ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2022-23
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 23/2/2023 Ημερομηνία Παράδοσης: Σάββατο, 11/3/2023, ώρα προόδου

Οι ασκήσεις με [⋆] είναι **bonus**, +10 μονάδες η καθεμία στο βαθμό αυτής της σειράς ασκήσεων (δηλ. μπορείτε να πάρετε μέχρι 100/90 σε αυτή τη σειρά.)

Άσκηση 1 - Εξισώσεις

(α΄) Έχουμε

$$\mathrm{Im}\Big\{\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}+j\frac{1}{2}\Big)e^{j\theta}\Big\}=\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{1}$$

$$\mathrm{Im}\Big\{e^{j\frac{5\pi}{6}}e^{j\theta}\Big\}=\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{2}$$

$$\mathrm{Im}\Big\{e^{j(\theta+\frac{5\pi}{6})}\Big\}=\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{3}$$

$$\sin\left(\theta+\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \tag{4}$$

$$\theta+\frac{5\pi}{6}=\begin{cases} 2k\pi+\pi-\frac{\pi}{3} \\ 2k\pi+\frac{\pi}{3}\end{cases} \tag{5}$$

$$\theta=\begin{cases} 2k\pi-\frac{\pi}{6} \\ 2k\pi-\frac{\pi}{2}\end{cases} \tag{6}$$

με $k \in \mathbb{Z}$.

(β΄) Ισχύει

$$\int_0^{2\pi}\cos^4(\theta)d\theta=\int_0^{2\pi}\cos^2(\theta)\cos^2(\theta)d\theta \tag{7}$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}e^{j\theta}+\frac{1}{2}e^{-j\theta}\right)^2\left(\frac{1}{2}e^{j\theta}+\frac{1}{2}e^{-j\theta}\right)^2d\theta \tag{8}$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}e^{j2\theta}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{-j2\theta}\right)\left(\frac{1}{4}e^{j2\theta}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{-j2\theta}\right)d\theta \tag{9}$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{16}e^{j4\theta}+\frac{1}{8}e^{j2\theta}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}e^{j2\theta}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}e^{-j2\theta}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}e^{-j2\theta}+\frac{1}{16}e^{-j4\theta}\right)d\theta \tag{10}$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{8}\cos(4\theta)+\frac{1}{4}\cos(2\theta)+\frac{1}{4}\cos(2\theta)+\frac{3}{8}\right)d\theta \tag{11}$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{8}\cos(4\theta)+\frac{1}{2}\cos(2\theta)+\frac{3}{8}\right)d\theta \tag{12}$$

$$=\frac{1}{32}\sin(4\theta)+\frac{1}{4}\sin(2\theta)+\frac{3}{8}\theta\Big]_0^{2\pi}=0+0+\frac{3}{8}(2\pi-0)=\frac{6\pi}{8}=\frac{3\pi}{4} \tag{13}$$

Άσκηση 2 - Ενέργεια και Ισχύς

(α΄) Είναι

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \int_0^1 t^2 dt + \int_1^2 (2-t)^2 dt \tag{14}$$

$$= \frac{t^3}{3}\Big]_0^1 + \left(4t - 4\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right)\Big]_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \tag{15}$$

Αν υπολογίσετε την ισχύ του P_x, αυτή θα προκύψει μηδενική.

(β΄) Είναι

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \int_{-1}^{1} 25\cos^2(\pi t)dt = 25\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{4}e^{j2\pi t} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-j2\pi t}\right)dt \tag{16}$$

$$= 25\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\pi t)\right)dt = 25\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4\pi}\sin(2\pi t)\right)\Big]_{-1}^{1} \tag{17}$$

$$= \frac{25}{2}(1+1) + \frac{1}{4\pi}0 = 25 \tag{18}$$

Αν υπολογίσετε την ισχύ του, θα τη βρείτε μηδενική.

(γ΄) Ας υπολογίσουμε την ισχύ ενός γενικού ημιτονοειδούς σήματος.

$$P_x = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} A^2\cos^2(2\pi f_0 t + \theta)dt = \lim_{T\to\infty}\frac{A^2}{4T}\int_{-T}^{T}[1 + \cos(4\pi f_0 t + 2\theta)]dt \tag{19}$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{A^2}{4T}\int_{-T}^{T} dt + \lim_{T\to\infty}\frac{A^2}{4T}\int_{-T}^{T}\cos(4\pi f_0 t + 2\theta)dt \tag{20}$$

Ο πρώτος όρος ειναι ίσος με $A^2/2$. Επίσης, ο δεύτερος όρος μπορεί να δειχθεί εύκολα ότι είναι μηδέν. Άρα

$$P_x = \frac{A^2}{2} \tag{21}$$

Μπορεί κανείς να δείξει ότι για ένα άθροισμα N ημιτονοειδών διαφορετικών συχνοτήτων, θα έχουμε

$$P_x = \sum_{k=1}^{N}\frac{A_k^2}{2} \tag{22}$$

Οπότε στο ζητούμενο της άσκησης, είναι

$$P_x = \frac{5^2}{2} + \frac{1^2}{2} = \frac{25}{2} + \frac{1}{2} = 13 \tag{23}$$

Φυσικά μια λιγότερο γενική λύση είναι επίσης σωστή. Αν υπολογίσετε την ενέργειά του, θα τη βρείτε άπειρη.

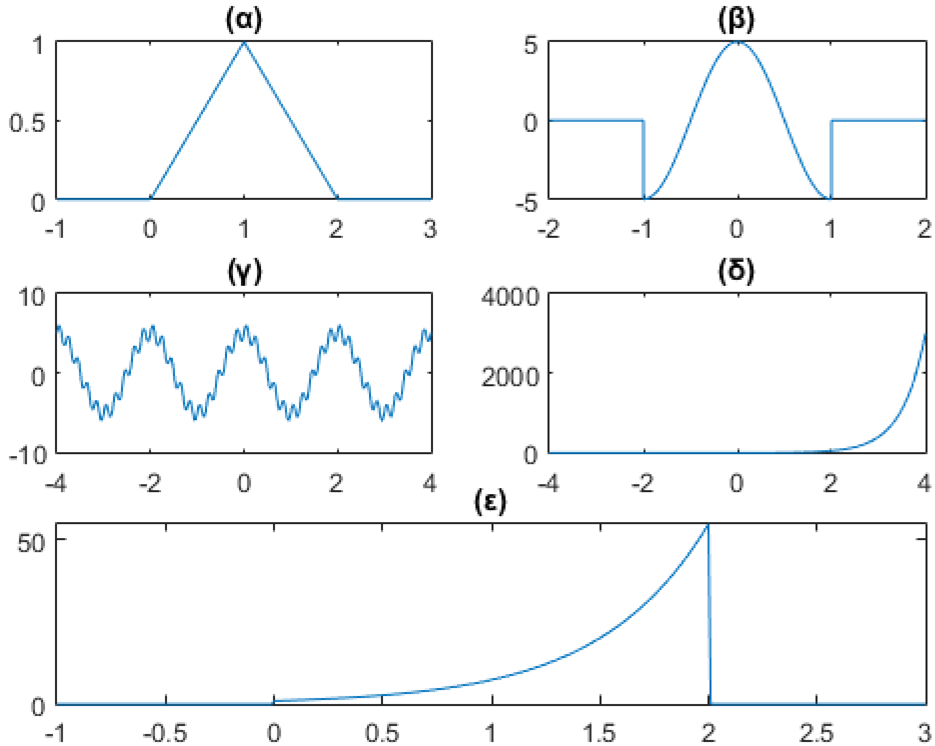
(δ΄) Στο σήμα $x(t) = e^{2t}, \quad -\infty < t < +\infty$, τόσο η ενέργεια όσο και η ισχύς του δεν ορίζονται (άπειρες και οι δυο).

(ε΄) Ας υπολογίσουμε την ενέργεια του $x(t) = e^{2t}, \quad t \in [0, 2]$. Είναι

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \int_0^2 e^{4t}dt = \frac{1}{4}e^{4t}\Big]_0^2 = \frac{1}{4}(e^8 - 1) \tag{24}$$

Αν υπολογίσετε την ισχύ του, θα τη βρείτε μηδενική.

Οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: *Σχήματα Άσκησης 2.*

[⋆] Άσκηση 3 - Μετασχηματισμοί Σημάτων

Για κάθε περίπτωση θα είναι

(α') Το σήμα $x(t-3)$ αποτελεί μια χρονική μετατόπιση του αρχικού σήματος κατά $t_0 = 3$ δεξιά. Άρα το σήμα είναι σίγουρα μηδενικό για $1 \leq t \leq 7$.

(β') Το σήμα $x(t+4)$ αποτελεί μια χρονική μετατόπιση του αρχικού σήματος κατά $t_0 = 4$ αριστερά. Άρα το σήμα είναι σίγουρα μηδενικό για $-6 \leq t \leq 0$.

(γ') Το σήμα $x(-t)$ αποτελεί μια ανάκλαση του αρχικού σήματος ως προς τον κατακόρυφο άξονα. Άρα το σήμα έχει σίγουρα μηδενικές τιμές για $-4 \leq t \leq 2$.

(δ') Το σήμα $x(-t+2)$ αποτελεί μια ανάκλαση του αρχικού σήματος ως προς τον κατακόρυφο άξονα και στη συνέχεια μια ολίσθηση προς τα *δεξιά* - λόγω της αντιστροφής του άξονα του χρόνου. Άρα το σήμα έχει σίγουρα μηδενικές τιμές για $-2 \leq t \leq 4$.

(ε') Το σήμα $x(-t-2)$ αποτελεί μια ανάκλαση του αρχικού σήματος ως προς τον κατακόρυφο άξονα και στη συνέχεια μια ολίσθηση προς τα *αριστερά* - λόγω της αντιστροφής του άξονα του χρόνου. Άρα το σήμα έχει σίγουρα μηδενικές τιμές για $-6 \leq t \leq 0$.

(ϛ') Το σήμα $x(3t)$ αποτελεί μια χρονική στάθμιση (συμπίεση) του αρχικού σήματος, κατά παράγοντα $a = 3$. Άρα το σήμα έχει σίγουρα μηδενικές τιμές για $-2/3 \leq t \leq 4/3$.

(ζ') Το σήμα $x(t/2)$ αποτελεί μια χρονική στάθμιση (διαστολή) του αρχικού σήματος, κατά παράγοντα $a = 1/2$. Άρα το σήμα έχει σίγουρα μηδενικές τιμές για $-4 \leq t \leq 8$.

Τα παραπάνω μπορείτε να τα βρείτε με τον ορισμό που σας δίνεται, αντικαθιστώντας το t με τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς. Όμως συνίσταται να μάθετε τους κανόνες που προκύπτουν από τους μετασχηματισμούς της χρονικής μεταβλητής.

Άσκηση 4 - Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα

(α΄) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$\lambda^2 + 11\lambda + 18 \tag{25}$$

και οι χαρακτηριστικές του ρίζες είναι οι

$$\lambda_1 = -2,\ \ \lambda_2 = -9 \tag{26}$$

Άρα η απόκριση μηδενικής κατάστασης είναι

$$y_{zi}(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-9t},\ \ t > 0 \tag{27}$$

Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε

$$y(0^-) = 1 = c_1 + c_2 \tag{28}$$

$$y'(0^-) = -1 = -2c_1 - 9c_2 \tag{29}$$

και λύνοντας το σύστημα έχουμε $c_1 = 8/7$ και $c_2 = -1/7$. Οπότε

$$y_{zi}(t) = \frac{8}{7}e^{-2t} - \frac{1}{7}e^{-9t},\ \ t > 0 = \left[\frac{8}{7}e^{-2t} - \frac{1}{7}e^{-9t}\right] u(t) \tag{30}$$

(β΄) Θεωρούμε το απλούστερο σύστημα

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 11\frac{d}{dt}y(t) + 18y(t) = x(t) \tag{31}$$

με κρουστική απόκριση $h_o(t)$. Οι νέες "αρχικές συνθήκες" που γεννά η συνάρτηση Δέλτα όταν εμφανίζεται στην είσοδο του συστήματος είναι οι

$$h_o(0^-) = 0 \tag{32}$$

$$h_o'(0^-) = 1/a_N = 1 \tag{33}$$

Ξανά, οι χαρακτηριστικές του ρίζες είναι οι

$$\lambda_1 = -2,\ \ \lambda_2 = -9 \tag{34}$$

Η κρουστική απόκριση θα είναι

$$h_o(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-9t},\ \ t > 0 \tag{35}$$

Από τις "αρχικές συνθήκες " έχουμε

$$h_o(0^-) = 0 = c_1 + c_2 \tag{36}$$

$$h_o'(0^-) = 1 = -2c_1 - 9c_2 \tag{37}$$

και λύνοντας το σύστημα έχουμε $c_1 = 1/7$ και $c_2 = -1/7$. Οπότε

$$h_o(t) = \frac{1}{7}e^{-2t} - \frac{1}{7}e^{-9t},\ \ t > 0 = \left[\frac{1}{7}e^{-2t} - \frac{1}{7}e^{-9t}\right] u(t) \tag{38}$$

Η κρουστική απόκριση του δοσμένου συστήματος θα είναι

$$h(t) = \frac{d}{dt}h_o(t) + 2h_o(t) \tag{39}$$

$$= \left[\frac{1}{7}e^{-2t} - \frac{1}{7}e^{-9t}\right]' u(t) + \left[\frac{1}{7}e^{-2t} - \frac{1}{7}e^{-9t}\right] u'(t) + 2\left[\frac{1}{7}e^{-2t} - \frac{1}{7}e^{-9t}\right] u(t) \tag{40}$$

$$= \frac{9}{7}e^{-9t}u(t) - \frac{2}{7}e^{-9t}u(t) = e^{-9t}u(t) \tag{41}$$

(γ') Η απόκριση μηδενικής κατάστασης δίνεται ως

$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{a\tau}e^{-9(t-\tau)}d\tau \tag{42}$$

$$= e^{-9t}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{a\tau}e^{9\tau}u(\tau)u(t-\tau)d\tau = e^{-9t}\int_{0}^{t} e^{(a+9)\tau}d\tau \tag{43}$$

$$= \frac{1}{a+9}(e^{at} - e^{-9t}) \tag{44}$$

για $t > 0$, δηλ.

$$y_{zs}(t) = \frac{1}{a+9}(e^{at} - e^{-9t})u(t) \tag{45}$$

(δ') Το σύστημα είναι ευσταθές γιατί οι χαρακτηριστικές του ρίζες είναι όλες αρνητικές. Το σύστημα είναι αιτιατό, γιατί για την κρουστική του απόκριση ισχύει ότι $h(t) = 0, \ t < 0$.

Άσκηση 5 - Συνέλιξη

(i) Είναι

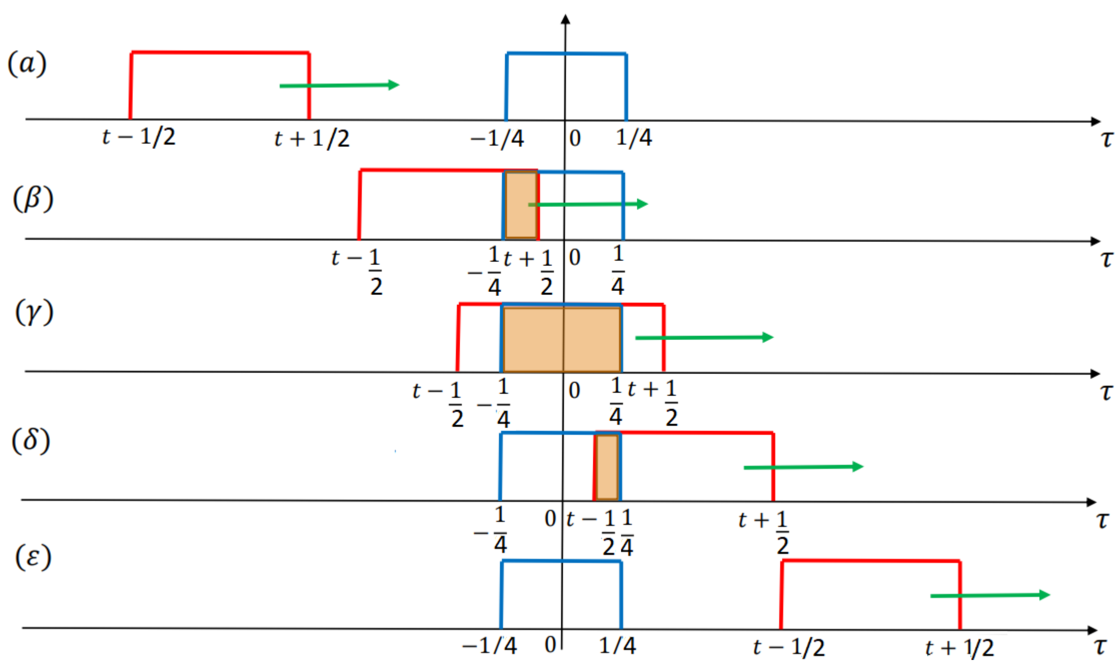
$$c_{xy}(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau}u(\tau-1)u(t-\tau)d\tau \tag{46}$$

$$= -\int_{1}^{t} e^{-\tau}d\tau = -(-e^{-\tau})\Big|_{1}^{t} = (e^{-t} - e^{-1}) \tag{47}$$

για $1 < \tau < t \iff t > 1$, άρα

$$c_{xy}(t) = (e^{-t} - e^{-1})u(t-1) \tag{48}$$

(ii) Διακρίνουμε τις περιπτώσεις στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: *Περιπτώσεις Άσκησης 5β.*

(α') Είναι $c_{xy}(t) = 0$, για $t + 1/2 < -1/4 \iff t < -3/4$.

(β΄) Είναι
$$c_{xy}(t) = \int_{-1/4}^{t+1/2} 2d\tau = 2\tau\Big|_{-1/4}^{t+1/2} = 2(t+3/4) \tag{49}$$
για $t + 1/2 > -1/4$ και $t + 1/2 < 1/4$, δηλ. $-3/4 < t < -1/4$.

(γ΄) Είναι
$$c_{xy}(t) = \int_{-1/4}^{1/4} 2\tau = 2\tau\Big|_{-1/4}^{1/4} = 1 \tag{50}$$
για $t - 1/2 < -1/4$ και $t + 1/2 > 1/4$, δηλ. $-1/4 < t < 1/4$.

(δ΄) Είναι
$$c_{xy}(t) = \int_{t-1/2}^{1/4} 2d\tau = 2\tau\Big|_{t-1/2}^{1/4} = \frac{3}{2} - 2t \tag{51}$$
για $t - 1/2 < 1/4$ και $t - 1/2 > -1/4$, δηλ. $1/4 < t < 3/4$.

(ε΄) Είναι $c_{xy}(t) = 0$, για $t > 3/4$. Άρα συνολικά
$$c(t) = \begin{cases} 0, & t < -3/4 \\ 2t + \frac{3}{2}, & -3/4 < t < -1/4 \\ 1, & -1/4 < t < 1/4 \\ \frac{3}{2} - 2t, & 1/4 < t < 3/4 \\ 0, & t > 3/4 \end{cases} \tag{52}$$

Άσκηση 6 - Ραδιοφωνία ΑΜ

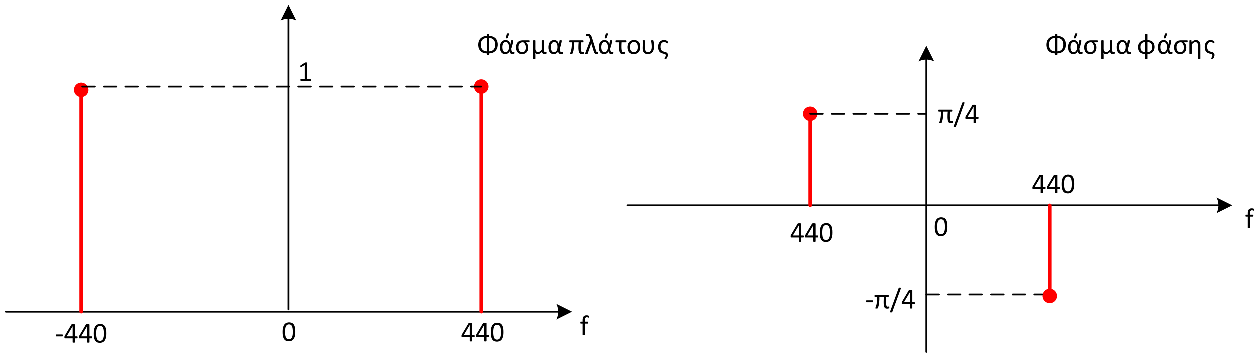
(α΄) Προβληματίζει το γεγονός ότι
$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{440} \approx 682.000 \text{ m} \tag{53}$$
οπότε το μέγεθος της κεραίας πρέπει να είναι ανάλογο αυτής της πολύ μεγάλης ποσότητας. Προφανώς είναι ένα μέγεθος ανέφικτο στην πράξη.

(β΄) Το νέο μήκος της κεραίας πρέπει να είναι ανάλογο της ποσότητας
$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{10000} \approx 30.000 \text{ m} \tag{54}$$
Άρα για αυτή τη συχνότητα, το μέγεθος της κεραίας μειώνεται σημαντικά αλλά πάλι είναι ανέφικτη η κατασκευή της. Παρατηρούμε ότι το μήκος της κεραίας μειώνεται όσο αυξάνεται η συχνότητα.

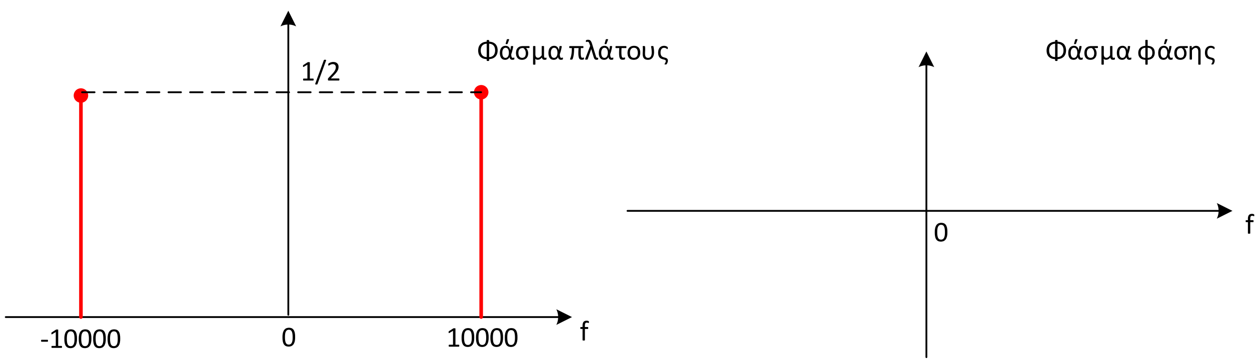
(γ΄) Το σήμα που στέλνεται είναι
$$x(t) = \Big[2 + m(t)\Big]c(t) \tag{55}$$

i. Για το $m(t)$ έχουμε
$$m(t) = 2\cos(2\pi 440t - \frac{\pi}{4}) = e^{-j\pi/4}e^{j2\pi 440t} + e^{j\pi/4}e^{-j2\pi 440t} \tag{56}$$
και τα φάσματα φαίνονται στο Σχήμα 3.

ii. Για το $c(t)$ έχουμε
$$c(t) = \cos(2\pi 10000t) = \frac{1}{2}e^{j2\pi 10000t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi 10000t} \tag{57}$$
και τα φάσματα φαίνονται στο Σχήμα 4.



Σχήμα 3: *Φάσματα σήματος* $m(t)$.



Σχήμα 4: *Φάσματα σήματος* $c(t)$.

iii. Είναι

$$
\begin{aligned}
x(t) = \Big[2 + m(t)\Big]c(t) &= 2c(t) + m(t)c(t) && (58)\\
&= 2\cos(2\pi 10000t) + 2\cos(2\pi 440t - \pi/4)\cos(2\pi 10000t) && (59)\\
&= 2\cos(2\pi 10000t) + \cos(2\pi 9560t + \pi/4) + \cos(2\pi 10440t - \pi/4) && (60)\\
&= \cos(2\pi 9560t + \pi/4) + 2\cos(2\pi 10000t) + \cos(2\pi 10440t - \pi/4) && (61)
\end{aligned}
$$

από γνωστή τριγωνομετρία (ή σχέσεις του Euler).

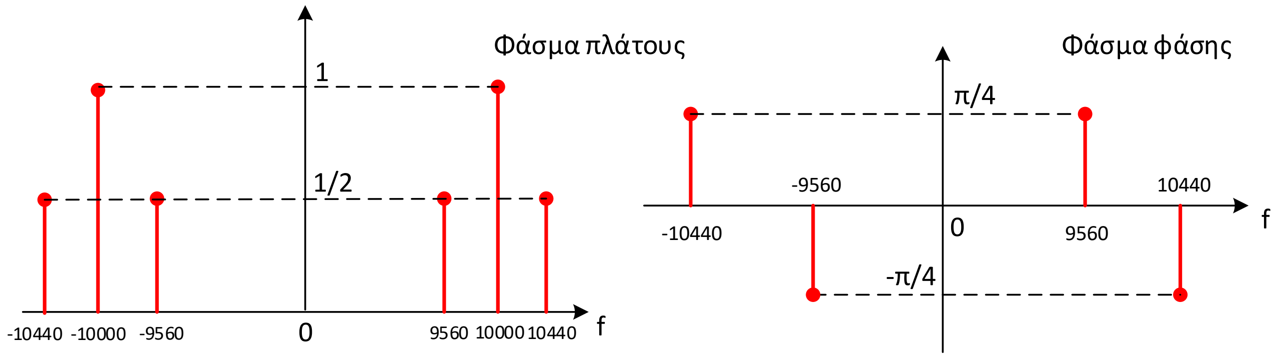
iv. Από το προηγούμενο ερώτημα

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \cos(2\pi 9560t + \pi/4) + 2\cos(2\pi 10000t) + \cos(2\pi 10440t - \pi/4) && (62)\\
&= \frac{1}{2}e^{j\pi/4}e^{j2\pi 9560t} + \frac{1}{2}e^{-j\pi/4}e^{-j2\pi 9560t} + e^{j2\pi 10000t} + e^{-j2\pi 10000t} + \frac{1}{2}e^{-j\pi/4}e^{j2\pi 10440t} + \frac{1}{2}e^{j\pi/4}e^{-j2\pi 10000t} && (63)
\end{aligned}
$$

Από το Σχήμα 5, το φάσμα του $x(t)$ περιέχει πληροφορία στις συχνότητες 9560, 10000, 10440 Hz. Με άλλα λόγια, το φάσμα του σήματος πληροφορίας $m(t)$ έχει μεταφερθεί γύρω από τη συχνότητα 10000 Hz του φέροντος σήματος $c(t)$! Έτσι, το σήμα $x(t)$ έχει υψηλότερες συχνότητες από το σήμα πληροφορίας, κοντά στη συχνότητα του φέροντος - μάλιστα, αν η συχνότητα του φέροντος είναι αρκετά μεγάλη (της τάξης των MHz), τότε η κατασκευή της κεραίας είναι εφικτή, εφόσον οι συχνότητες του σήματος πληροφορίας θα μεταφερθούν γύρω από αυτή!

v. Έχουμε

$$
\begin{aligned}
r(t) = x(t)d(t) = \Big(2 + m(t)\Big)c(t)d(t) && (64)\\
= 2c(t)d(t) + m(t)c(t)d(t) && (65)\\
= 4\cos^2(2\pi 10000t) + 4\cos(2\pi 440t - \pi/4)\cos^2(2\pi 10000t) && (66)
\end{aligned}
$$



Σχήμα 5: *Φάσματα σήματος* $x(t)$.

I. Έχουμε

$$r(t) = 4\cos^2(2\pi 10000t) + 4\cos(2\pi 440t - \pi/4)\cos^2(2\pi 10000t) \tag{67}$$

$$= 2 + 2\cos(2\pi 20000t) + 4\cos(2\pi 440t - \pi/4)\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\pi 20000t)\Big) \tag{68}$$

$$= 2 + 2\cos(2\pi 20000t) + 2\cos(2\pi 440t - \pi/4) + 2\cos(2\pi 440t - \pi/4)\cos(2\pi 20000t) \tag{69}$$

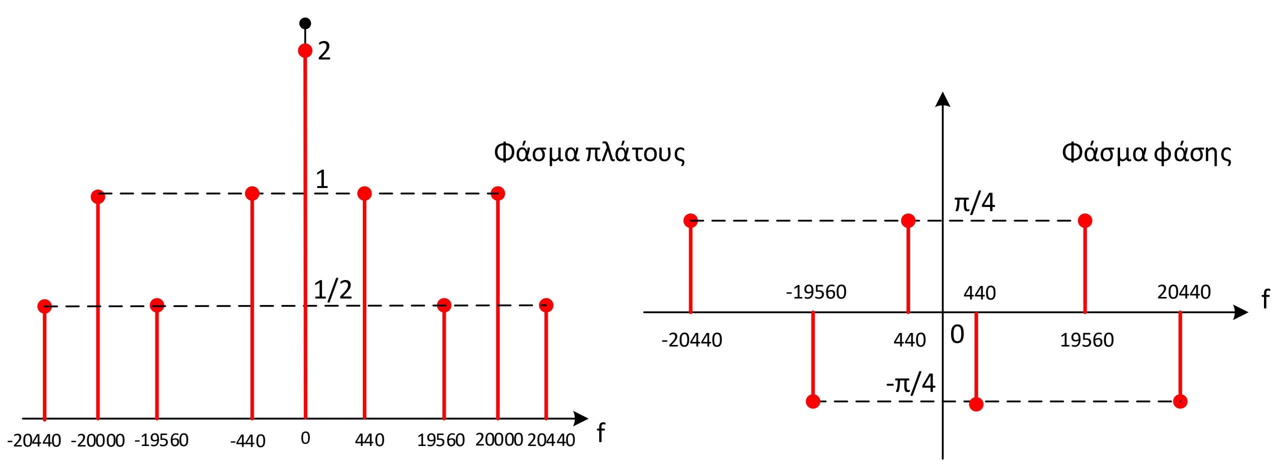
$$= 2 + 2\cos(2\pi 20000t) + 2\cos(2\pi 440t - \pi/4) + \cos(2\pi 19560t + \pi/4) + \cos(2\pi 20440t - \pi/4) \tag{70}$$

II. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε

$$r(t) = 2 + 2\cos(2\pi 20000t) + 2\cos(2\pi 440t - \pi/4) + \cos(2\pi 19560t + \pi/4) + \cos(2\pi 19440t - \pi/4) \tag{71}$$

$$= 2 + e^{j2\pi 20000t} + e^{-j2\pi 20000t} + e^{-j\pi/4}e^{j2\pi 440t} + e^{j\pi/4}e^{-j2\pi 440t} + \frac{1}{2}e^{j\pi/4}e^{j2\pi 19560t}$$
$$+ \frac{1}{2}e^{-j\pi/4}e^{-j2\pi 19560t} + \frac{1}{2}e^{-j\pi/4}e^{j2\pi 20440t} + \frac{1}{2}e^{j\pi/4}e^{-j2\pi 20440t} \tag{72}$$

Δείτε το Σχήμα 6. Προσέξτε ότι το σήμα πληροφορίας έχει επανέλθει στις "φυσιολογικές " του



Σχήμα 6: *Φάσματα σήματος* $r(t)$.

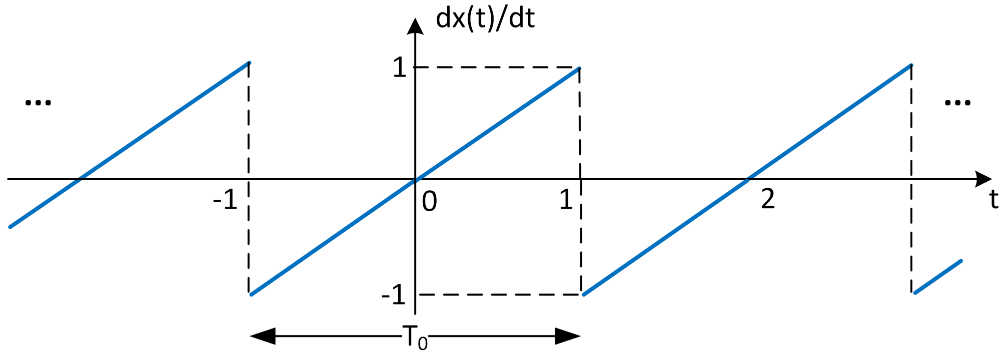
συχνότητες. Έτσι μπορούμε ξανά να το ακούσουμε.

III. Στη ζώνη $[-440, 440]$ υπάρχει επιπλέον πληροφορία, και συγκεκριμένα στη συχνότητα $f = 0$![1]

[1]Στην πράξη, αυτό δεν αποτελεί ιδιαίτερο πρόβλημα.

Άσκηση 7 - Σειρά Fourier

(α΄) Η παράγωγος του σήματος $x(t)$ φαίνεται στο Σχήμα 7. Αυτό το σήμα είναι γνωστό σήμα από τις διαλέξεις



Σχήμα 7: *Παράγωγος σήματος άσκησης 2.*

και έχει συντελεστές Fourier

$$X_k^d = \frac{1}{\pi k}(-1)^k e^{j\pi/2} \tag{73}$$

Οι συντελεστές του αρχικού σήματος δίνονται από την ιδιότητα της ολοκλήρωσης, και είναι

$$X_k = \frac{1}{j2\pi k f_0} X_k^d = \frac{1}{j2\pi k f_0}\frac{1}{\pi k}(-1)^k e^{j\pi/2} \tag{74}$$

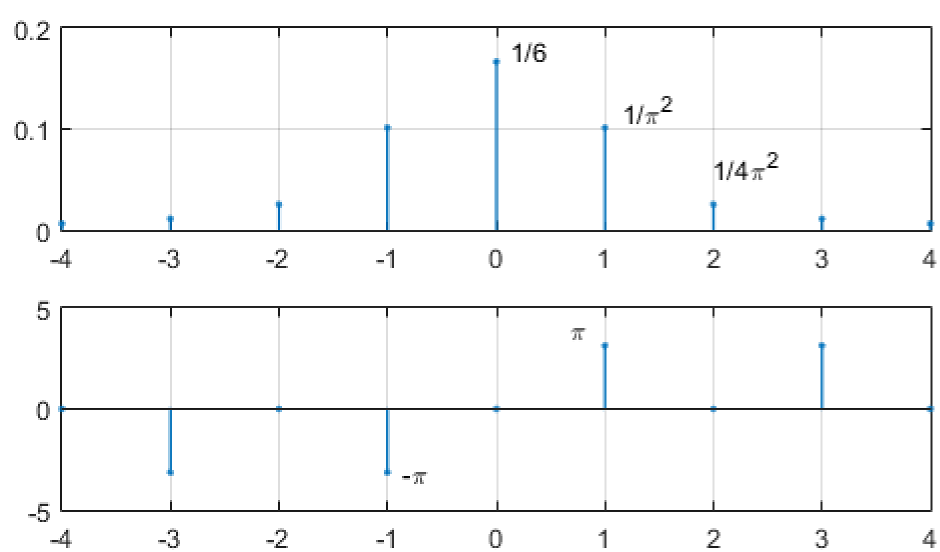
$$= \frac{1}{j2\pi k\frac{1}{2}}\frac{1}{\pi k}(-1)^k e^{j\pi/2} = \frac{1}{j\pi^2 k^2}(-1)e^{j\pi/2} \tag{75}$$

$$= e^{-j\pi/2}\frac{1}{\pi^2 k^2}(-1)^k e^{j\pi/2} = \frac{1}{\pi^2 k^2}(-1)^k \tag{76}$$

κι επίσης

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{t^2}{2}dt = \frac{1}{4}\frac{t^3}{3}\Big]_{-1}^{1} = \frac{1}{4}\frac{2}{3} = \frac{1}{6} \tag{77}$$

(β΄) Τα φάσματα φαίνονται στο Σχήμα 8.



Σχήμα 8: *Φάσματα άσκησης 2.*

Άσκηση 8 - Σειρές Fourier - Ιδιότητες I
Αφού το σήμα είναι πραγματικό και έχει συντελεστές X_k μόνο για $|k| \leq 1$, θα είναι της μορφής

$$x(t) = X_1^* e^{-j2\pi\frac{1}{2}t} + X_0 + X_1 e^{j2\pi\frac{1}{2}t} \tag{78}$$

Επιπλέον, αφού είναι περιττό, τότε οι συντελεστές X_k θα είναι καθαρά φανταστικοί αριθμοί και περιττοί, δηλ.

$$X_k = -X_{-k} \tag{79}$$

όπως επίσης και $X_0 = 0$. Από τη σχέση του ολοκληρώματος - που αποτελεί το θεώρημα του Parseval - θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^2 |x(t)|^2 dt = 1 \Longleftrightarrow \sum_{k=-1}^{1} |X_k|^2 = 1 &\Longleftrightarrow 2|X_1|^2 + |X_0|^2 = 1 && (80)\\
&\Longleftrightarrow 2|X_1|^2 = 1 && (81)\\
&\Longleftrightarrow |X_1| = \frac{1}{\sqrt{2}} && (82)\\
&\Longleftrightarrow X_1 = \pm j\frac{1}{\sqrt{2}} && (83)\\
& && (84)
\end{aligned}$$

Έτσι, αν $X_1 = j\frac{1}{\sqrt{2}}$, τότε $-X_{-1} = X_1 = j\frac{1}{\sqrt{2}}$, και αν $X_1 = -j\frac{1}{\sqrt{2}}$, τότε $-X_{-1} = X_1 = -j\frac{1}{\sqrt{2}}$. Τα δυο σήματα που ικανοποιούν τα παραπάνω είναι τα

$$x_1(t) = \frac{1}{j\sqrt{2}}e^{j\pi t} - \frac{1}{j\sqrt{2}}e^{-j\pi t} = \sqrt{2}\sin(\pi t) \tag{85}$$

$$x_2(t) = -\frac{1}{j\sqrt{2}}e^{j\pi t} + \frac{1}{j\sqrt{2}}e^{-j\pi t} = -\sqrt{2}\sin(\pi t) \tag{86}$$

Άσκηση 9 - Σειρές Fourier - Ιδιότητες II
Για να είναι πραγματικό, θα πρέπει $X_k = X_{-k}^*$, οπότε

$$X_{-k}^* = \begin{cases} 2, & k = 0 \\ \left(j\left(\frac{1}{2}\right)^{|-k|}\right)^*, & k \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} 2, & k = 0 \\ -j\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}, & k \neq 0 \end{cases} \neq X_k \tag{87}$$

και άρα δεν είναι πραγματικό.