(t) = 2\mathrm{rect}(2t)$

Απ: (i) $c(t) = (e^{-t} - e^{-1})u(t-1)$, (ii) $c(t) = \begin{cases} 0, & t < -3/4 \\ 2t + \frac{3}{2}, & -3/4 < t < -1/4 \\ 1, & -1/4 < t < 1/4 \\ \frac{3}{2} - 2t, & 1/4 < t < 3/4 \\ 0, & t > 3/4 \end{cases}$

Άσκηση 6 - Ραδιοφωνία AM

Αποφασίζετε να ανοίξετε ένα ραδιοφωνικό σταθμό ο οποίος θα παίζει rock μουσική.

(α΄) Αρχικά, υποθέστε ότι θέλετε να μεταδώσετε μέσω κεραίας (δηλ. ως ηλεκτρομαγνητικό κύμα) ένα απλό ημίτονο συχνότητας $f_0 = 440$ Hz (νότα ΛΑ) ως δοκιμαστική μετάδοση. Για να κατασκευάσετε την κεραία, ρωτάτε μια φίλη σας ηλεκτρολόγο μηχανικό που ξέρει Θεωρία Κεραιών. Αυτή σας πληροφορεί ότι η κεραία πρέπει να έχει μέγεθος της τάξης του μήκους κύματος λ του σήματος που πρέπει να εκπέμψετε (δηλ. η κεραία πρέπει να έχει μήκος $L \approx \lambda$). Προβληματίζεστε αρκετά, γιατί γνωρίζετε ότι η ταχύτητα του ηλεκτρομαγνητικού κύματος είναι $c = 3 \times 10^8$ m/s και θυμάστε από τη Φυσική σας ότι $c = \lambda f$. Τι είναι αυτό που σας προβληματίζει;

(β΄) Αποφασίζετε να αυξήσετε τη συχνότητα του σήματος, μια και οι rock ήχοι περιέχουν κυρίως υψηλότερες συχνότητες. Ένας φίλος σας που γνωρίζει ακουστική, σας λέει ότι η ροκ μουσική περιέχει συχνότητες (ημίτονα δηλαδή) από 100 έως 16000 Hz. Για $f_0 = 10000$ Hz, πόσο πρέπει να είναι το μήκος της κεραίας που πρέπει να κατασκευάσετε για να μπορείτε να μεταδώσετε το σχετικό ημίτονο; Τι συμπέρασμα βγάζετε για το μήκος της κεραίας σε σχέση με την αυξομείωση της συχνότητας μετάδοσης;

(γ') Μια από τις πρώτες σημαντικές εφαρμογές στις τηλεπικοινωνίες ήταν η μετάδοση AM, ή πιο τεχνικά, η μετάδοση σήματος *διαμορφωμένου κατά πλάτος* (*Amplitude Modulation*). Η τεχνική αυτή λύνει το πρόβλημα του μη πρακτικού μήκους κεραίας εκπομπής. Η AM μετάδοση ήταν ο κυρίαρχος τρόπος εκπομπής κατά τα πρώτα ογδόντα χρόνια του 20ού αιώνα και παραμένει σε ευρεία χρήση και κατά τον 21ο. Οι σταθμοί που εκπέμπουν στα AM παγκοσμίως αριθμούνται σε 16.265. Στην πιο απλή και κατανοητή μορφή της, ένα σήμα πληροφορίας $m(t)$ πολλαπλασιάζεται με ένα *φέρον* σήμα $c(t)$ αρκετά μεγάλης συχνότητας, και μεταδίδεται από μια συμβατική κεραία. Εδώ θα εξηγήσουμε γιατί αυτό είναι εφικτό. Έστω ότι το σήμα πληροφορίας σας είναι το

$$m(t) = 2\cos\left(2\pi 440 t - \frac{\pi}{4}\right) \tag{5}$$

και το φέρον σήμα το

$$c(t) = \cos(2\pi 10000 t) \tag{6}$$

Το σήμα που τελικά στέλνετε είναι το

$$x(t) = \Big[2 + m(t)\Big] c(t) \tag{7}$$

i. Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης του $m(t)$.

ii. Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης του $c(t)$.

iii. Γράψτε το $x(t)$ ως

$$x(t) = A_1\cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + A_2\cos(2\pi f_2 t + \phi_2) + A_3\cos(2\pi f_3 t + \phi_3) \tag{8}$$

με $f_1 < f_2 < f_3$.

Απ.: $A_1 = 1$, $A_2 = 2$, $A_3 = 1$
$\phi_1 = \pi/4$, $\phi_2 = 0$, $\phi_3 = -\pi/4$
$f_1 = 9560$, $f_2 = 10000$, $f_3 = 10440$

iv. Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης του διαμορφωμένου κατά AM σήματος, $x(t)$. Τι παρατηρείτε, σε σχέση με τα φάσματα των επιμέρους σημάτων, $m(t)$ και $c(t)$;

v. Το σήμα $x(t)$ μεταδίδεται και φτάνει στο δέκτη. Ο δέκτης πρέπει να ανακτήσει το σήμα πληροφορίας $m(t)$ από το σήμα $x(t)$ που έλαβε, πολλαπλασιάζοντας το $x(t)$ με το *σήμα αποδιαμόρφωσης*

$$d(t) = 2\cos(2\pi 10000 t) \tag{9}$$

δηλ. δημιουργεί το σήμα

$$r(t) = x(t)d(t) = \Big(2 + m(t)\Big)c(t)d(t) \tag{10}$$

I. Απλοποιήστε τη σχέση $r(t)$, αν γνωρίζετε ότι $\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$.

II. Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους της παραπάνω σχέσης που βρήκατε. Τι παρατηρήτε ότι συνέβη;

III. Το αρχικό σήμα $m(t)$ έχει φασματική πληροφορία μόνο στις συχνότητες ± 440 Hz. Συγκρίνοντας το φάσμα πλάτους του $m(t)$ που σχεδιάσατε αρχικά με το φάσμα πλάτους που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, τι επιπλέον φασματική πληροφορία υπάρχει στη ζώνη συχνοτήτων $[-440, 440]$ Hz;

Ασκηση 7 - Σειρά Fourier

Έστω το περιοδικό σήμα $x(t)$ με περίοδο $T_0 = 2$, που σε μια περίοδό του εκφράζεται ως

$$x_{T_0}(t) = \frac{t^2}{2}, \quad -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2} \tag{11}$$

(α΄) Δεδομένου ότι ένας αναλυτικός υπολογισμός είναι χρονοβόρος, υπολογίστε την εκθετική Σειρά Fourier του μέσω της ιδιότητας της παραγώγισης - ολοκλήρωσης και γνωστές Σειρές Fourier που έχετε δει στις διαλέξεις. Μια σχεδίαση τόσο του $x(t)$ όσο και της παραγώγου του, $dx(t)/dt$, θα σας βοηθήσει πολύ.

(β΄) Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης χρησιμοποιώντας μόνο τα $k = \pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1, 0$.

Απ: $X_0 = \frac{1}{6}, \quad X_k = \frac{1}{\pi^2 k^2}(-1)^k$

Ασκηση 8 - Σειρές Fourier - Ιδιότητες I

Έστω ότι για ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ μας δίνονται οι παρακάτω πληροφορίες:

- είναι πραγματικό και περιττό
- έχει περιόδο $T_0 = 2$ και συντελεστές Fourier X_k
- ισχύει $X_k = 0$ για $|k| > 1$
- ισχύει $\frac{1}{2}\int_0^2 |x(t)|^2 dt = 1$

Βρείτε δυο σήματα που ικανοποιούν τις παραπάνω προδιαγραφές.

Απ: $x(t) = \pm\sqrt{2}\sin(\pi t)$

Ασκηση 9 - Σειρές Fourier - Ιδιότητες II

Έστω ένα περιοδικό σήμα με συντελεστές Fourier

$$X_k = \begin{cases} 2, & k = 0 \\ j\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}, & k \neq 0 \end{cases} \tag{12}$$

Χρησιμοποιήστε ιδιοτητες για να αποφανθειτε για το αν το περιοδικό σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό;

Απ: όχι