ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2021-22
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Λύσεις Έκτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1 - Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες

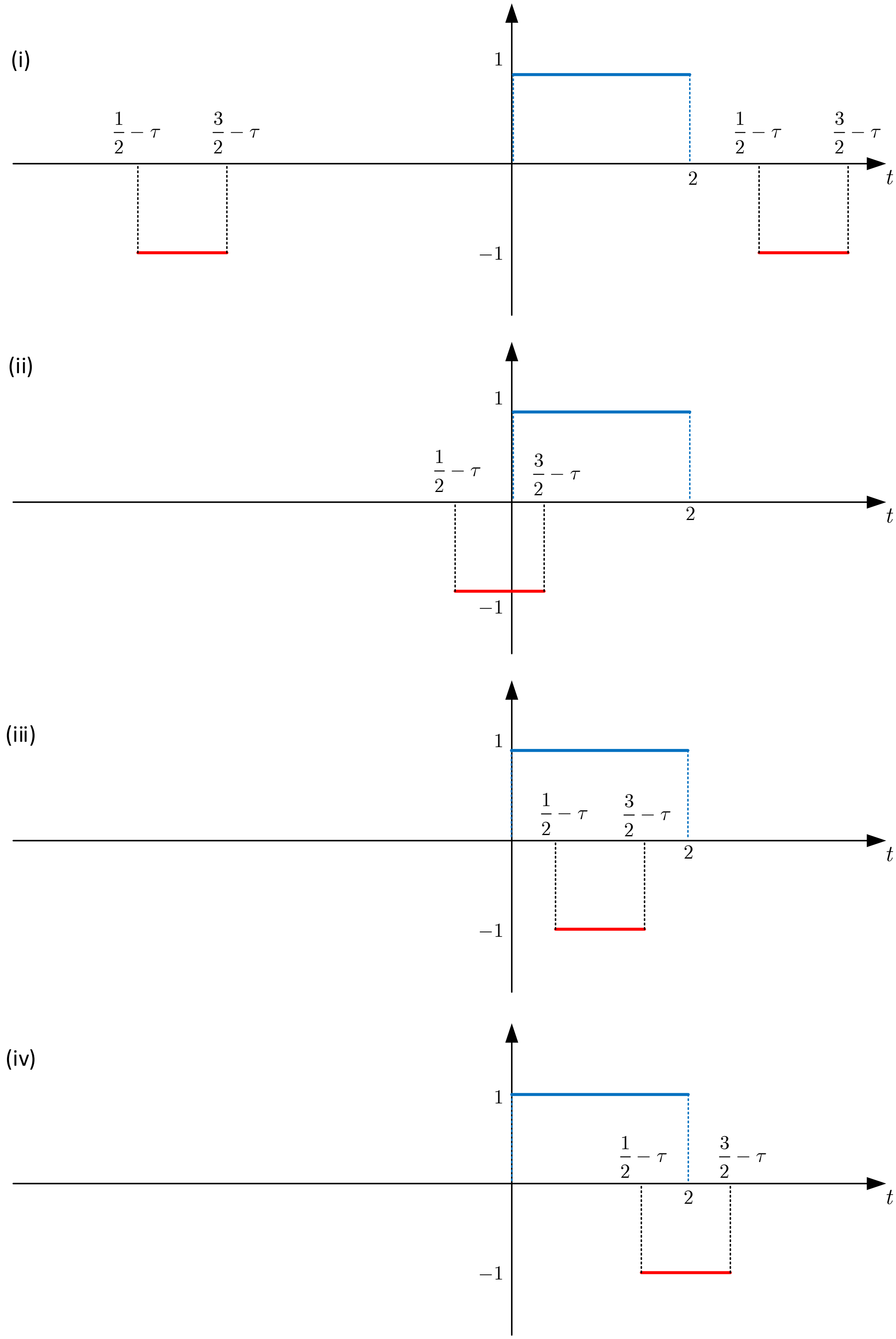
(α΄) Διακρίνουμε τις περιπτώσεις όπως στο Σχήμα 1.

- Για τις δυο τετριμμένες περιπτώσεις, είναι
$$\phi_{xy}(\tau) = 0 \tag{1}$$
για $3/2 - \tau < 0 \Longrightarrow \tau > 3/2$ και $1/2 - \tau > 2 \Longrightarrow -3/2 > \tau$.
- Είναι
$$\phi_{xy}(\tau) = \int_0^{3/2-\tau} (-1)dt = \tau - \frac{3}{2} \tag{2}$$
για $1/2 - \tau < 0$ και $3/2 - \tau > 0$, δηλ. $1/2 < \tau < 3/2$.
- Είναι
$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{1/2-\tau}^{3/2-\tau} (-1)dt = -1 \tag{3}$$
για $1/2 - \tau > 0$ και $3/2 - \tau < 2$, δηλ. $-1/2 < \tau < 1/2$.
- Είναι
$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{1/2-\tau}^{2} (-1)dt = -\tau - \frac{3}{2} \tag{4}$$
για $1/2 - \tau < 2$ και $3/2 - \tau > 2$, δηλ. $-3/2 < \tau < -1/2$.

Αρα συνολικά
$$\phi_{xy}(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau > 3/2,\ \tau < -3/2 \\ \tau - 3/2, & 1/2 < \tau < 3/2 \\ -1, & -1/2 < \tau < 1/2 \\ -\tau - 3/2, & -3/2 < \tau < -1/2 \end{cases} \tag{5}$$

(β΄) Ξέρουμε ότι
$$\phi_{yx}(\tau) = \phi_{xy}(-\tau) \tag{6}$$
και άρα
$$\phi_{yx}(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < -3/2,\ \tau > 3/2 \\ -\tau - 3/2, & -3/2 < \tau < -1/2 \\ -1, & -1/2 < \tau < 1/2 \\ \tau - 3/2, & 1/2 < \tau < 3/2 \end{cases} \tag{7}$$

(γ΄) Είναι
$$\Phi_x(f) = |X(f)|^2 = |2\text{sinc}(2f)e^{-j2\pi f}|^2 = 4\text{sinc}^2(2f) \tag{8}$$
και
$$\Phi_y(f) = |Y(f)|^2 = |-\text{sinc}(f)e^{-j2\pi f}|^2 = \text{sinc}^2(f) \tag{9}$$



Σχήμα 1: *Σχήμα Ασκησης 1.*

(δ΄) Είναι

$$\Phi_{xy}(f) = X^*(f)Y(f) = -2\mathrm{sinc}(2f)\mathrm{sinc}(f) \tag{10}$$

και

$$\Phi_{yx}(f) = Y^*(f)X(f) = -2\mathrm{sinc}(2f)\mathrm{sinc}(f) \tag{11}$$

[$\star$ x 2] Άσκηση 2 - Περιοδική αυτοσυσχέτιση (διπλό bonus)

(α΄) Η φασματική πυκνότητα *ενέργειας* της *μιας περιόδου* $x(t, T_0)$ του περιοδικού σήματος είναι

$$\begin{aligned}
\Phi_x(f, T_0) = F\{\phi_x(t, T_0)\} = |X(f, T_0)|^2 &= \left| F\left\{ \mathrm{rect}\left(\frac{t}{4}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right) \right\} \right|^2 && (12)\\
&= |4\mathrm{sinc}(4f) + 2\mathrm{sinc}(2f)|^2 && (13)\\
&= 4\mathrm{sinc}^2(2f) + 16\mathrm{sinc}^2(4f) + 16\mathrm{sinc}(2f)\mathrm{sinc}(4f) && (14)
\end{aligned}$$

(β΄) Η *περιοδική* αυτοσυσχέτιση δίνεται ως

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0}\phi_x(\tau, T_0) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - kT_0) = \frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_x(\tau - kT_0, T_0) \tag{15}$$

με $\phi_x(\tau, T_0)$ την αυτοσυσχέτιση μιας περιόδου του περιοδικού σήματος. Η τελευταία θα είναι

$$\begin{aligned}
\phi_x(\tau, T_0) = F^{-1}\{\Phi_x(f, T_0)\} &= F^{-1}\{4\mathrm{sinc}^2(2f) + 16\mathrm{sinc}^2(4f) + 16\mathrm{sinc}(2f)\mathrm{sinc}(4f)\} && (16)\\
&= F^{-1}\{4\mathrm{sinc}^2(2f)\} + F^{-1}\{16\mathrm{sinc}^2(4f)\} + F^{-1}\{16\mathrm{sinc}(2f)\mathrm{sinc}(4f)\} && (17)\\
&= 2\mathrm{tri}\left(\frac{\tau}{2}\right) + 4\mathrm{tri}\left(\frac{\tau}{4}\right) + 2F^{-1}\{2\mathrm{sinc}(2f)\} * F^{-1}\{4\mathrm{sinc}(4f)\} && (18)\\
&= 2\mathrm{tri}\left(\frac{\tau}{2}\right) + 4\mathrm{tri}\left(\frac{\tau}{4}\right) + 2\mathrm{rect}\left(\frac{\tau}{2}\right) * \mathrm{rect}\left(\frac{\tau}{4}\right) && (19)
\end{aligned}$$

Εκτελώντας τη συνέλιξη των δυο τετραγωνικών παλμών καταλήγουμε στο

$$2\mathrm{rect}\left(\frac{\tau}{2}\right) * \mathrm{rect}\left(\frac{\tau}{4}\right) = g(t) = \begin{cases} 0, & t < -3,\ t > 3 \\ 2t + 6, & -3 < t < -1 \\ 4, & -1 < t < 1 \\ 6 - 2t, & 1 < t < 3 \end{cases} \tag{20}$$

Άρα συνολικά από τη σχέση (15)

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{6}\left[2\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{tri}\left(\frac{\tau - 6k}{2}\right) + 4\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{tri}\left(\frac{\tau - 6k}{4}\right) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(\tau - 6k)\right] \tag{21}$$

με

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t < -3,\ t > 3 \\ 2t + 6, & -3 < t < -1 \\ 4, & -1 < t < 1 \\ 6 - 2t, & 1 < t < 3 \end{cases} \tag{22}$$

(γ΄) Η φασματική πυκνότητα ισχύος δίνεται ως

$$\Phi_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \delta\left(f - \frac{k}{6}\right) \tag{23}$$

Οι συντελεστές $|X_k|^2$ δίνονται ως

$$|X_k|^2 = \frac{1}{T_0^2}\Phi_x(f, T_0)\Big|_{f=k/T_0} = \frac{1}{6^2}\Phi_x(f, T_0)\Big|_{f=k/6} \tag{24}$$

και είναι

$$|X_k|^2 = \frac{1}{6^2}\left(4\text{sinc}^2(2f) + 16\text{sinc}^2(4f) + 16\text{sinc}(2f)\text{sinc}(4f)\right)\Big|_{f=k/6} \tag{25}$$

$$= \frac{1}{6^2}\left(4\text{sinc}^2\left(2\frac{k}{6}\right) + 16\text{sinc}^2\left(4\frac{k}{6}\right) + 16\text{sinc}\left(2\frac{k}{6}\right)\text{sinc}\left(4\frac{k}{6}\right)\right) \tag{26}$$

Άρα από τη σχέση (23) έχουμε

$$\Phi_x(f) = \frac{1}{6}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\text{sinc}^2\left(\frac{k}{3}\right) + \frac{8}{3}\text{sinc}^2\left(\frac{2k}{3}\right) + \frac{8}{3}\text{sinc}\left(\frac{2k}{3}\right)\text{sinc}\left(\frac{k}{3}\right)\right)\right]\delta\left(f - \frac{k}{6}\right) \tag{27}$$

[⋆] Ασκηση 3 - Ενέργεια στους δυο χώρους

Είναι

$$\phi_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-6t}\sin^2(3t)u^2(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-6t}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{j6t} - \frac{1}{4}e^{-j6t}\right)dt \tag{28}$$

$$= \int_0^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-6t}dt - \int_0^{+\infty}\frac{1}{4}e^{(j-1)6t}dt - \int_0^{+\infty}\frac{1}{4}e^{-(j+1)6t}dt = \frac{1}{12} + \frac{1}{24(j-1)} - \frac{1}{24(j+1)} \tag{29}$$

$$= \frac{1}{24} \tag{30}$$

Επίσης

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_x(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty}|X(f)|^2df = \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{3}{(3+j2\pi f)^2+9}\right|^2 df \tag{31}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{9}{324+16\pi^4f^4}df = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\frac{9}{4}}{81+4\pi^4f^4}df \tag{32}$$

$$= \frac{9}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{81+4\pi^4f^4}df = \frac{9}{4}\frac{1}{54} = \frac{1}{24} \tag{33}$$

λόγω του δοσμένου ολοκληρώματος. Αυτή η ισοτιμία ισχύει για κάθε σήμα που έχει μετασχ. Fourier, όχι μόνο για το συγκεκριμένο. Αυτό συμβαίνει γιατί η ενέργεια ενός σήματος δίνεται από το $\phi_x(0)$ γιατί

$$\phi_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau)dt\Big|_{\tau=0} = E_x \tag{34}$$

και λόγω του θεωρήματος Parseval και του ότι η φασματική πυκνότητα ενέργειας ισούται με

$$\Phi_x(f) = |X(f)|^2 \Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_x(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty}|X(f)|^2df = E_x \tag{35}$$

προκύπτει ότι η ισότητα είναι καθολική.

Ασκηση 4 - Φασματική Πυκνότητα Ισχύος

(α΄) Η φασματική πυκνότητα ισχύος του σήματος στην έξοδο του συστήματος είναι

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f)|H(f)|^2 = C\text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)|j2\pi f|^2 = C\text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)4\pi^2f^2 \tag{36}$$

(β΄) Η ισχύς του σήματος στην έξοδο του συστήματος είναι

$$P_y = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_y(f)df = \int_{-B}^{B} 4C\pi^2 f^2 df = 8\pi^2 C\frac{B^3}{3} \tag{37}$$

Άσκηση 5 - Φασματικές Πυκνότητες και μετασχ. Laplace

(α΄) Ξέρουμε ότι

$$\phi_x(\tau) = x(-\tau) * x(\tau) \tag{38}$$

οπότε

$$\Phi_x(s) = X(-s)X(s) \tag{39}$$

(β΄) Το διάγραμμα πόλων-μηδενικών είναι το σύνολο όλων των πόλων και μηδενικών των διαγραμμάτων των μετασχ. Lapace $X(s)$ και $X(-s)$. Άρα αφού το $X(s)$ έχει πόλους στο $s=-3$, $s=-1$, και μηδενικό στο $s=-2$, τότε το $X(-s)$ θα έχει πόλους στο $s=1$, $s=3$, και μηδενικό στο $s=2$.

Το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace της αυτοσυσχέτισης θα είναι η τομή των επιμέρους πεδίων σύγκλισης των $X(s)$ και $X(-s)$, δηλ.

$$R_\phi = \{\sigma > -1\} \cap \{\sigma < 1\} = \{-1 < \sigma < 1\} \tag{40}$$

Άσκηση 6 - Δειγματοληψία Ι

(α΄) Η δειγματοληψία γίνεται ως $t := nT_s = n/f_s = n/14$, άρα

$$x_1[n] = \cos(4\pi n/14) = \cos(2\pi n/7) \tag{41}$$

$$x_2[n] = \cos(32\pi n/14) = \cos\left(\frac{28\pi n + 4\pi n}{14}\right) = \cos(4\pi n/14) = \cos(2\pi n/7) \tag{42}$$

$$x_3[n] = \cos(116\pi n/14) = \cos\left(\frac{112\pi n + 4\pi n}{14}\right) = \cos(4\pi n/14) = \cos(2\pi n/7) \tag{43}$$

(β΄) Αυτό συμβαίνει γιατί παραβιάζεται το θεώρημα του Shannon για τα σήματα $x_2(t)$, $x_3(t)$, καθώς $f_{2,max} = 16$ Hz και $f_{3,max} = 58$ Hz, και $f_s < 2f_{i,max}$, $i=2,3$. Αυτό έχει ως συνέπεια να συμβεί το φαινόμενο του aliasing, καθώς το πρώτο σήμα έχει αντίγραφα του βασικού του φάσματος στις συχνότητες

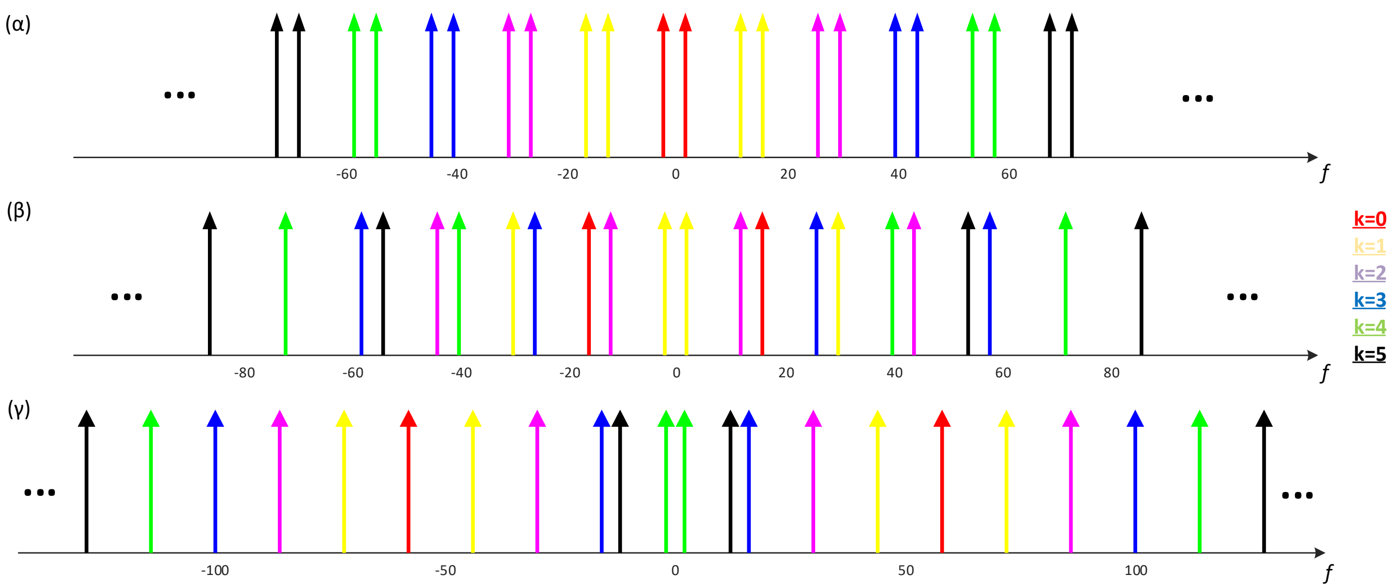
$$\{kf_s \pm 2k\} = \{14k \pm 2\}, \;\; k \in \mathrm{Z} \tag{44}$$

ενώ τα επόμενα σήματα στις συχνότητες

$$\{kf_s \pm 16\} = \{14k \pm 16\}, \;\; k \in \mathrm{Z} \tag{45}$$

$$\{kf_s \pm 58\} = \{14k \pm 58\}, \;\; k \in \mathrm{Z} \tag{46}$$

αντίστοιχα. Εύκολα μπορούμε να βρούμε ότι στο διάστημα $(-f_s/2, f_s/2) = (-7,7)$ Hz, τα δυο τελευταία σήματα έχουν συχνότητες $\{14-16, -14+16\} = \{-2,2\}$ Hz και $\{4\cdot 14 - 58,\ -4\cdot 14 + 58\} = \{-2,2\}$. Αρα το χαμηλοπερατό φίλτρο θα αποκόψει τις συχνότητες στο διάστημα $(-7,7)$, και σε όλες τις περιπτώσεις οι συχνότητες αυτές είναι οι $f_0 = \pm 2$ Hz. Δεδομένου ότι κάθε δειγματοληπτημένο σήμα είναι f_s-περιοδικό, οτιδήποτε υπάρχει στο διάστημα $(-f_s/2, f_s/2)$, επαναλαμβάνεται περιοδικά και εκτός αυτού. Άρα τα τρια δειγματοληπτημένα σήματα έχουν το ίδιο φάσμα, άρα είναι τα ίδια. Δείτε το Σχήμα 2 όπου στα υποσχήματα (α-γ) φαίνονται τα φάσματα των τριων δειγματοληπτημένων σημάτων. Το σχήμα δείχνει μόνο τα πρώτα 5 αντίγραφα του βασικού (με κόκκινο πάντα χρώμα) φάσματος, γιαύτό και τα τρια σχήματα δεν είναι ακριβώς ίδια (αν σχεδιάσουμε όλα τα αντίγραφα όπως ορίστηκαν παραπάνω, θα είναι ακριβώς ίδια - κοντά στο μηδέν όμως βλέπετε ότι είναι ταυτόσημα).



Σχήμα 2: *Σχήμα 'σκησης 6.*

(γ') Για να ανακατασκευάσουμε θέτουμε $n = tf_s = 14t$, δηλ.

$$x_1^r(t) = \cos(2\pi 14t/7) = \cos(4\pi t) \tag{47}$$
$$x_2^r(t) = \cos(2\pi 14t/7) = \cos(4\pi t) \tag{48}$$
$$x_3^r(t) = \cos(2\pi 14t/7) = \cos(4\pi t) \tag{49}$$

όπως αναμενόταν από το προηγούμενο ερώτημα.

(δ') Μόνο το $x_1(t)$ ανακτήθηκε σωστά από τη δειγματοληπτημένη μορφή του, κι αυτό γιατί δειγματοληπτήθηκε σύμφωνα με το κριτήριο του Shannon.

Άσκηση 7 - Δειγματοληψία ΙΙ

(α') $f_{s,min} = 2 \cdot 15 = 30$ Hz

(β') $f_{s,min} = 2 \cdot 20 = 40$ Hz

(γ') $f_{s,min} = 2 \cdot 2.5 = 5$ Hz γιατί

$$\text{sinc}(5t-3) \longleftrightarrow \frac{1}{5}\text{rect}(f/5)e^{-j2\pi 3f/5} \tag{50}$$

και ο παλμός έχει θετική μέγιστη συχνότητα 2.5 Hz.

(δ') $f_{s,min} = 2 \cdot 20 = 40$ Hz γιατί

$$\text{sinc}^2(20t) \longleftrightarrow \frac{1}{20}\text{tri}(f/20) \tag{51}$$

και ο παλμός έχει θετική μέγιστη συχνότητα 20 Hz.

(ε') $f_{s,min} = 2 \cdot 25 = 50$ Hz γιατί

$$\cos(2\pi 10t)\text{sinc}(30t) \longleftrightarrow \frac{1}{30}\text{rect}\left(\frac{f+10}{30}\right) + \frac{1}{30}\text{rect}\left(\frac{f-10}{30}\right) \tag{52}$$

και ο παλμός γύρω από τα 10 Hz έχει θετική μέγιστη συχνότητα 25 Hz.

(ϛ') $f_{s,min} = 2 \cdot 5 = 10$ Hz, γιατί

$$e^{-t}u(t) * \mathrm{sinc}(10t) \longleftrightarrow \frac{1}{1+j2\pi f}\frac{1}{10}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{10}\right) \tag{53}$$

και ο παλμός έχει θετική μέγιστη συχνότητα 5 Hz.

Άσκηση 8 - Δειγματοληψία III

(α') Αν $f_s = 500$ Hz, τότε παραβιάζεται το θεώρημα της δειγματοληψίας και για τους δυο τόνους, και θα έχουμε

$$\omega_1 = \frac{2\pi 440}{500} = \frac{44\pi}{25},\ \ \omega_2 = \frac{2\pi 880}{500} = \frac{88\pi}{25} \tag{54}$$

και άρα

$$x_1[n] + x_2[n] = \cos\left(\frac{44\pi n}{25}\right) + \cos\left(\frac{88\pi n}{25}\right) \tag{55}$$

$$= \cos\left(\frac{50\pi n - 6\pi n}{25}\right) + \cos\left(\frac{100\pi n - 12\pi n}{25}\right) \tag{56}$$

$$= \cos\left(\frac{6\pi n}{25}\right) + \cos\left(\frac{12\pi n}{25}\right) \tag{57}$$

Κατά την ανακατασκευή

$$x_1(t) + x_2(t) = x_1[n] + x_2[n]\Big|_{n=tf_s} = \cos\left(\frac{6\pi 500t}{25}\right) + \cos\left(\frac{12\pi 500t}{25}\right) = \cos(2\pi 60t) + \cos(2\pi 120t) \tag{58}$$

Αρα θα ακουστούν τόνοι συχνότητας 60 και 120 Hz.

(β') Αν $f_s = 2000$ Hz, τότε δεν παραβιάζεται το θεώρημα της δειγματοληψίας και για τους δυο τόνους, και θα έχουμε

$$\omega_1 = \frac{2\pi 440}{2000} = \frac{11\pi}{25},\ \ \omega_2 = \frac{2\pi 880}{2000} = \frac{22\pi}{25} \tag{59}$$

και άρα

$$x_1[n] + x_2[n] = \cos\left(\frac{11\pi n}{25}\right) + \cos\left(\frac{22\pi n}{25}\right) \tag{60}$$

Κατά την ανακατασκευή

$$x_1(t) + x_2(t) = x_1[n] + x_2[n]\Big|_{n=tf_s} = \cos\left(\frac{11\pi 2000t}{25}\right) + \cos\left(\frac{22\pi 2000t}{25}\right) = \cos(2\pi 440t) + \cos(2\pi 880t) \tag{61}$$

Αρα θα ακουστούν τόνοι συχνότητας 440 και 880 Hz.

Άσκηση 9 - Δειγματοληψία IV

(α') Η ελάχιστη τέτοια συχνότητα δειγματοληψίας είναι $f_{s,min} = 2 \cdot 20 = 40$ kHz. Αυτή η συχνότητα επιτρέπει στο αλλοιωμένο κομμάτι του φάσματος να επικαλύπτεται με τις γειτονικές του ρέπλικες, αλλά από τη στιγμή που δε μας ενδιαφέρει, ένα χαμηλοπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $f_c = f_{s,min}/2 = 20$ kHz θα αποκόψει μόνο το αναλλοίωτο κομμάτι του φάσματος.

(β') Με την ίδια λογική, αφού το αλλοιωμένο κομμάτι έχει απομακρυνθεί, η μέγιστη συχνότητα του φάσματος είναι $f_{max} = 20$ kHz, άρα η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας είναι $f_{s,min} = 2 \cdot f_{max} = 40$ kHz.

Άσκηση 10 - Δειγματοληψία στο MATLAB
Κώδικας MATLAB/Octave

[⋆] **Άσκηση 11 - Αφαίρεση ηχούς - MATLAB**
Κώδικας MATLAB/Octave

[⋆] **Άσκηση 12 - Εύρεση θεμελιώδους συχνότητας στην ανθρώπινη φωνή - MATLAB**
Κώδικας MATLAB/Octave