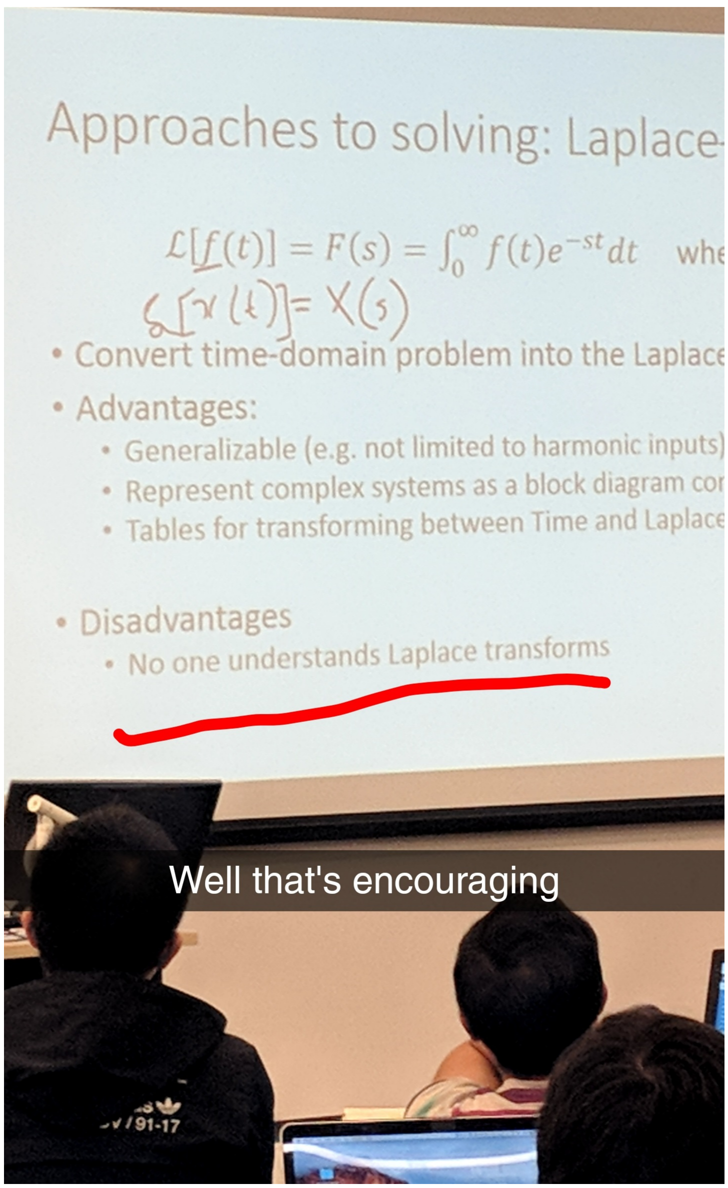
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2021-22
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Πέμπτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 14/4/2022 Ημερομηνία Παράδοσης: 3/5/2022, 15:45

Οι ασκήσεις με [⋆] είναι **bonus**, +10 μονάδες η καθεμία στο βαθμό αυτής της σειράς ασκήσεων (δηλ. μπορείτε να πάρετε μέχρι 110/80 σε αυτή τη σειρά.)



Σχήμα 1: *Αυτό δεν ισχύει για σας φυσικά... ☺!*

Άσκηση 1 - Ο μετασχηματισμός Laplace

Βρείτε τις αριθμητικές σταθερές a, b, c, d, f για τα παρακάτω ζεύγη μετασχ. Laplace. Δείξτε αναλυτικά το σκεπτικό σας.

(α') $[a\sin(bt) + c\cos(bt)]u(t) \longleftrightarrow 3\dfrac{3s+4}{s^2+9}$, $\sigma > 0$

(β') $ae^{-bt}[\sin(ct) + d\cos(ct)]u(t) \longleftrightarrow \dfrac{35s+325}{s^2+18s+85}$, $\sigma > -b$

(γ') $4e^{-at}u(t) * be^{-t/2}u(t) \longleftrightarrow \dfrac{36}{s^2+cs+3}$, $\{\sigma > -1/2\} \cap \{\sigma > -a\}$

(δ') $a\delta(t) - (be^{ct} - e^{dt})u(t) \longleftrightarrow \dfrac{3s^2}{s^2+5s+4}$, $\sigma > -1$

Άσκηση 2 - Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

Αποδείξτε τα παρακάτω ζεύγη αντίστροφου μετασχ. Laplace αποκλειστικά με χρήση ιδιοτήτων και πινάκων ζευγών μετασχηματισμού (ξεκινώντας **πάντα** από το πεδίο του μετασχ. Laplace):

(α') $X(s) = \dfrac{24}{s(s+8)}$, $\sigma > 0 \longleftrightarrow x(t) = 3(1 - e^{-8t})u(t)$

(β') $X(s) = \dfrac{20}{s^2+4s+3}$, $\sigma < -3 \longleftrightarrow x(t) = 10(e^{-3t} - e^{-t})u(-t)$

(γ') $X(s) = \dfrac{s^2}{s^2-4s+4}$, $\sigma < 2 \longleftrightarrow x(t) = \delta(t) - 4e^{2t}(t+1)u(-t)$

[⋆] Άσκηση 3 - Συνέλιξη

Με χρήση μετασχ. Laplace βρείτε τη συνέλιξη των σημάτων $x(t) = \sin(3t)u(t)$ και $y(t) = tu(t)$. Αξιοποιήστε την ιδιότητα της ολοκλήρωσης στο χρόνο *δυο φορές*.

Απ.: $c_{xy}(t) = \dfrac{1}{3}tu(t) - \dfrac{1}{9}\sin(3t)u(t)$

Άσκηση 4 - Μετασχ. Laplace και Ιδιότητες

Χρησιμοποιώντας ιδιότητες και γνωστά ζεύγη του μετασχ. Laplace, υπολογίστε τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς για τα παρακάτω σήματα του Σχήματος 2.

Απ: (α) $X(s) = \dfrac{e^{2s} - e^{s} - e^{-s} + e^{-2s}}{s^2}$, $\forall s \in \mathbb{C}$, (β) $X(s) = \dfrac{1 - e^{-s} - se^{-2s}}{s^2}$, $\forall s \in \mathbb{C}$,
(γ) $X(s) = \dfrac{1 + e^{-s} - e^{-2s} - e^{-3s}}{s}$, $\forall s \in \mathbb{C}$, (δ) $X(s) = \dfrac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s^2}$, $\forall s \in \mathbb{C}$

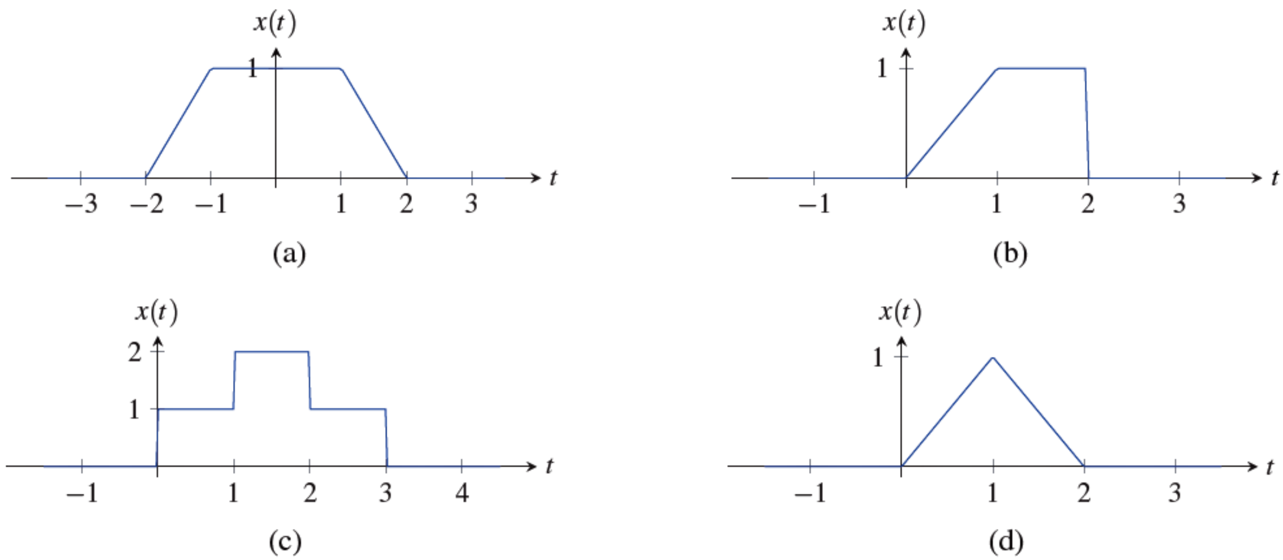
Άσκηση 5 - Μετασχ. Laplace και Συστήματα

Ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα για είσοδο $x(t) = \frac{1}{2}e^{-2t}u(t)$ επιστρέφει έξοδο

$$y(t) = \left(\frac{3}{2}e^{-2t} - e^{-3t}\right)u(t) \tag{1}$$

(α') Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος, $H(s)$.

(β') Βρείτε την κρουστική απόκριση, $h(t)$, του συστήματος.



Σχήμα 2: *Σχήματα Άσκησης 4.*

Απ.: $h(t) = \delta(t) + 2e^{-3t}u(t)$

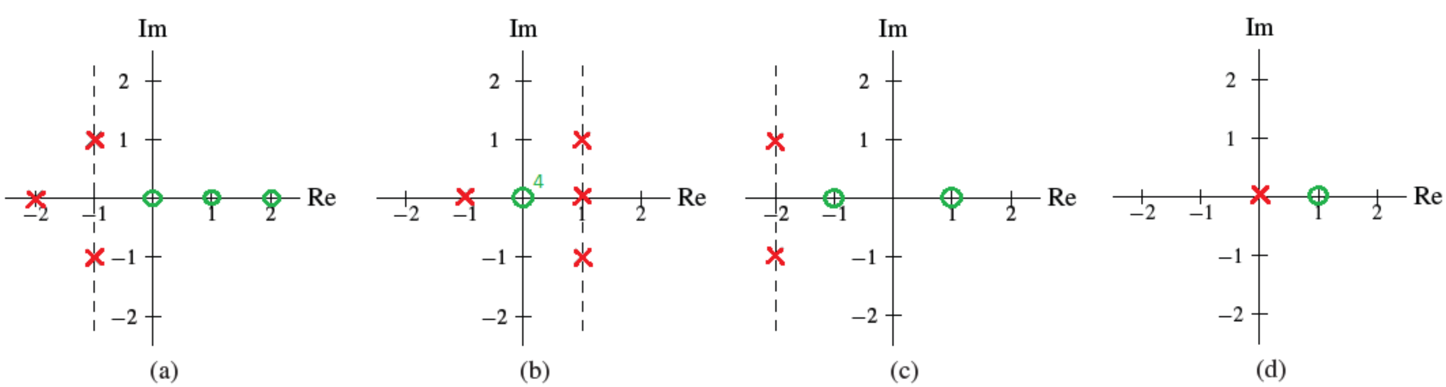
(γ΄) Μπορείτε να υπολογίσετε την απόκριση σε συχνότητα, $H(f)$, του συστήματος μέσω του μετασχ. Laplace; Αν ναι, εξηγήστε και βρείτε την. Αν όχι, εξηγήστε γιατί.

(δ΄) Βρείτε μια διαφορική εξίσωση η οποία περιγράφει το παραπάνω σύστημα $H(s)$.

Απ.: $\frac{d}{dt}y(t) + 3y(t) = \frac{d}{dt}x(t) + 5x(t)$

Άσκηση 6 - Πόλοι και Μηδενικά

Στο Σχήμα 3 βλέπετε τέσσερα διαγράμματα πόλων-μηδενικών (πόλοι με κόκκινο Χ, μηδενικά με πράσινο Ο), ένα για κάθε μια συνάρτηση μεταφοράς, $H_i(s)$, $i = a, b, c, d$. Για καθεμιά από αυτές βρείτε το πεδίο σύγκλισης



Σχήμα 3: *Διαγράμματα πόλων-μηδενικών Άσκησης 6.*

(α΄) αν θέλετε η συχνοτική απόκριση του συστήματος με κρουστική απόκριση $h_i(t)$ να υπάρχει μέσω του ορισμού της. Σε ένα διάγραμμα θα συναντήσετε "πρόβλημα". Εξηγήστε.

(β΄) αν θέλετε το $h_i(t)$ να είναι αιτιατό και στις τέσσερις περιπτώσεις.

(γ΄) αν θέλετε το $h_i(t)$ να είναι αντι-αιτιατό και στις τέσσερις περιπτώσεις.

Σε ποιά από τις τέσσερις περιπτώσεις το πεδίο σύγκλισης μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε το σύστημα να είναι αμφίπλευρο και ευσταθές; Εξηγήστε.

Άσκηση 7 - Ασύρματα Δίκτυα

Στα ασύρματα τηλεπικοινωνιακά δίκτυα, το εκπεμπόμενο σήμα διαδίδεται ταυτόχρονα μέσω πολλαπλών μονοπατιών/διαδρομών, που η καθεμιά έχει διαφορετική μήκος. Έτσι, το σήμα που λαμβάνεται μέσα από το τηλεπικοινωνιακό κανάλι (αέρας) αποτελεί ένα άθροισμα από διάφορες καθυστερημένες και ενισχυμένες/αποδυναμωμένες εκδόσεις τοου αρχικού σήματος. Ας εξετάσουμε μια απλή περίπτωση του προβλήματος αυτού.

Θεωρήστε ένα ΓΧΑ σύστημα S_1 με $h_1(t) \longleftrightarrow H_1(s)$ που μοντελοποιεί ένα ασύρματο τηλεπικοινωνιακό κανάλι, με είσοδο $x(t)$ και έξοδο $y(t)$. Υποθέστε ότι το εκπεμπόμενο σήμα $x(t)$ διαδίδεται μέσα από δυο διαδρομές. Κατά τη μια διαδρομή, το κανάλι έχει απλά καθυστέρηση $T > 0$. Κατά την άλλη διαδρομή, το σήμα λαμβάνει μια καθυστέρηση $T + \tau,\ \tau > 0$ και μια ενίσχυση/αποδυνάμωση a. Έτσι, το λαμβανόμενο σήμα θα είναι της μορφής

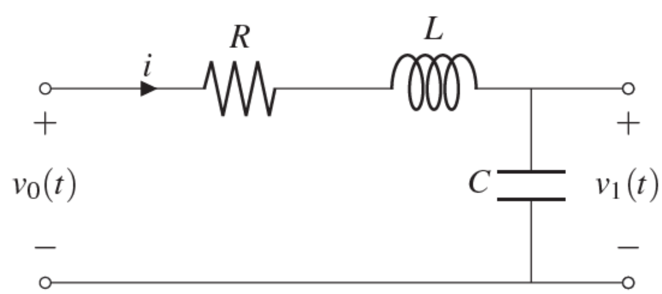
$$y(t) = x(t - T) + ax(t - T - \tau) \tag{2}$$

(α΄) Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς ενός άλλου ΓΧΑ συστήματος S_2, με $h_2(t) \longleftrightarrow H_2(s)$ που πρέπει να συνδεθεί *σειριακά* με το σύστημα του τηλεπικοινωνιακού καναλιού S_1 ώστε να ανακτηθεί στην έξοδο της σειριακής συνδεσμολογίας μόνο το καθυστερημένο κατά T σήμα, δηλ. το $x(t - T)$, χωρίς καμία άλλη μεταβολή.

(β΄) Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος S_2.

Άσκηση 8 - Ηλεκτρικά κυκλώματα και μονόπλευρος μετασχ. Laplace

Για να θυμηθούμε λίγο το ΗΥ112 - Φυσική Ι ☺... Έστω το κύκλωμα του Σχήματος 4 το οποίο θεωρούμε ότι αποτελεί σύστημα με είσοδο $x(t) = v_0(t) = u(t)$ V, η οποία αποτελεί τη διαφορά δυναμικού στα άκρα μιας πηγής του κυκλώματος. Έξοδος του κυκλώματος θεωρείται η διαφορά δυναμικού $y(t) = v_1(t))$ στα άκρα του πυκνωτή χωρητικότητας C. Έστω ότι το ρεύμα i έχει τη φορά του Σχήματος. Δε μελετήσαμε RLC κυκλώματα στο ΗΥ112



Σχήμα 4: *Κύκλωμα RLC Άσκησης 8.*

οπότε σας δίνεται έτοιμη η διαφορική εξίσωση που το περιγράφει:

$$v_0(t) = RC\frac{d}{dt}v_1(t) + LC\frac{d^2}{dt^2}v_1(t) + v_1(t) \tag{3}$$

Αν $R = 2, C = 1, L = 1$, και $v_1(0^-) = 0$, $\frac{d}{dt}v_1(t)\Big|_{t=0^-} = 1$, βρείτε την έξοδο του κυκλώματος χρησιμοποιώντας το μονόπλευρο μετασχ. Laplace.

Απ: $v_1(t) = (1 - e^{-t})u(t)$

Άσκηση 9 - Ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα στο MATLAB/Octave
Έχετε ήδη καταλάβει ότι το ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα είναι μια σωτήρια ☺ τεχνική όσον αφορά αντίστροφους μετασχηματισμούς, τόσο Fourier όσο και Laplace. Φυσικά το MATLAB/Octave δε θα μπορούσε να μην έχει την αντίστοιχη συνάρτηση για να μας διευκολύνει: `residue`. Έστω λοιπόν ότι έχουμε μια ρητή συνάρτηση του $j2\pi f$ ή του s. Η σύνταξή της εντολής για να μας κάνει το ανάπτυγμα είναι η ακόλουθη:

```
[r, p, k] = residue(B, A);
```

με `B` ένα διάνυσμα που περιέχει τους συντελεστές του πολυωνύμου του αριθμητή σε φθίνουσα σειρά και `A` ένα διάνυσμα που περιέχει τους συντελεστές του πολυωνύμου του παρονομαστή, επίσης σε φθίνουσα σειρά. Η συνάρτηση επιστρέφει τρια διανύσματα: το δίανυσμα `r` περιέχει τους αριθμητές των μερικών κλασμάτων που προκύπτουν, το διάνυσμα `r` περιέχει τους πόλους των απλών κλασμάτων, δηλ. τις ρίζες των παρονομαστών των μερικών κλασμάτων, και το διάνυσμα `k` περιέχει τυχούσες σταθερές που προκύπτουν στην περίπτωση που η ρητή συνάρτηση έχει βαθμό πολυωνύμου αριθμητή μεγαλύτερο ή ίσο με τον αντίστοιχο του παρονομαστή.

Ας δούμε ένα παράδειγμα. Έστω

$$X(s) = \frac{s^2+2s+1}{s^3-3s+2} \tag{4}$$

Ο αριθμητής έχει συντελεστές `[1, 2, 1]` και ο παρονομαστής `[1, 0, -3, 2]`, καθώς ο δευτεροβάθμιος όρος δεν υπάρχει στο πολυώνυμο του τελευταίου. Εκτελούμε λοιπόν

```
[r,p,k] = residue([1, 2, 1], [1, 0, -3, 2])
```

και το MATLAB/Octave μας αποκρίνεται

```
r =

   0.1111
   0.8889
   1.3333

p =

  -2
   1
   1

k = [](0x0)
```

Από αυτο καταλαβαίνουμε αμέσως ότι επειδή το διάνυσμα `k` είναι μηδενικό, δεν υπάρχει κάποια σταθερά στο αποτέλεσμα - λογικό κι αναμενόμενο, καθώς ο αριθμητής μας είναι δευτεροβάθμιος και ο παρονομαστής τριτοβάθμιος. Από τα υπόλοιπα, παρατηρούμε ότι μπορούμε να γράψουμε το αποτέλεσμα του αναπτύγματος ως

$$X(s) = \frac{s^2+2s+1}{s^3-3s+2} = \frac{0.11111}{s+2} + \frac{0.8889}{s-1} + \frac{1.3333}{s-1} = \frac{\frac{1}{9}}{s+2} + \frac{\frac{8}{9}}{s-1} + \frac{\frac{4}{3}}{s-1} \tag{5}$$

Δυστυχώς, το MATLAB/Octave μας αφήνει εδώ. ☺ Στη συνέχεια, ανάλογα με το πεδίο σύγκλισης, μπορούμε εμείς να γυρίσουμε τα σήματά μας πίσω στο χρόνο μέσω των γνωστών πινάκων μετασχ. Laplace.

Παραδώστε κώδικα MATLAB/Octave που υλοποιεί το ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα για τα παραδείγματα της Άσκησης 2. Για καθένα από αυτά, γράψτε σε σχόλιο στον κώδικα ποιό είναι αναλυτικά το ανάπτυγμα το οποίο σας επιστρέφει το MATLAB/Octave.

[$\star$] Άσκηση 10 - Toy-φιλτράρισμα στο MATLAB/Octave
Ας επιστρέψουμε για αυτήν την άσκηση στη θεωρία του μετασχ. Fourier...
Γνωρίζετε το περίφημο πλέον ζεύγος μετασχηματισμού Fourier

$$A\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow AT\mathrm{sinc}(fT) \tag{6}$$

Από την ιδιότητα της στάθμισης στο πεδίο του χρόνου, γνωρίζετε την επιρροή του τετραγωνικού παλμού στο χώρο του χρόνου, και πως η διάρκειά του επηρεάζει το χώρο της συχνότητας. Θα ήταν ενδιαφέρον να δούμε τη σχέση αυτή αντίστροφα, δηλ. με τον τετραγωνικό παλμό στο πεδίο της συχνότητας. Ας θεωρήσουμε λοιπόν τον τετραγωνικό παλμό στο χώρο της συχνότητας ως

$$H(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{B}\right) \tag{7}$$

και ας τον θεωρήσουμε ως ένα σύστημα, που μπορεί να δέχεται εισόδους και να παράγει εξόδους. Προφανώς, λόγω της ιδιότητας της δυικότητας, η έκφραση του συστήματος - δηλ. η *κρουστική απόκριση* - στο χώρο του χρόνου θα είναι

$$h(t) = B\mathrm{sinc}(Bt) \tag{8}$$

Ο τετραγωνικός παλμός θα λειτουργήσει ως συχνοτικό *φίλτρο*, το οποίο θα επιτρέπει τη διέλευση των συχνοτήτων που βρίσκονται εντός του διαστήματος που είναι μη μηδενικός. Το πλάτος αυτών των συχνοτήτων θα είναι μοναδιαίο. Επίσης, θα αποκόπτει τις συχνότητες που θα βρίσκονται εκτός αυτού του διαστήματος. Γιατί όμως θα έχει αυτή τη συμπεριφορά; Γιατί όπως ξέρετε (ΠΛΕΟΝ), η σχέση εισόδου-εξόδου ενός συστήματος στο χώρο της συχνότητας εκφράζεται με τη σχέση του *γινομένου* των μετασχηματισμών Fourier της εισόδου και του συστήματος. Άρα στην περίπτωσή μας, αφού ο τετραγωνικός παλμός έχει μοναδιαίο πλάτος στο διάστημα $f \in (-B/2, B/2)$ (στη συχνότητα δηλαδή!), η έξοδος στο χώρο του μετασχ. Fourier για κάθε είσοδο θα είναι.

$$Y(f) = X(f)H(f) = \begin{cases} X(f), & |f| < \frac{B}{2} \\ 0, & |f| > \frac{B}{2} \end{cases} \tag{9}$$

Ας δοκιμάσουμε το νέο φίλτρο μας.

(α') Υλοποιήστε στο MATLAB/Octave ένα σήμα ως άθροισμα από τρια ημίτονα, με συχνότητες $f_1 = 200, f_2 = 600, f_3 = 750$ Hz, με πλάτη και φάσεις που πρέπει να επιλέξετε, δηλ. το σήμα

$$x(t) = A_1\cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + A_2\cos(2\pi f_2 t + \phi_2) + A_3\cos(2\pi f_3 t + \phi_3) \tag{10}$$

στο διάστημα $t \in [-1, 1]$. Σας δίνονται οι εντολές:

```
Dt = 0.0001;
t = -1:Dt:1;
Df = 1;
f = -1500:1500;
f1 = 200;
f2 = 600;
f3 = 750;
A1 = % INSERT CODE HERE
A2 = % INSERT CODE HERE
A3 = % INSERT CODE HERE
phi1 = % INSERT CODE HERE
phi2 = % INSERT CODE HERE
phi3 = % INSERT CODE HERE
x = [A1 A2 A3]*cos(2*pi*[f1 f2 f3]'*t + [phi1 phi2 phi3]'*ones(size(t)));
```

Θέστε ως παραμέτρους A_i τα τρια πρώτα ψηφία του ΑΜ σας, προσθέτοντας τον αριθμό 1 στο καθένα. Π.χ. αν το ΑΜ σας είναι 1367 τότε $A_1 = 2$, $A_2 = 4$, $A_3 = 7$. Για τις φάσεις, επιλέξτε κάποιο υποπολλαπλάσιο του π.

(β΄) Τυπώστε και παραδώστε τα τρια γραφήματα που σας επιστρέφει η συνάρτηση `ctft` (την οποία κατεβάζετε από το site του μαθήματος) για το σήμα `x`. Γράψτε `doc ctft` για να δείτε τη σύνταξη. Οι μη μηδενικές συχνότητες βρίσκονται εκεί που θεωρητικά αναμένατε; (μη λάβετε υπόψη σας τα σφάλματα στα πλάτη του μετασχηματισμού)

(γ΄) Υλοποιήστε το φίλτρο σας στο *χρόνο*, δηλ. υλοποιήστε την κρουστική απόκριση $h(t)$. Το MATLAB/Octave έχει έτοιμη συνάρτηση `sinc`. Για να την υλοποιήσετε, χρειάζεστε την παράμετρο B:

   i. Βρείτε στο χαρτί και ορίστε την παράμετρο B να είναι τέτοια ώστε αν δοθεί στο σύστημα η είσοδος `x` που δημιουργήσατε, να μένει στην έξοδο μόνο το ημίτονο των 200 Hz. Εφαρμόστε το φίλτρο στο σήμα σας με χρήση της συνάρτησης `conv`, που πραγματοποιεί τη συνέλιξη μεταξύ των δυο σημάτων που δέχεται ως όρισμα. Για σήματα συνεχούς χρόνου η συνέλιξη υλοποιείται ως `y = Dt*conv(x,h);` . Τυπώστε και παραδώστε τα γραφήματα της εξόδου `y`, με χρήση της `ctft`. Ακούστε το αποτέλεσμα με την εντολή `soundsc(y,1/Dt);` .

   ii. Επαναλάβατε όλα τα παραπάνω με B τέτοιο ώστε να μένουν στην έξοδο μόνο τα ημίτονα των 200 και 600 Hz.

   iii. Επαναλάβατε όλα τα παραπάνω με B τέτοιο ώστε να μένουν όλα τα ημίτονα στην έξοδο.

   iv. Επαναλάβατε όλα τα παραπάνω με B τέτοιο ώστε να μη μένει κανένα ημίτονο στην έξοδο! Παρατηρείτε κάτι περίεργο στο φάσμα πλάτους; Εξηγήστε, προσέχοντας την κλίμακα πλάτους του μετασχηματισμού.

(δ΄) Υλοποιήστε το φίλτρο σας στη *συχνότητα*, δηλ. αντι να κάνετε συνέλιξη στο χρόνο υλοποιήστε το ισοδύναμό της στη συχνότητα, δηλ. το *γινόμενο* των μετασχηματισμών Fourier! Η συνάρτηση `ctft` επιστρέφει ως όρισμα εξόδου το μετασχηματισμό Fourier του σήματος που της δίνετε. Χρησιμοποιήστε τον τελεστή `.*` του MATLAB/Octave για να υλοποιήσετε το γινόμενο των μετασχηματισμών. Παραδώστε *μόνο* τον κώδικα που υλοποιεί το φιλτράρισμα στη συχνότητα για κάθε περίπτωση από τις παραπάνω.

Παραδώστε κώδικα MATLAB/Octave που υλοποιεί τα ερωτήματα παραπάνω, όποια plots σας ζητούνται στα υποερωτήματα, καθώς και τις απαντήσεις στις θεωρητικές ερωτήσεις σε ξεχωριστό χαρτί ή σε σχόλια στον κώδικα MATLAB/Octave.

[⋆] Άσκηση 11 - Σχεδίαση ενός πραγματικού χαμηλοπερατού (lowpass) φίλτρου[1] - MATLAB/Octave

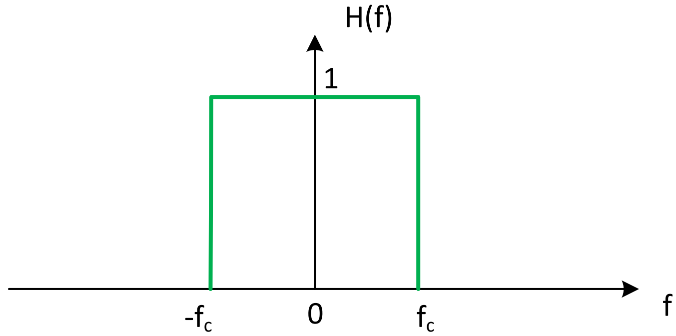
Εργάζεστε σε μια από τις πρώτες εταιρίες κινητής τηλεφωνίας, και το πόστο σας είναι "μηχανικός σχεδίασης φίλτρων". Ο προϊστάμενός σας συγκαλεί σύσκεψη στην οποία αποφασίζεται ότι εσείς πρέπει να αναπτύξετε και να σχεδιάσετε ένα σύστημα με απόκριση συχνότητας $H(f)$ για εφαρμογές επικοινωνίας φωνής, το οποίο θα αποκόπτει τις συχνότητες μεγαλύτερες από κάποιο δοθέν f_c (η οποία λέγετα *συχνότητα αποκοπής - cut-off frequency*) ενώ θα κρατά όσο γίνεται ανέπαφες τις συχνότητες μικρότερες από f_c. Τέτοια συστήματα γνωρίζετε ότι ονομάζονται *φίλτρα επιλογής συχνοτήτων*, και για αυτήν την άσκηση θα αποκαλούμε απλά ως *φίλτρο* το σύστημά μας.

Ο προϊστάμενός σας, που δε γνωρίζει θεωρία σημάτων και συστημάτων, σας παραδίδει την απόκριση συχνότητας $H(f)$ που θέλει να φτιάξετε, στο Σχήμα 5, και σας αναφέρει ότι το ζητούμενο f_c ισούται με $f_c = 2000$ Hz, αφού το φίλτρο θα ενσωματωθεί σε στρατιωτικά ασύρματα τηλεφωνικά συστήματα, όπου το εύρος ζώνης επικοινωνίας - και το κόστος λειτουργίας - είναι περιορισμένο, καθώς σημασία έχει να είναι απλά καταληπτή η επικοινωνία και όχι η ποιότητά της.

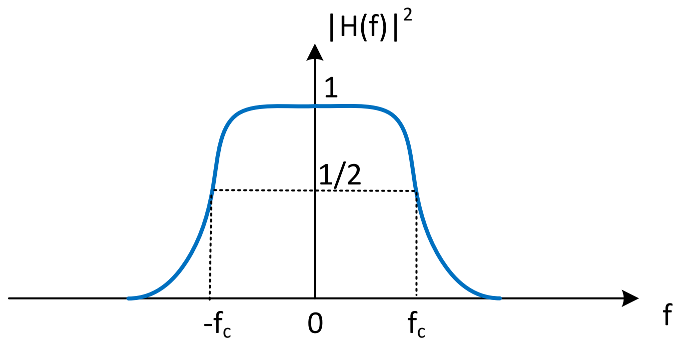
(α΄) Αποδείξτε του ότι η κρουστική απόκριση $h(t)$ του ζητούμενου φίλτρου είναι άπειρης διάρκειας και μη-αιτιατή, με αποτέλεσμα το φίλτρο που σας ζήτησε να μην είναι υλοποιήσιμο στην πράξη. **Παραδώστε αναλυτικά την απάντηση στις λύσεις σας.**

(β΄) Αφού τον πείσατε για την ορθότητα του παραπάνω ερωτήματος, σας αναθέτει να υλοποιήσετε ένα φίλτρο που να πλησιάζει όσο γίνεται αυτό που σας ζήτησε αρχικά, και να είναι υλοποιήσιμο. Στην προσπάθειά σας αυτή, ένας μαθηματικός φίλος σας αναφέρει ότι έχει υπόψη του μια συνάρτηση η οποία να πλησιάζει το ζητούμενο φίλτρο σας, και την οποία σχεδιάζει πρόχειρα στο χαρτί, όπως στο Σχήμα 6. Η συνάρτηση ονομάζεται *συνάρτηση Butterworth*. Μη έχοντας καλύτερη εναλλακτική, του ζητάτε να σας δώσει τη μαθηματική περιγραφή της συνάρτησης. Σας δίνει

[1]Οι χρήστες Octave θα χρειαστεί να φορτώσουν το πακέτο signal σε αυτήν την άσκηση.



Σχήμα 5: *Φίλτρο $H(f)$ που θέλει ο προϊστάμενος.*



Σχήμα 6: *Συνάρτηση Butterworth.*

μια περιγραφή στο χώρο της συχνότητας που βρήκε σε κάποιο μαθηματικό εγχειρίδιο, ως

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{j2\pi f}{j2\pi f_c}\right)^{2N}} \tag{11}$$

με N την τάξη της συνάρτησης, όπως σας ανέφερε. Μετατρέψτε τη συνάρτηση αυτή στο χώρο του μετασχ. Laplace (βρείτε δηλ. το $|H(s)|^2$) θέτοντας $s = j2\pi f$. **Παραδώστε αναλυτικά την απάντηση στις λύσεις σας.**

(γ') Θέλετε να μελετήσετε τη συμπεριφορά του φίλτρου - όπως το ονομάζετε πλέον - Butterworth, για να το κατανοήσετε καλύτερα. Βρείτε και σχεδιάστε τους πόλους του $|H(s)|^2$ στο s-επίπεδο. Για ευκολία, πολλαπλασιάστε την απάντησή σας στο προηγ. ερώτημα σε αριθμητή και παρονομαστή με το $(j2\pi f_c)^{2N}$ και βρείτε τις ρίζες του παρονομαστή, χρησιμοποιώντας τη μεθοδολογία του De Moivre από την πρώτη κιόλας διάλεξη. **Παραδώστε αναλυτικά την απάντηση στις λύσεις σας.**

Απ.: $s_k = 2\pi f_c e^{j\pi\frac{2k+N-1}{2N}},\ \ k = 0, 1, 2, \cdots, 2N-1$

(δ') Γνωρίζετε από τη θεωρία σας ότι επειδή το φίλτρο σας είναι πραγματικό σήμα στο χρόνο, θα ισχύει

$$|H(f)|^2 = H(f)H^*(f) = H(f)H(-f) = H(s)H(-s)\Big|_{s=j2\pi f} \tag{12}$$

Άρα οι πόλοι που βρήκατε νωρίτερα ανήκουν στο σύστημα $H(s)H(-s)$. Καταλαβαίνετε ότι κάποιοι πόλοι από αυτούς θα ανήκουν στο $H(s)$ και οι υπόλοιποι στο $H(-s)$. Σχεδιάστε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών του $H(s)H(-s)$ κι επιλέξτε από τους πόλους που σχεδιάσατε ένα υποσύνολο πόλων ώστε το σύστημα που θα προκύψει από αυτούς να είναι *ευσταθές και αιτιατό*. Προσέξτε ότι αν s_p είναι ένας πόλος του $H(s)$, τότε ο $-s_p$ είναι αναγκαστικά πόλος του $H(-s)$. **Παραδώστε αναλυτικά την απάντηση στις λύσεις σας.**

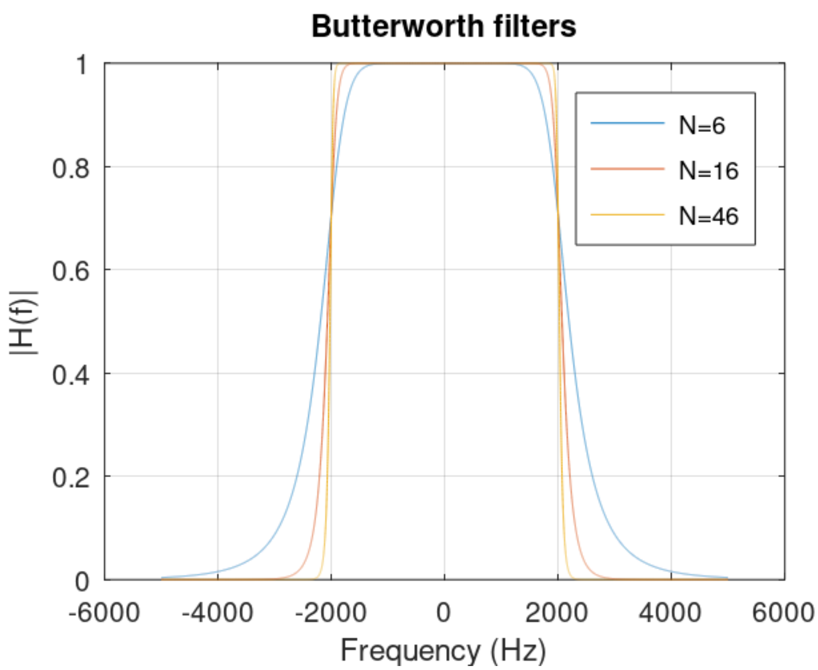
(ε') Προσέξτε επίσης ότι $H(s)H(-s)\Big|_{s=0} = 1$. Υπολογίστε το $H(s)$ για $N = 1$ και $N = 2$. **Παραδώστε αναλυτικά την απάντηση στις λύσεις σας.**

Απ.: $H_{N=1}(s) = \dfrac{2\pi f_c}{s + 2\pi f_c}, \;\; H_{N=2}(s) = \dfrac{(2\pi f_c)^2}{(s - 2\pi f_c e^{j3\pi/4})(s - 2\pi f_c e^{j5\pi/4})}$

(ϛ΄) Βρείτε τη διαφορική εξίσωση *τρίτης τάξης* που περιγράφει ένα φίλτρο Butterworth με συχνότητα αποκοπής $f_c = \frac{1}{2\pi}$ Hz. **Παραδώστε αναλυτικά την απάντηση στις λύσεις σας.**

Απ.: $\dfrac{d^3}{dt^3}y(t) + 2\dfrac{d^2}{dt^2}y(t) + 2\dfrac{d}{dt}y(t) + y(t) = x(t)$

(ζ) Υλοποιήστε στο MATLAB/Octave την απόκριση πλάτους $|H(f)|$ του φίλτρου για $f_c = 2000$ Hz, δειγματοληπτώντας έναν άξονα συχνοτήτων $[-5000, 5000]$ ανά $Df = 1$ Hz, για $N = 6$, $N = 16$, και $N = 46$. Η εντολή `plot` θα σας δώσει, ως γνωστόν, τη γραφική παράσταση. Χρησιμοποιήστε την εντολή `hold on` για να τυπώσετε το ένα πάνω στο άλλο, και να παραδώσετε μαζί εκτυπωμένα τα φίλτρα σας. Η συνάρτηση `legend` θα σας βοηθήσει να κάνετε το γράφημά σας πιο περιγραφικό. Περιγράψτε τι επιρροή έχει η τάξη N του φίλτρου στο φάσμα πλάτους του γενικά, και γύρω από τη συχνότητα f_c ειδικά. Αν τα κάνετε όλα σωστά, θα πάρετε μια εικόνα όπως στο Σχήμα 7.



Σχήμα 7: *Φάσμα πλάτους φίλτρων Butterworth για διάφορα N.*

(η΄) Προτού παραδώσετε το φίλτρο σας στον προϊστάμενό σας ώστε να υλοποιηθεί σε κύκλωμα, θέλετε να βεβαιωθείτε ότι λειτουργεί όπως πρέπει, εξομοιώνοντάς το στο MATLAB/Octave και βάζοντας ως είσοδο μια τυπική στρατιωτική διαταγή, δωρεά του Υπουργείου Άμυνας. Θα τη βρείτε στο αρχείο military.wav, στο site του μαθήματος.

Φορτώστε το αρχείο στο MATLAB/Octave με τη - γνωστή πια - εντολή `audioread` (ή την `wavread`, αν έχετε πιο παλιά έκδοση του MATLAB/Octave). Η συνάρτηση `butter` υλοποιεί ένα χαμηλοπερατό φίλτρο Butterworth με τάξη N την οποία παρέχετε εσείς ως όρισμα, όπως και τη συχνότητα αποκοπής f_c, και επιστρέφει τα μηδενικά, τους πόλους, και το κέρδος (δηλ. τη σταθερά του αριθμητή) του φίλτρου $H(s)$. Με άλλα λόγια, δε μας δίνει απευθείας τη μορφή του $H(s)$, αλλά μας δίνει ό,τι χρειαζόμαστε για να το φτιάξουμε.

Τα παραπάνω γίνονται με τις εντολές

```
f = 2000;
N = 16;
[z, p, k] = butter(N, 2*pi*f, 's');
```

όπου το όρισμα `s` δηλώνει στη συνάρτηση ότι το φίλτρο μας αντιστοιχεί σε σύστημα $h(t)$ συνεχούς χρόνου.

(θʹ) Στη συνέχεια, πρέπει από τους πόλους, τα μηδενικά, και το κέρδος, να γράψουμε το φίλτρο ως λόγο πολυωνύμων $H(s) = N(s)/D(s)$ ώστε να το χρησιμοποιήσουμε. Αυτό γίνεται εύκολα ως

```
[B, A] = zp2tf(z, p, k);
```

όπου η συνάρτηση `zp2tf`, που είναι συντομογραφία για τη φράση Zeros+Poles to Transfer Function, μετατρέπει τα μηδενικά, τους πόλους, και το κέρδος, σε ένα λόγο πολυωνύμων του s, που φυσικά δεν είναι άλλος από τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$. Η μεταβλητή `B` περιέχει τους συντελεστές του s-πολυωνύμου του αριθμητή, ενώ η μεταβλητή `A` τους αντίστοιχους του παρονομαστή.

(ιʹ) Δείτε την απόκριση συχνότητας $H(f)$ του φίλτρου σας με χρήση των εντολών

```
W = 2*pi*[-5000:5000];
[H] = freqs(B, A, W);
subplot(211); plot(W/(2*pi), abs(H)); xlabel('Frequency (Hz)');
title('Magnitude Spectrum'); grid;
subplot(212); plot(W/(2*pi), angle(H)); xlabel('Frequency (Hz)');
title('Phase Spectrum'); grid;
```

Είναι το φάσμα πλάτους όπως περιμένατε να είναι;

(ιαʹ) Όμως ο υπολογιστής μας είναι ψηφιακός, και το σήμα military.wav που έχουμε είναι ψηφιακό. Πρέπει λοιπόν να μετατρέψουμε το φίλτρο $H(s)$ που έχουμε σε μορφή συντελεστών s-πολυωνύμου αριθμητή και παρονομαστή σε ένα *ψηφιακό* αντίστοιχό του, και να το χρησιμοποιήσουμε επάνω στο σήμα μας. Ευτυχώς για μας, κάθε αναλογικό φίλτρο μπορεί να μετατραπεί σε ψηφιακό (και ακριβέστερα, σε *διακριτού χρόνου*), με πολύ απλές τεχνικές, εκ των οποίων η απλούστερη ονομάζεται impulse invariance[2], και την οποία το MATLAB/Octave έχει έτοιμη.

```
[digital_num, digital_den] = impinvar(B, A, fs);
```

Πλέον στις μεταβλητές `digital_num` και `digital_den` έχουμε τους συντελεστές ενός ψηφιακού φίλτρου Butterworth $H_d(s)$ (που δεν περιγράφεται πλέον στο χώρο του s, δηλ. του Laplace, αλλά χάριν ευκολίας ας διατηρήσουμε το συμβολισμό).

(ιβʹ) Ας χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση `filter`, η οποία συντάσσεται ως

```
y = filter(Num, Den, x);
```

με `x` το σήμα εισόδου, και `Num, Den` τον αριθμητή και τον παρονομαστή του φίλτρου $H_d(s)$, αντίστοιχα, στη μορφή συντελεστών πολυωνύμου όπως σας επιστρέφονται από την `impinvar`. Εκτελέστε την εντολή, ακούστε το αποτέλεσμα με την εντολή `soundsc(y, fs);` και σχολιάστε το αποτέλεσμα σε σχέση με το αρχικό σήμα. Πώς θα χαρακτηρίζατε την ποιότητα του σήματος εξόδου σε σχέση με το αρχικό;

(ιγʹ) Παραδώστε ένα `plot` του τελικού σήματος, παρέα με το αρχικό σήμα.

Παραδώστε κώδικα MATLAB/Octave που εκτελεί το φιλτράρισμα επάνω στο σήμα που σας δίνεται, όποια plots και κώδικα σας ζητούνται στα υποερωτήματα, καθώς και τις απαντήσεις στις θεωρητικές ερωτήσεις σε ξεχωριστό χαρτί.

---

[2] Λεπτομέρειες στο ΗΥ370... ☺