

**ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς**  
**Εαρινό Εξάμηνο 2022-23**

**Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής**

**Πρώτη Σειρά Ασκήσεων - Λύσεις**

**Ασκηση 1 - Μιγαδικές Εξισώσεις I**

Έχουμε

(α)

$$\frac{4 - jz}{j + 3z} = \frac{1}{2} \iff 4 - jz = \frac{1}{2}(j + 3z) \iff 4 - j(x + jy) = \frac{1}{2}j + \frac{3}{2}(x + jy) \quad (1)$$

$$\iff 4 - jx - j^2y = \frac{1}{2}j + \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}jy \iff (4 + y) - jx = \frac{3}{2}x + j\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}y\right) \quad (2)$$

$$\iff \begin{cases} 4 + y = \frac{3}{2}x \\ -x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}y \end{cases} \iff \begin{cases} 8 + 2y = 3x \\ -2x = 1 + 3y \end{cases} \quad (3)$$

Λύνοντας το σύστημα προκύπτει  $(x, y) = (22/13, -19/13)$ , άρα ο μιγαδικός είναι ο  $z = \frac{22}{13} - j\frac{19}{13}$ .

(β)

$$\frac{2z + 16}{z + 5} = 3 - j \iff 2z + 16 = (3 - j)(z + 5) \iff 2(x + jy) + 16 = (3 - j)(x + jy + 5) \quad (4)$$

$$\iff -x + j2y + 1 = j3y - jx + y - j5 \iff (1 - x - y) + j(-y + x + 5) = 0 \quad (5)$$

$$\iff \begin{cases} 1 - x - y = 0 \\ x - y + 5 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 - y \\ y = x + 5 \end{cases} \quad (6)$$

και λύνοντας το σύστημα παίρνουμε  $(x, y) = (-2, 3)$  και άρα ο μιγαδικός είναι ο  $z = -2 + j3$ .

**Ασκηση 2 - Μιγαδικές Εξισώσεις II**

(α) Έστω  $z = x + jy$ , έχουμε

$$(1 - 2j)(z + z^*) - (3 - j)(z - z^*) = 4 - \Im\{z\} \iff (1 - 2j)2\Re\{z\} - (3 - j)j2\Im\{z\} = 4 - \Im\{z\} \quad (7)$$

$$\iff (1 - 2j)2x - (3 - j)j2y = 4 - y \quad (8)$$

$$\iff 2x - 4jx - j6y + j^22y = 4 - y \quad (9)$$

$$\iff (2x - y - 4) + j(-4x - 6y) = 0 \quad (10)$$

$$\iff \begin{cases} 2x - y = 4 \\ 2x = -3y \end{cases} \quad (11)$$

Λύνοντας το σύστημα παίρνουμε  $(x, y) = (3/2, -1)$ , οπότε  $z = \frac{3}{2} - j$ .

(β) Είναι

$$\left(\frac{1+j}{1-j}\right)^2 = 1 + j - \frac{1}{x+jy} \iff \left(\frac{(1+j)(1+j)}{|1-j|^2}\right)^2 = 1 + j - \frac{1}{x+jy} \quad (12)$$

$$\iff \frac{-4}{4} = 1 + j - \frac{1}{x+jy} \iff 2 + j = \frac{1}{x+jy} \iff (x+jy)(2+j) = 1 \quad (13)$$

$$\iff 2x + jx + j2y + j^2y = 1 \iff (2x - 1 - y) + j(x + 2y) = 0 \quad (14)$$

$$\iff \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Λύνοντας το σύστημα παίρνουμε  $(x, y) = (2/5, -1/5)$ .

### Ασκηση 3 - Γεωμετρικοί Τόποι Ι

(α)  $\Re\{z\} = -1 \iff x = -1$

Είναι κατακόρυφη ευθεία που τέμνει κάθετα το σημείο  $(-1, 0)$ .

(β)  $\Re\{z\} = 1 - 2\Im\{z\} \iff x = 1 - 2y$

Είναι η ευθεία  $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$ .

(γ)  $\Re\{z\} = 4 + 2(\Im\{z\})^2 \iff x = 4 + 2y^2$

Είναι η παραβολή  $y^2 = \frac{1}{2}x - 2$ .

(δ)  $z^2 - (z^*)^2 = 2\Re\{z\} \iff (z - z^*)(z + z^*) = 2x \iff j2y2x = 2x \iff 2x - j4xy = 0$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει

$$2x = 0$$

$$4xy = 0$$

κι έτσι έχουμε  $(x, y) = (0, y)$ . Άρα είναι όλα τα σημεία του άξονα  $y/y$ .

(ε)

$$\begin{aligned} |z - (2 - 3j)| = |z - 1 - j| &\iff |z - (2 - 3j)|^2 = |z - 1 - j|^2 \iff (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \\ &\iff x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 \iff 8y = 2x - 11 \end{aligned}$$

Είναι η ευθεία  $y = \frac{1}{4}x - \frac{11}{8}$ .

### [\*] Ασκηση 4 - Γεωμετρικοί Τόποι ΙΙ

(α)  $z = \frac{2k - 3j}{12 + j8k} = \frac{(2k - 3j)(12 - j8k)}{|12 + j8k|^2} = \frac{24k - j16k^2 - 36j - 24k}{144 + 64k^2} = \frac{-j(16k^2 + 36)}{64k^2 + 144} = -j\frac{1}{4}, k \in \Re$

(β) Αφού ο γεωμετρικός τόπος του  $w$  είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 4, τότε  $|w| = 4$ , δηλ.  $w = 4e^{j\theta}$ .

$$2z = w + \frac{1}{w} \iff z = 2e^{j\theta} + \frac{1}{8}e^{-j\theta} \iff z = 2\cos(\theta) + \frac{1}{8}\cos(\theta) + j(2\sin(\theta) - \frac{1}{8}\sin(\theta)) \quad (16)$$

$$\iff x + jy = 2\cos(\theta) + \frac{1}{8}\cos(\theta) + j(2\sin(\theta) - \frac{1}{8}\sin(\theta)) \quad (17)$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{17}{8}\cos(\theta) \\ y = \frac{15}{8}\sin(\theta) \end{cases} \quad (18)$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο και προσθέτοντας, έχουμε

$$\frac{x^2}{\left(\frac{17}{8}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{15}{8}\right)^2} = 1 \quad (19)$$

### Ασκηση 5 - Ρίζες πολυωνύμων

Το πολυώνυμο έχει δυο ρίζες και γνωρίζουμε ότι η μια είναι μιγαδική, δηλ.

$$z_1 = \frac{1 - 2j}{1 + j} = -\frac{1}{2} - j\frac{3}{2} \quad (20)$$

Αφου οι συντελεστές του πολυωνύμου είναι πραγματικοί, τότε η δεύτερη ρίζα θα είναι η συζυγής της πρώτης, δηλ.

$$z_2 = z_1^* = \frac{1+2j}{1-j} = -\frac{1}{2} + j\frac{3}{2} \quad (21)$$

Γνωρίζουμε ότι

$$z_1 + z_2 = -\kappa \quad (22)$$

$$z_1 z_2 = \lambda \quad (23)$$

δηλ.

$$z_1 + z_1^* = -\kappa \iff 2\Re\{z_1\} = -\kappa \iff 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -\kappa \iff \kappa = 1 \quad (24)$$

$$z_1 z_2 = \lambda \iff z_1 z_1^* = \lambda \iff |z_1|^2 = \lambda \iff \lambda = \frac{5}{2} \quad (25)$$

### Ασκηση 6 - Επίλυση εξισώσεων

(α) Είναι

$$z^3 = 27 \iff z^3 = 27e^{j2k\pi} \iff z = \sqrt[3]{27}e^{j\frac{2k\pi}{3}} \iff z = 3e^{j\frac{2k\pi}{3}}, \quad k = 0, 1, 2 \quad (26)$$

(β) Είναι

$$z - 2z^* = 1 - j \iff x + jy - 2x + 2jy = 1 - j \iff (-x - 1) + j(3y + 1) = 0 \iff \begin{cases} x & = -1 \\ 3y + 1 & = 0 \end{cases} \quad (27)$$

και άρα  $z = -1 - j\frac{1}{3}$ .

(γ) Είναι

$$z^4 + 16 = 0 \iff z^4 = -16 = -16e^{j2k\pi} \iff z^4 = 16e^{j(2k\pi+\pi)} \iff z = \sqrt[4]{16}e^{j\frac{2k\pi+\pi}{4}} \iff z = 2e^{j\frac{2k\pi+\pi}{4}} \quad (28)$$

που για  $k = 0, 1, 2, 3$  δίνουν  $z = \pm\sqrt{2} \pm j\sqrt{2}$ .

### Ασκηση 7 - Euler και De Moivre

$$(α) (1+j)^{12} = (\sqrt{2}e^{j\pi/4})^{12} = \sqrt{2}^{12} e^{j3\pi} = 64e^{j\pi} = -64$$

$$(β) (2+2j)^4 = 2^4(1+j)^4 = 16(\sqrt{2}e^{j\pi/4})^4 = 64e^{j\pi} = -64$$

$$(γ) (1+j)^4 - (1-j)^5 = (\sqrt{2}e^{j\pi/4})^4 - (\sqrt{2}e^{-j\pi/4})^5 = 4e^{j\pi} - 4\sqrt{2}e^{-j5\pi/4} = -4 + 4\sqrt{2}e^{-j\pi/4} = -4j$$

$$(δ) \frac{(-1+j)^{16}}{(1+j)^{10}} = \frac{(\sqrt{2}e^{j3\pi/4})^{16}}{(\sqrt{2}e^{j\pi/4})^{10}} = \sqrt{2}^6 e^{j38\pi/4} = 8e^{-j\pi/2} = -8j$$