

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2022-23
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Πρώτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 14/2/2023

Ημερομηνία Παράδοσης: 21/2/2023, 16:00

Οι ασκήσεις με [*] είναι **bonus**, +10 μονάδες η καθεμία στο βαθμό αυτής της σειράς ασκήσεων (δηλ. μπορείτε να πάρετε μέχρι 70/60 σε αυτή τη σειρά.)

Άσκηση 1 - Μιγαδικές Εξισώσεις I

Να λυθούν οι εξισώσεις

$$(α) \frac{4 - jz}{j + 3z} = \frac{1}{2}$$

$$(β) \frac{2z + 16}{z + 5} = 3 - j$$

ως προς $z = x + jy$.

$$\text{Απ.: (α) } \frac{22}{13} - \frac{19}{13}j, \text{ (β) } -2 + 3j$$

Άσκηση 2 - Μιγαδικές Εξισώσεις II

(α) Να βρεθεί ο μιγαδικός z αν

$$(1 - 2j)(z + z^*) - (3 - j)(z - z^*) = 4 - \Im\{z\} \quad (1)$$

(β) Να βρεθούν οι τιμές των $x, y \in \mathbb{R}$ αν

$$\left(\frac{1+j}{1-j}\right)^2 = 1 + j - \frac{1}{x+jy} \quad (2)$$

$$\text{Απ.: (α) } z = \frac{3}{2} - j, \text{ (β) } (x, y) = \left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right)$$

Άσκηση 3 - Γεωμετρικοί Τόποι I

Βρείτε και σχεδιάστε τους γεωμετρικούς τόπους του z αν

$$(α) \Re\{z\} = -1$$

$$(β) \Re\{z\} = 1 - 2\Im\{z\}$$

$$(γ) \Re\{z\} = 4 + 2(\Im\{z\})^2$$

$$(δ) z^2 - (z^*)^2 = 2\Re\{z\}$$

$$(ε) |z - (2 - 3j)| = |z - 1 - j|$$

$$\text{Απ.: (α) } x = -1, \text{ (β) } x = 1 - 2y, \text{ (γ) } x = 4 + 2y^2, \text{ (δ) } x = 0, y \in \mathbb{R}, \text{ (ε) } y = \frac{1}{4}x - \frac{11}{8}$$

[*] Άσκηση 4 - Γεωμετρικοί Τόποι II

Βρείτε και σχεδιάστε τους γεωμετρικούς τόπους του z αν

$$(α) z = \frac{2k - 3j}{12 + j8k}, k \in \mathbb{R}$$

$$(β) 2z = w + \frac{1}{w}, \text{ με το γεωμετρικό τόπο του } w \text{ να είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα } 4.$$

$$\text{Απ.: (α) } z = -j\frac{1}{4}, \text{ (β) έλλειψη: } \frac{x^2}{\left(\frac{17}{8}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{15}{8}\right)^2} = 1$$

Άσκηση 5 - Ρίζες πολυωνύμων

Να βρεθούν οι τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το πολυώνυμο

$$z^2 + \kappa z + \lambda = 0 \quad (3)$$

έχει ρίζα τον μιγαδικό $z_1 = \frac{1-2j}{1+j}$,

$$\text{Απ.: } \kappa = 1, \lambda = \frac{5}{2}$$

Άσκηση 6 - Επίλυση εξισώσεων

Να λυθούν οι εξισώσεις

$$(α) z^3 = 27$$

$$(β) z - 2z^* = 1 - j$$

$$(γ) z^4 + 16 = 0$$

$$\text{Απ.: (α) } z = 3e^{j\frac{2k\pi}{3}}, k = 0, 1, 2, \text{ (β) } z = -1 - j\frac{1}{3}, \text{ (γ) } z = \pm\sqrt{2} \pm j\sqrt{2}$$

Άσκηση 7 - Euler και De Moivre

Υπολογίστε τους μιγαδικούς

$$(α) (1 + j)^{12}$$

$$(β) (2 + 2j)^4$$

$$(γ) (1 + j)^4 - (1 - j)^5$$

$$(δ) \frac{(-1 + j)^{16}}{(1 + j)^{10}}$$

$$\text{Απ.: (α) } -64, \text{ (β) } -64, \text{ (γ) } -4j, \text{ (δ) } -8j$$