

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2021-22

Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Έκτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 12/5/2022

Ημερομηνία Παράδοσης: 31/5/2022

Οι ασκήσεις με [*] είναι **bonus** (και κάπως απαιτητικές...), +10 μονάδες η καθεμία στο βαθμό αυτής της σειράς ασκήσεων (δηλ. μπορείτε να πάρετε μέχρι 130/80 σε αυτή τη σειρά - μια άσκηση bonus μετρά διπλή.)

Άσκηση 1 - Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες

Έστω δυο σήματα

$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right) \quad (1)$$

$$y(t) = -\text{rect}(t-1) \quad (2)$$

(α) Βρείτε τη συνάρτηση συσχέτισης $\phi_{xy}(\tau)$.

(β) Χωρίς να κάνετε ιδιαίτερες πράξεις, βρείτε τη συνάρτηση συσχέτισης $\phi_{yx}(\tau)$.

(γ) Βρείτε τη φασματικές πυκνότητες ενέργειας $\Phi_x(f)$ και $\Phi_y(f)$.

(δ) Βρείτε τις διαφασματικές πυκνότητες ενέργειας $\Phi_{xy}(f)$ και $\Phi_{yx}(f)$.

$$\text{Απ.: (α) } \phi_{xy}(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau > 3/2, \tau < -3/2 \\ \tau - 3/2, & 1/2 < \tau < 3/2 \\ -1, & -1/2 < \tau < 1/2 \\ -\tau - 3/2, & -3/2 < \tau < -1/2 \end{cases}, \quad (\delta) \Phi_{xy}(f) = -2\text{sinc}(2f)\text{sinc}(f)$$

[* x 2] Άσκηση 2 - Περιοδική αυτοσυσχέτιση (διπλό bonus)

Έστω μια περίοδος $x(t, T_0)$ ενός περιοδικού σήματος $x(t)$ η οποία περιγράφεται ως

$$x(t, T_0) = \text{rect}\left(\frac{t}{4}\right) + \text{rect}\left(\frac{t}{2}\right) \quad (3)$$

με $T_0 = 6$.

(α) Δείξτε ότι η φασματική πυκνότητα ενέργειας της μιας περιόδου $x(t, T_0)$ του περιοδικού σήματος είναι

$$\Phi_x(f, T_0) = 4\text{sinc}^2(2f) + 16\text{sinc}^2(4f) + 16\text{sinc}(2f)\text{sinc}(4f) \quad (4)$$

(β) Δείξτε ότι η περιοδική αυτοσυσχέτιση (δηλ. η αυτοσυσχέτιση του περιοδικού σήματος $x(t)$) δίνεται ως

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{6} \left[2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{tri}\left(\frac{\tau - 6k}{2}\right) + 4 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{tri}\left(\frac{\tau - 6k}{4}\right) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(\tau - 6k) \right] \quad (5)$$

με

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t < -3, t > 3 \\ 2t + 6, & -3 < t < -1 \\ 4, & -1 < t < 1 \\ 6 - 2t, & 1 < t < 3 \end{cases} \quad (6)$$

(γ') Δείξτε ότι η φασματική πυκνότητα ισχύος δίνεται ως

$$\Phi_x(f) = \frac{1}{6} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2}{3} \text{sinc}^2 \left(\frac{k}{3} \right) + \frac{8}{3} \text{sinc}^2 \left(\frac{2k}{3} \right) + \frac{8}{3} \text{sinc} \left(\frac{2k}{3} \right) \text{sinc} \left(\frac{k}{3} \right) \right) \right] \delta \left(f - \frac{k}{6} \right) \quad (7)$$

[*] Άσκηση 3 - Ενέργεια στους δυο χώρους

Δείξτε, υπολογίζοντάς τες, ότι οι τιμές

$$\phi_x(0) \quad \text{και} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) df \quad (8)$$

είναι ίδιες για το σήμα

$$x(t) = e^{-3t} \sin(3t) u(t) \quad (9)$$

Αυτή η ισοτιμία ισχύει για κάθε $x(t)$ ή μόνο για το συγκεκριμένο; Δικαιολογήστε. Σας δίνεται ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\pi^4 f^4 + 81} df = \frac{1}{54} \quad (10)$$

Άσκηση 4 - Φασματική Πυκνότητα Ισχύος

Ένα σήμα με φασματική πυκνότητα ισχύος

$$\Phi_x(f) = C \text{rect} \left(\frac{f}{2B} \right) \quad (11)$$

$C \in \mathbb{R}$, βρίσκεται στην είσοδο ενός συστήματος με απόκριση συχνότητας

$$H(f) = j2\pi f \quad (12)$$

(α') Ποιά είναι η φασματική πυκνότητα ισχύος του σήματος στην έξοδο του συστήματος;

(β') Ποιά είναι η ισχύς του σήματος στην έξοδο του συστήματος;

$$\text{Απ.: (α)} \Phi_y(f) = 4\pi^2 f^2 C \text{rect} \left(\frac{f}{2B} \right), \quad (\beta) P_y = 8\pi^2 C \frac{B^3}{3}$$

Άσκηση 5 - Φασματικές Πυκνότητες και μετασχ. Laplace

Αν $\phi_x(\tau)$ η αυτοσυσχέτιση ενός σήματος ενέργειας τότε

(α') ποιός είναι ο μετασχ. Laplace της αυτοσυσχέτισης, $\Phi_x(s)$; Εκμεταλλευτείτε τη γραφή της αυτοσυσχέτισης ως συνέλιξη.

(β') ποιό είναι το διάγραμμα πόλων-μηδενικών και το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace της αυτοσυσχέτισης, αν το σήμα $x(t)$ έχει μετασχ. Laplace $X(s)$ με διάγραμμα πόλων-μηδενικών και πεδίο σύγκλισης όπως στο Σχήμα 1;

Άσκηση 6 - Δειγματοληψία I

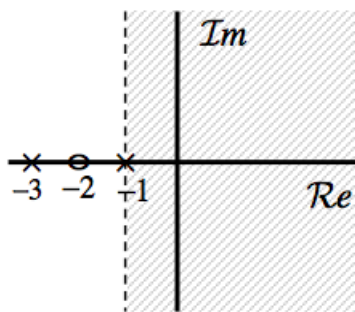
Τα ημιτονοειδή σήματα

$$x_1(t) = \cos(4\pi t) \quad (13)$$

$$x_2(t) = \cos(32\pi t) \quad (14)$$

$$x_3(t) = \cos(116\pi t) \quad (15)$$

δειγματοληπτούνται ιδανικά με συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 14$ Hz.



Σχήμα 1: Σχήμα Άσκησης 5.

- (α) Δείξτε ότι τα τρία σήματα διακριτού χρόνου $x_i[n]$, $i = 1, 2, 3$ που λαμβάνουμε είναι τα ίδια.
- (β) Γιατί συμβαίνει αυτό;
- (γ) Ποιό είναι το σήμα ανακατασκευής καθενός από τα τρία σήματα που προκύπτουν από τη δειγματοληψία;
- (δ) Ποιό από τα τρία σήματα ανακτήθηκε από τη δειγματοληπτημένη μορφή του; Γιατί συνέβη αυτό;

Άσκηση 7 - Δειγματοληψία II

Για κάθε μια συνάρτηση από τις παρακάτω, βρείτε την ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας με την οποία μπορούν να δειγματοληπτηθούν ώστε να μπορούμε να τα ανακτήσουμε πλήρως και ακριβώς από τα δείγματά τους.

- (α) $x(t) = \sin(2\pi 15t)$
- (β) $x(t) = 10 + 4 \sin(2\pi 15t) + 2 \cos(2\pi 20t)$
- (γ) $x(t) = \text{sinc}(5t - 3)$
- (δ) $x(t) = \text{sinc}^2(20t)$
- (ε) $x(t) = \cos(2\pi 10t) \text{sinc}(30t)$
- (ς) $x(t) = e^{-t} u(t) * \text{sinc}(10t)$

Άσκηση 8 - Δειγματοληψία III

Ένα ηχητικό σήμα αποτελείται από δυο τέλειους ημιτονοειδείς τόνους στα 440 Hz και στα 880 Hz. Το σήμα δειγματοληπτείται με ρυθμό f_s Hz και οδηγείται σε ένα ζευγάρι ηχεία. Βρείτε πόσοι τόνοι θα ακουστούν στα ηχεία και τις συχνότητές τους, αν

- (α) $f_s = 500$ Hz
- (β) $f_s = 2000$ Hz

Υποθέστε ότι ένας άνθρωπος μπορεί να ακούσει συχνότητες από 20 ως 20000 Hz.

Άσκηση 9 - Δειγματοληψία IV

Μια συνάρτηση x έχει φασματικό περιεχόμενο στο εύρος συχνοτήτων $|f| < 22000$ Hz. Λόγω υπερβολικού θορύβου, το τμήμα του φάσματος που αντιστοιχεί στις συχνότητες $|f| > 20000$ Hz έχει αλλοιωθεί πολύ άσχημα, πέρα από κάθε επιδιόρθωση.

- (α) Βρείτε την ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας που επιτρέπει στο μη-αλλοιωμένο τμήμα του φάσματος να ανακτηθεί πλήρως.
- (β) Έστω ότι το αλλοιωμένο τμήμα του φάσματος φιλτράρεται και απομακρύνεται πλήρως πριν τη δειγματοληψία. Σε αυτήν την περίπτωση, ποιά είναι η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας;

Άσκηση 10 - Δειγματοληψία στο MATLAB

Η δειγματοληψία στο MATLAB είναι πολύ απλή υπόθεση - ουσιαστικά σε όλες τις ασκήσεις MATLAB που κάνετε ως τώρα, χρησιμοποιούσατε δειγματοληψία χωρίς να το ξέρετε! Για παράδειγμα, ένας άξονας χρόνου της μορφής

```
t = 0:0.001:1;
```

σημαίνει ότι δειγματοληπτείτε το συνεχές διάστημα $[0, 1]$ με ρυθμό $f_s = 1/0.001 = 1000$ Hz. Φροντίζαμε εμείς για σας στις προηγούμενες σειρές ασκήσεων ώστε η συχνότητα δειγματοληψίας να είναι η κατάλληλη για τα παραδείγματα που λύνατε. Τώρα θα αναλάβετε εσείς τη διαδικασία αυτή, και θα δείτε τι αποτελέσματα έχει μια δειγματοληψία που δεν υπακούει στο θεώρημα του Shannon.

- (α) Έστω μια συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 2000$ Hz, σταθερή σε όλη την άσκηση. Άρα με αυτή τη συχνότητα μπορούμε να αναπαραστήσουμε συχνότητες μέχρι και 1000 Hz χωρίς aliasing.
- (β) Δειγματοληπτήστε με αυτή τη συχνότητα δειγματοληψίας το συνεχές διάστημα $[0, 0.05]$.
- (γ) Δημιουργήστε ένα ημίτονο των 400 Hz σε αυτό το διάστημα.
- (δ) Τυπώστε το δειγματοληπτημένο σήμα με την εντολή `stem`, η οποία λειτουργεί ακριβώς όπως η `plot`. Παραδώστε τη γραφική παράσταση.
- (ε) Ορίστε έναν άξονα f από $-f_s/2$ ως $f_s/2$ για να αναλύσετε το σήμα σας στο χώρο της συχνότητας. Το βήμα ανάλυσής σας θα είναι $\Delta f = 0.1$ Hz.
- (ς) Χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση `ctfft` (την οποία κατεβάζετε από το site του μαθήματος) για να ελέγξετε το φάσμα πλάτους του. Είναι το συχνοτικό του περιεχόμενο σωστό; Αν ναι, γιατί; Αν όχι, γιατί;
- (ζ) Δημιουργήστε ένα ημίτονο των 1200 Hz σε αυτό το διάστημα.
- (η) Τυπώστε το δειγματοληπτημένο σήμα με την εντολή `stem`. Παραδώστε τη γραφική παράσταση.
- (θ) Χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση `ctfft` για να ελέγξετε το φάσμα πλάτους του. Είναι το συχνοτικό του περιεχόμενο σωστό; Αν ναι, γιατί; Αν όχι, γιατί;

Παραδώστε κώδικα MATLAB και όποια plots σας ζητούνται στα υποερωτήματα, καθώς και τις απαντήσεις στις θεωρητικές ερωτήσεις σε ξεχωριστό χαρτί ή σε σχόλια μέσα στον κώδικα MATLAB.

[*] Άσκηση 11 - Αφαίρεση ηχούς - MATLAB

Σε προηγούμενη σειρά ασκήσεων, προσθέσατε με τη βοήθεια του MATLAB ηχώ σε μια ηχογράφηση. Ένα πολύ σημαντικό - και ακόμα ερευνητικά ενεργό - πρόβλημα στην Επεξεργασία Σήματος είναι η αφαίρεση της ηχούς - (echo cancellation) από μια ηχογράφηση. Σε αυτήν την άσκηση θα προσπαθήσουμε να αφαιρέσουμε την ηχώ με τη βοήθεια της αυτοσυσχέτισης.

- (α) Σας δίνονται δυο αρχεία της μορφής `echo-type_echo.wav`, στα οποία ξεκινά η ηχώ από ένα χρονικό σημείο. Σε καθένα από αυτά η ηχώ καθυστερεί όλο και περισσότερο, κάνοντας το αποτέλεσμα πολύ ενοχλητικό. Φορτώστε τα στο MATLAB και ακούστε τα - διαδοχικά, εκτελώντας τις εντολές ανά ζεύγος - με τις εντολές

```
[x1, fs] = audioread('medium_echo.wav');
soundsc(x1, fs);
```

```
[x2, fs] = audioread('heavy_echo.wav');
soundsc(x2, fs);
```

Στη συζήτηση που ακολουθεί θα αναφερόμαστε σε ένα αρχείο εξ' αυτών, για λόγους απλότητας. Εσείς πρέπει να επαναλάβετε τη διαδικασία που θα ακολουθήσουμε και για τα δυο.

- (β) Γνωρίζετε από άσκηση προηγούμενης σειράς ασκήσεων ότι το σύστημα που μοντελοποιεί την ηχώ δίνεται μέσω της κρουστικής απόκρισής του ως

$$h(t) = \delta(t) + a\delta(t - t_d) \quad (16)$$

του οποίου η απόκριση σε συχνότητα $H(f)$ είναι

$$H(f) = 1 + ae^{-j2\pi ft_d} \quad (17)$$

Εμείς θέλουμε ένα σύστημα που να ακυρώνει το παραπάνω σύστημα, δηλ. ένα λεγόμενο *αντίστροφο* σύστημα $h^{inv}(t)$, το οποίο αν το συνδέσουμε σε σειρά με το παραπάνω σύστημα $h(t)$ (ή αλλιώς, αν πάρουμε την έξοδο του $h(t)$ και την βάλουμε είσοδο στο $h^{inv}(t)$), θα ακυρώνει την επίδραση του $h(t)$ σε μια οποιαδήποτε είσοδο $x(t)$. Αυτή η διαδικασία περιγράφεται με όρους συστημάτων ως εξής

$$y_{final}(t) = x(t) * h(t) * h^{inv}(t) = x(t) \quad (18)$$

Από αυτήν την σχέση εύκολα βλέπουμε ότι για να ισχύει, θα πρέπει

$$h(t) * h^{inv}(t) = \delta(t) \quad (19)$$

Το αντίστροφο σύστημα μπορεί εύκολα να βρεθεί στο χώρο της συχνότητας. Έχουμε

$$h(t) * h^{inv}(t) = \delta(t) \longleftrightarrow H(f)H^{inv}(f) = 1 \quad (20)$$

και άρα

$$H^{inv}(f) = \frac{1}{H(f)} = \frac{1}{1 + ae^{-j2\pi ft_d}} \quad (21)$$

Όμως ξέρουμε ότι

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} \quad (22)$$

και άρα

$$\frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{1}{1 + ae^{-j2\pi ft_d}} \iff Y(f) + aY(f)e^{-j2\pi ft_d} = X(f) \quad (23)$$

και εύκολα βρίσκουμε, με χρήση ιδιοτήτων μετασχ. Fourier, ότι

$$y(t) + ay(t - t_d) = x(t) \quad (24)$$

Αυτό είναι λοιπόν το σύστημα που αν πάρει ως είσοδο $x(t)$ ένα σήμα με ηχώ που ξεκινά τη χρονική στιγμή t_d και έχει πλάτος ηχούς a , θα αναλάβει να την ακυρώσει, και να μας επιστρέψει ως έξοδο $y(t)$ ένα σήμα καθαρό από ηχώ!

- (γ) Όμως για να μπορέσουμε να το υλοποιήσουμε, χρειαζόμαστε να ξέρουμε πότε ξεκινά η ηχώ στο σήμα μας, δηλ. τη χρονική στιγμή t_d - αν υποθέσουμε ότι το πλάτος a της ηχούς μας είναι γνωστό¹. Παρατηρώντας το σήμα στο χρόνο, είναι αδύνατο να βρούμε πότε ξεκινά η ηχώ. Όμως, γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι η συνάρτηση αυτοσυσχετίσης

¹Φυσικά ποτέ δεν είναι, στην πράξη!

είναι μια συνάρτηση που συγκρίνει ένα σήμα με τον εαυτό του και μας βοηθά να βρούμε ομοιότητες. Επίσης γνωρίζουμε ότι η αυτοσυσχέτιση λειτουργεί συγκρίνοντας μετατοπισμένες εκδόσεις ενός σήματος με τον εαυτό του, και δίνει μεγάλες τιμές όταν υπάρχουν μεγάλες ομοιότητες.

Θα μπορούσε κανείς λοιπόν να σκεφτεί ότι η ηχώ, ως καθυστερημένο και μικρότερου πλάτους αντίγραφο του σήματος, σίγουρα θα έχει ομοιότητες με το τμήμα του σήματος που δεν έχει ηχώ (αυτό το μικρό κομμάτι στην αρχή της ηχογράφησης που ακούτε ότι είναι καθαρό - δηλ. δεν του έχει προστεθεί ηχώ γιατί ακόμα δεν έχει φτάσει στο μικρόφωνο). Οπότε αν εκτελέσουμε την πράξη της αυτοσυσχέτισης, σίγουρα θα βρούμε μια υψηλή τιμή της όταν το κομμάτι του σήματος πριν αρχίσει η ηχώ συμπέσει με το κομμάτι του σήματος που αρχίζει η ηχώ. Πότε συμβαίνει αυτό όμως; Μα φυσικά τη χρονική στιγμή t_d !

- (δ) Η συνάρτηση `xcorr` του MATLAB υπολογίζει την αυτοσυσχέτιση δυο (διακριτού χρόνου) σημάτων, και επιστρέφει τις τιμές της αυτοσυσχέτισης για τις διάφορες μετατοπίσεις τ . Γράψτε `doc xcorr` για να δείτε το documentation, και χρησιμοποιήστε τη για να βρείτε το αποτέλεσμα της αυτοσυσχέτισης. Μια και οι ηχογραφήσεις που σας δίνονται είναι σήματα διακριτού χρόνου (όταν τα φορτώνετε στο MATLAB/Octave), μπορείτε να τη χρησιμοποιήσετε κατευθείαν, χωρίς προσεγγίσεις συνεχούς χρόνου. Χρησιμοποιήστε τη σύνταξη της `xcorr` που επιστρέφει δυο ορίσματα: την αυτοσυσχέτιση και τον άξονα του χρόνου (`lags`).
- (ε) Κάντε `plot` τη γραφική παράσταση της αυτοσυσχέτισης συναρτήσει των `lags`. Αναζητήστε (οπτικά) κάποιο ισχυρό `peak`, που να ξεχωρίζει από τα άλλα, για κάποια **θετική** χρονική στιγμή. Χρησιμοποιήστε τον Data Cursor για να βρείτε τη χρονική στιγμή αυτού του ισχυρού `peak`. Θα χρειαστεί να κάνετε μεγέθυνση κοντά στην αρχή των αξόνων. Αυτή είναι η χρονική στιγμή t_d της ηχούς!
- (ς) Η συχνότητα δειγματοληψίας του σήματος είναι $f_s = 16000$ Hz. Αυτό σημαίνει ότι σε ένα δευτερόλεπτο ήχου, έχουν καταγραφεί στον υπολογιστή 16000 δείγματα-τιμές του αναλογικού σήματος που ακούτε. Σε ποιο δείγμα n_d αντιστοιχεί η χρονική στιγμή t_d που βρήκατε;

(ζ) Το σύστημα

$$y(t) + ay(t - t_d) = x(t) \quad (25)$$

είναι ένα *αναδρομικό* σύστημα συνεχούς χρόνου. Όμως εσείς έχετε τιμές του σήματος εισόδου $x(t)$ για κάποιες χρονικές στιγμές (16000 τιμές ανά ένα δευτερόλεπτο), άρα το σήμα σας είναι διακριτού χρόνου. Άρα για να υλοποιήσουμε το σύστημα αυτό στο MATLAB, το μετατρέπουμε σε διακριτού χρόνου σύστημα ως

$$y(n) + ay(n - n_d) = x(n) \iff y(n) = x(n) - ay(n - n_d) \quad (26)$$

όπου n είναι ακέραιοι αριθμοί, $x(n)$ είναι ο πίνακας - διάνυσμα της ηχογράφησης που έχετε (με ηχώ), $y(n)$ ένας πίνακας - διάνυσμα που θα παράξετε και θα περιέχει το καθαρό σήμα, και n_d η χρονική στιγμή σε δείγματα που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα.

- (η) Χρησιμοποιήστε ένα βρόχο επανάληψης για να υλοποιήσετε το παραπάνω σύστημα. Θεωρήστε ότι $y(n) = 0$, $n < n_d$ και ότι το πλάτος της ηχούς, a , είναι $a = 0.5$. Θυμηθείτε ότι η αρίθμηση των πινάκων στο MATLAB ξεκινά από το 1 (ένα). Ενδεικτικός σκελετός παρατίθεται παρακάτω:

```
N = length(shma_me_hxw); % Diarkeia shmatos me hxw (se deigmata)
nd = % INSERT CODE HERE % To nd pou brhkate
a = 0.5; % To platos ths hxous
y = zeros(1, N); % Arxikopoihsh (san th calloc sth C)
for n = nd+1:N % Broxos opou ylopoieite to systhma
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
% INSERT CODE HERE %
%%%%%%%%%%
end
```

(9) Υλοποιήστε τη διαδικασία και για τα δυο σήματα που σας δίνονται. Ακούστε το αποτέλεσμα και σχολιάστε.

Παραδώστε κώδικα MATLAB που να καθαρίζει την ηχώ και από τα δυο σήματα.

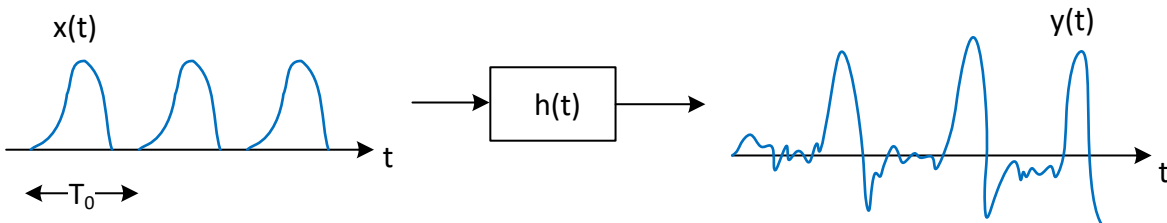
[*] Άσκηση 12 - Εύρεση θεμελιώδους συχνότητας στην ανθρώπινη φωνή - MATLAB

Ένα πολύ σημαντικό - και ερευνητικά ενεργό - πρόβλημα στην επεξεργασία σήματος φωνής είναι η ακριβής εκτίμηση της θεμελιώδους συχνότητας f_0 της ανθρώπινης φωνής, καθώς η θεμελιώδης συχνότητα χρησιμοποιείται σε πολλές εφαρμογές, όπως για παράδειγμα στη σύνθεση ομιλίας από κείμενο (text-to-speech synthesis). Μια απλή τέτοια μέθοδος εκτίμησης είναι η μέθοδος της αυτοσυσχέτισης, που δίνεται ως γνωστόν ως

$$\phi_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau)dt$$

Ας πούμε όμως μερικές ενδιαφέρουσες λεπτομέρειες πριν περάσουμε στην άσκηση.

Η ανθρώπινη φωνή - και συγκεκριμένα, ο έμφωνος λόγος - μπορεί να παρασταθεί ως ένα σύστημα $h(t)$, που στην είσοδό του υπάρχει ενέργεια (προερχόμενη από τους πνεύμονες) σε μορφή μιας περιοδικής σειράς από παλμούς, $x(t)$, η οποία καθορίζεται από τις φωνητικές χορδές, όπως στο Σχήμα 2. Πληροφοριακά και μόνο, το σήμα $x(t)$ αντιπροσωπεύει την ταχύτητα ροής του αέρα ακριβώς επάνω από τις φωνητικές μας χορδές. Η είσοδος αυτή περνά



Σχήμα 2: Μοντέλο παραγωγής φωνής.

σε ένα σύστημα $h(t)$, το οποίο περιγράφει τη φωνητική μας οδό, δηλ. τη θέση του στόματος, της γλώσσας, και των δοντιών, ανάλογα με το φώνημα που θέλουμε να εκφέρουμε. Το σύστημα $h(t)$ λειτουργεί σαν φίλτρο, που ενισχύει ή καταστέλλει συγκεκριμένες συχνότητες του σήματος εισόδου $x(t)$. Η έξοδος αυτού του συστήματος $y(t)$, είναι το σήμα φωνής που παράγεται, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2, και αντιπροσωπεύει την πίεση των μορίων του αέρα ακριβώς έξω από το στόμα μας.

Η απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών παλμών της εισόδου $x(t)$ ονομάζεται *περίοδος* T_0 του σήματος εισόδου. Ο λόγος $f_0 = \frac{1}{T_0}$ ονομάζεται θεμελιώδης συχνότητα της φωνής μας, και αντιπροσωπεύει το ρυθμό με τον οποίο ανοιγοκλείνουν οι φωνητικές μας χορδές. Ένα άνοιγμα και κλείσιμο των φωνητικών χορδών αντιστοιχεί σε ένα παλμό του σήματος $x(t)$, όπως το βλέπετε στο Σχήμα 2. Βλέπετε ότι η περιοδικότητα των φωνητικών χορδών διατηρείται και στο τελικό σήμα φωνής. Παρόλο που καταλαβαίνετε ότι τα σήματα δεν είναι αυστηρώς περιοδικά, μπορούμε να τα θεωρήσουμε ως τέτοια, θεωρώντας ότι συνεχίζονται επ' άπειρο, αλλά εμείς έχουμε “κόψει” ένα τμήμα τους με χρήση ενός τετραγωνικού παλμού.

Επιστρέφοντας στην άσκηση, η εκτίμηση της απόστασης T_0 , δηλ. της περιόδου, και κατά συνέπεια της θεμελιώδους συχνότητας f_0 , μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους και σε πολλούς χώρους (χρόνο, συχνότητα, άλλους). Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή μας αυτοσυσχέτιση ώστε να βρούμε ομοιότητες του σήματος της φωνής με τον εαυτό του. Οι χρονικές θέσεις ομοιότητας θα συμβαίνουν σε πολλαπλάσια της T_0 , αφού ένα τμήμα περιοδικού σήματος παρουσιάζει ομοιότητες σε πολλαπλάσια της περιόδου του. Άρα η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης περιμένουμε να παρουσιάζει τοπικά μέγιστες τιμές (δηλ. ομοιότητα) σε αυτές τις χρονικές στιγμές.

Ας δούμε πως θα υπολογίσουμε αυτήν την τιμή της θεμελιώδους συχνότητας.

- (α) Ηχογραφήστε ένα σήμα της φωνής σας όταν εκφέρετε ένα σταθερό φώνημα /α/ για περίπου τρία (3) δευτερόλεπτα. Εναλλακτικά, χρησιμοποιήστε την ηχογράφησή σας από προηγούμενη σειρά ασκήσεων.
- (β) Φορτώστε το σήμα στο MATLAB με την εντολή `[s, fs] = audioread('myvoice.wav');` .
- (γ) Κόψτε ένα τυχαίο τμήμα από τη φωνή σας, διάρκειας 40 ms. Αυτό μπορεί να γίνει ως

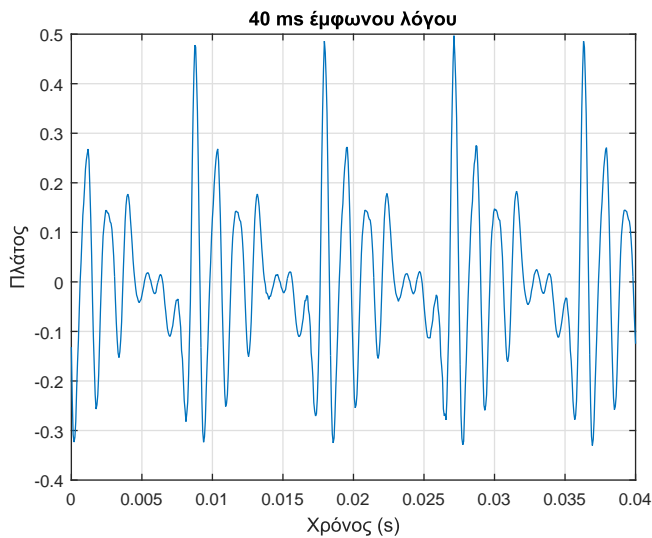
```
% As paroume ena tmhma apo th mesh tou shmatos
middle = round(length(s)/2);
```

```
% Diarkeias 40 ms
T = round(40*10^(-3)*fs);
```

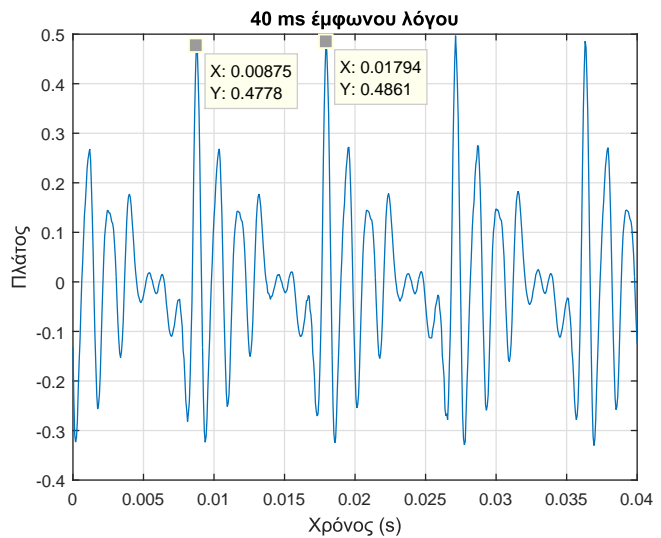
```
% Το αποθηκευουμε στο dianysma tmhma
tmhma = s(middle:(middle + T));
```

όπου εδώ κόψαμε ένα τμήμα που ξεκινούσε από τη μέση του σήματος.

- (δ) Τυπώστε τη γραφική παράσταση αυτού του τμήματος με χρήση της συνάρτησης `plot` οριζοντίας κατάλληλα τον άξονα του χρόνου. Αν το κάνετε σωστά, θα πρέπει να δείτε κάτι σαν το Σχήμα 3α'.



(α) Σήμα (ανδρικής) φωνής για το φώνημα /α/.



(β) Υπολογισμός περιόδου.

Σχήμα 3: Σήμα φωνής και περίοδος.

Οι γυναίκες θα έχουν περισσότερες περιόδους μέσα σε αυτά τα 40 ms απ' αυτές που φαίνονται στο Σχήμα 3α'. Οι άνδρες θα έχουν περίπου τέσσερις, όπως δείχνει και το σχήμα. Είναι φυσιολογικό, μην ανησυχείτε. :-) **Τυπώστε και παραδώστε ένα τμήμα του δικού σας σήματος φωνής.**

- (ε) Μετρήστε με τον Data Cursor την απόσταση μεταξύ δυο περιόδων του σήματός σας. Ένας ασφαλής τρόπος είναι να μετρήσετε την απόσταση δυο διαδοχικών μεγίστων. Για το σήμα του παραδείγματος, έχουμε τις τιμές του Σχήματος 3β'.

Βλέπετε ότι η απόσταση είναι $T_0 = 0.00919$ s. Άρα η θεμελιώδης συχνότητα f_0 είναι $f_0 = 1/T_0 = 108.8$ Hz. Ποιά η θεμελιώδης συχνότητα στο δικό σας τμήμα φωνής;

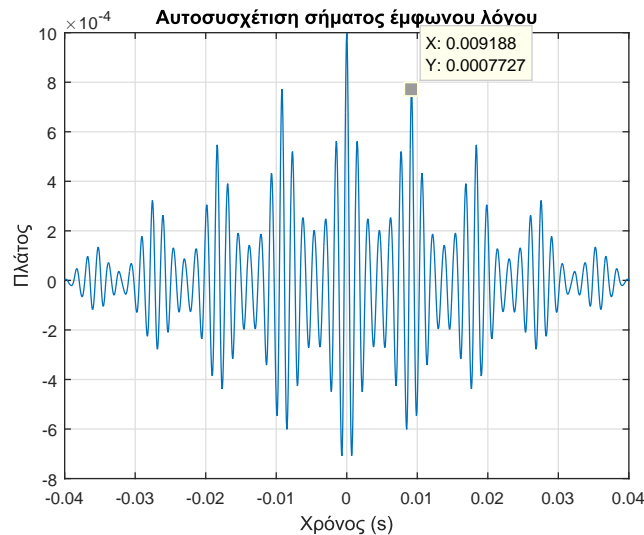
- (ς) Ας δούμε πως μπορούμε να αυτοματοποιήσουμε τη διαδικασία εύρεσης της θεμελιώδους συχνότητας. Υπολογίστε την αυτοσυσχέτιση $\phi_{xx}(\tau)$ με χρήση της συνάρτησης του MATLAB `xcorr` ως


```
% Autosysxetish
Dt = 1/fs;
r = Dt*xcorr(tmhma);

% A3onas xronou
t_r = % INSERT CODE HERE

% Grafikh parastash
plot(t_r, r);
```

Αν το κάνετε σωστά, θα πρέπει να βρείτε κάτι σαν το Σχήμα 4. **Τυπώστε και παραδώστε την αυτοσυσχέτιση του**



Σχήμα 4: Αυτοσυσχέτιση σήματος (ανδρικής) φωνής.

δικού σας σήματος φωνής.

- (ζ) Παρατηρήστε στο Σχήμα 4 ότι το πρώτο μέγιστο (πλην της τιμής $\phi_{xx}(0)$, όπου ξέρετε ότι αντιπροσωπεύει την ενέργεια του σήματος) βρίσκεται τη θετική χρονική στιγμή $\tau = 0.009188$ s. Αυτή η χρονική στιγμή είναι μια στιγμή μεγάλης ομοιότητας του σήματος με τον εαυτό του, άρα σίγουρα θα συμβαίνει όταν το $x(t + \tau)$ της αυτοσυσχέτισης έχει μετατοπιστεί κατά διάστημα τ διάρκειας μιας περιόδου. Αντίστοιχα, το δεύτερο μέγιστο βρίσκεται τη χρονική στιγμή $\tau = 0.01837$ s, όπου αντιστοιχεί σε μετατόπιση του $x(t + \tau)$ κατά διάστημα τ δυο περιόδων, κ.ο.κ.
- (η) Η θεμελιώδης συχνότητα f_0 με χρήση της τιμής του πρώτου μεγίστου είναι $f_0 = 1/0.009188 = 108.8$ Hz, που συμφωνεί με τη μέτρησή μας στην αρχική κυματομορφή.
- (θ) Όμως η μέθοδος της αυτοσυσχέτισης, όπως τη δείξαμε, βασίζεται ξανά σε “χειροκίνητη” εύρεση του πρώτου μεγίστου, μέσω του Data Cursor. Επίσης, παρατηρήστε ότι υπάρχουν κι άλλες σημαντικές κορυφές (peaks) πριν το πρώτο μέγιστο που επιλέξαμε. Πώς θα επιλέξουμε αυτόματα το σωστό peak;

Γράψτε κώδικα MATLAB που χρησιμοποιεί τη συνάρτηση `max` του MATLAB και βρίσκει το σωστό peak της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης, αν γνωρίζετε ότι τα όρια θεμελιωδών συχνοτήτων στους ενήλικες είναι στο διάστημα $[70, 280]$ Hz. Υπόδειγμα κώδικα δίνεται παρακάτω:

```
% Oria syxnothtwn
Fr_limits = [70 , 260];

% Metatroph se seconds
```

```

Time_limits = fliplr(1./Fr_limits); % Dinei [0.0035 0.0143]

% Metatroph seconds se deigmata
% Se 1 sec antistoixoun fs deigmata
% Se 0.0143 h' 0.0035 sec, posa deigmata?
Sample_limits = % INSERT CODE HERE

% Mono to 8etiko miso ths autosysxetishs mas endiaferei
middle = round(length(r)/2);

% Koboume to diasthma pou brhkame
tr_new = tr(middle + [Sample_limits(1):Sample_limits(end)]);
r_new = r(middle + [Sample_limits(1):Sample_limits(end)]);

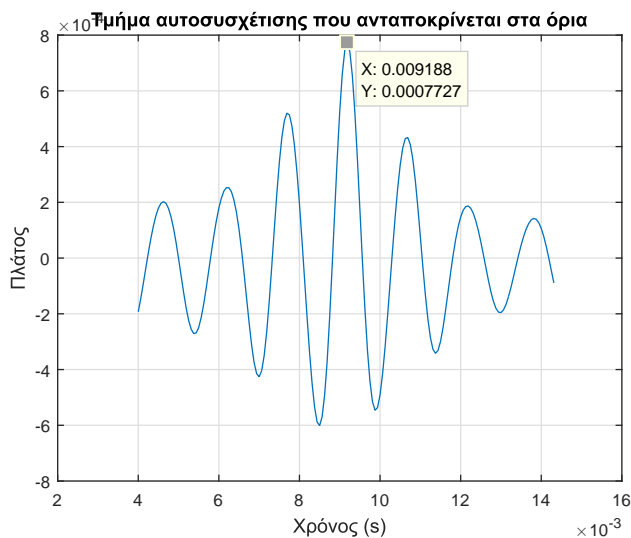
% As to doume
plot(tr_new, r_new);

% Xrhsh ths max gia na broume to megisto kai th 8esh tou
% sto do8en diasthma-tmhma ths r_new
% Grapste doc max gia na deite pws na th xeiristeite

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%          INSERT CODE HERE          %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

Αν το κάνετε σωστά, θα πρέπει να βρείτε ένα τμήμα όπως στο Σχήμα 5, και αν γράψετε σωστά τον κώδικα που λείπει, θα πρέπει να έχετε σε μια μεταβλητή τη σωστή χρονική στιγμή ($t = 0.009188$).



Σχήμα 5: Τμήμα αυτοσυσχέτισης που ανταποκρίνεται στα όρια συχνοτήτων.

(ι) Αν οι άνδρες έχουν θεμελιώδη συχνότητα ομιλίας στο διάστημα $[70, 150]$ Hz κι οι γυναίκες στο διάστημα $[180, 280]$ Hz, τότε η συχνότητα που βρήκατε εσείς ανταποκρίνεται στο σωστό διάστημα του φύλου σας;

Παραδώστε κώδικα MATLAB που να υπολογίζει αυτόματα τη θεμελιώδη συχνότητα f_0 του δικού σας σήματος φωνής, μαζί με όσα σχετικά plots ζητούνται στα υποερωτήματα παραπάνω. Γράψτε όποιες απαντήσεις ζητούνται σε σχόλια μέσα στον MATLAB κώδικα.