ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2021-22
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Λύσεις Πέμπτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1 - Ο μετασχηματισμός Laplace

(α΄) Είναι

$$[a\sin(bt) + c\cos(bt)]u(t) \longleftrightarrow \frac{ab}{s^2+b^2} + \frac{cs}{s^2+b^2} = \frac{ab+cs}{s^2+b^2} = 3\frac{3s+4}{s^2+9} = \frac{9s+12}{s^2+9} \tag{1}$$

άρα

$$ab = 12,\;\; b^2 = 9,\;\; c = 9 \Longrightarrow (a,b,c) = (-4,-3,9) \text{ ή } (4,3,9) \tag{2}$$

(β΄) Είναι

$$ae^{-bt}[\sin(ct) + d\cos(ct)]u(t) \longleftrightarrow \frac{ac}{(s+b)^2+c^2} + \frac{ad(s+b)}{(s+b)^2+c^2} = \frac{ads+(ac+adb)}{(s+b)^2+c^2} = \frac{35s+325}{s^2+18s+85} \tag{3}$$

δηλ.

$$\frac{ads+(ac+adb)}{s^2+2sb+(b^2+c^2)} = \frac{35s+325}{s^2+18s+85} \tag{4}$$

Άρα

$$ad = 35,\;\; ac+adb = 325,\;\; 2b = 18,\;\; b^2+c^2 = 85 \tag{5}$$

που μας δίνουν τελικά

$$d = \pm 7,\;\; a = \pm 5,\;\; b = 9,\;\; c = \pm 2 \tag{6}$$

οπότε οι πιθανές τετράδες είναι

$$(a,b,c,d) = (5,9,2,7) \tag{7}$$
$$(a,b,c,d) = (-5,9,-2,-7) \tag{8}$$

(γ΄) Είναι

$$4e^{-at}u(t) * be^{-t/2}u(t) \longleftrightarrow \frac{4}{s+a}\frac{b}{s+\frac{1}{2}} = \frac{4b}{(s+a)(s+1/2)} = \frac{4b}{s^2+(a+\frac{1}{2})s+\frac{a}{2}} = \frac{36}{s^2+cs+3} \tag{9}$$

άρα

$$4b = 36,\;\; a+\frac{1}{2} = c,\;\; \frac{a}{2} = 3 \Longrightarrow (a,b,c) = (6,9,13/2) \tag{10}$$

(δ΄) Είναι

$$a\delta(t) - (be^{ct} - e^{dt})u(t) \longleftrightarrow a - \frac{b}{s+c} + \frac{1}{s+d} = \frac{a(s+c)(s+d) - b(s+d) + (s+c)}{(s+c)(s+d)} = \frac{3s^2}{s^2+5s+4} \tag{11}$$

δηλ.

$$\frac{a(s^2+(c+d)s+cd) - bs - bd + s + c}{s^2+(c+d)s+cd} = \frac{as^2+(a(c+d)+1-b)s+acd-bd+c}{s^2+(c+d)s+cd} = \frac{3s^2}{s^2+5s+4} \tag{12}$$

οπότε

$$a = 3,\;\; 3(c+d)+1-b = 0,\;\; 3cd-bd+c = 0,\;\; c+d = 5,\;\; cd = 4 \tag{13}$$

άρα

$$(a,b,c,d) = (3,16,4,1) \tag{14}$$

Άσκηση 2 - Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

(α΄) Είναι

$$X(s) = \frac{24}{s(s+8)},\ \sigma > 0 = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+8} \tag{15}$$

με

$$A = X(s)s\Big|_{s=0} = \frac{24}{s+8}\Big|_{s=0} = 3 \tag{16}$$

$$B = X(s)(s+8)\Big|_{s=-8} = \frac{24}{s}\Big|_{s=-8} = -3 \tag{17}$$

άρα

$$X(s) = \frac{3}{s} - \frac{3}{s+8} \tag{18}$$

κι αφού $\sigma > 0$, θα είναι

$$x(t) = 3u(t) - 3e^{-8t}u(t) = 3(1 - e^{-8t})u(t) \tag{19}$$

(β΄) Είναι

$$X(s) = \frac{20}{s^2+4s+3},\ \sigma < -3 = \frac{20}{(s+3)(s+1)} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+1} \tag{20}$$

με

$$A = X(s)(s+3)\Big|_{s=-3} = \frac{20}{s+1}\Big|_{s=-3} = -10 \tag{21}$$

$$B = X(s)(s+1)\Big|_{s=-1} = \frac{20}{s+3}\Big|_{s=-1} = 10 \tag{22}$$

άρα

$$X(s) = -10\frac{1}{s+3} + 10\frac{1}{s+1} \tag{23}$$

κι αφού $\sigma < -3$, θα είναι

$$x(t) = 10e^{-3t}u(-t) - 10e^{-t}u(-t) = 10(e^{-3t} - e^{-t})u(-t) \tag{24}$$

(γ΄) Είναι

$$X(s) = \frac{s^2}{s^2-4s+4},\ \sigma < 2 = 1 + \frac{4s-4}{(s-2)^2} = 1 + G(s) = 1 + \frac{A}{(s-2)} + \frac{B}{(s-2)^2} \tag{25}$$

με

$$A = \frac{1}{(2-1)!}\frac{d^{2-1}}{ds^{2-1}}(s-2)^2G(s)\Big|_{s=2} = 4 \tag{26}$$

$$B = G(s)(s-2)^2\Big|_{s=2} = 4s-4\Big|_{s=2} = 4 \tag{27}$$

άρα

$$X(s) = 1 + \frac{4}{s-2} + \frac{4}{(s-2)^2} \tag{28}$$

κι αφού $\sigma < 2$, θα είναι

$$x(t) = \delta(t) - 4e^{2t}u(-t) - 4te^{2t}u(-t) = \delta(t) - 4e^{2t}(1+t)u(-t) \tag{29}$$

[⋆] Άσκηση 3 - Συνέλιξη
Θα είναι

$$c_{xy}(t) = \sin(3t)u(t) * tu(t) \longleftrightarrow C_{xy}(s) = \frac{3}{s^2+9}\frac{1}{s^2} = \frac{3}{s^2(s^2+9)} \tag{30}$$

Δεν είναι καλή ιδέα να αναπτύξουμε σε μερικά κλάσματα ούτε υπάρχει έτοιμο ζεύγος στους πίνακές μας να μας βοηθήσει. Όμως

$$C_{xy}(s) = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{s}\left(\frac{3}{s^2+9}\right)\right) \tag{31}$$

Άρα από την ιδιότητα ολοκλήρωσης στο χρόνο θα έχουμε

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{z} \sin(3\tau)u(\tau)d\tau dz \tag{32}$$

Έτσι

$$\begin{aligned} c_{xy}(t) &= \int_{-\infty}^{t}\int_{0}^{z} \sin(3\tau)d\tau dz = \int_{-\infty}^{t} -\frac{1}{3}\cos(3\tau)\Big|_0^z dz & (33)\\ &= \int_{-\infty}^{t}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cos(3z)\right)u(z)dz = \int_{0}^{t}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cos(3z)\right)dz & (34)\\ &= \frac{1}{3}z\Big|_0^t - \frac{1}{3}\frac{1}{3}\sin(3z)\Big|_0^t = \frac{1}{3}(t-0) - \frac{1}{9}\left(\sin(3t)-0\right) & (35)\\ &= \frac{1}{3}t - \frac{1}{9}\sin(3t), \;\; t>0 & (36) \end{aligned}$$

Άρα

$$c_{xy}(t) = \frac{1}{3}tu(t) - \frac{1}{9}\sin(3t)u(t) \tag{37}$$

Άσκηση 4 - Μετασχ. Laplace και Ιδιότητες
Σε όλα θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της παραγώγισης/ολοκλήρωσης.

(α΄) Είναι

$$\frac{d}{dt}x(t) = \mathrm{rect}\left(t+\frac{3}{2}\right) - \mathrm{rect}\left(t-\frac{3}{2}\right) \tag{38}$$

και

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = \delta(t+2) - \delta(t+1) - \delta(t-1) + \delta(t+2) \tag{39}$$

Έτσι

$$L\left\{\frac{d^2}{dt^2}\right\} = e^{2s} - e^{s} - e^{-s} + e^{-2s} \tag{40}$$

και από ιδιότητες

$$L\left\{\frac{d^2}{dt^2}\right\} = e^{2s} - e^{s} - e^{-s} + e^{-2s} = s^2X(s) \Longrightarrow X(s) = \frac{e^{2s} - e^{s} - e^{-s} + e^{-2s}}{s^2} \tag{41}$$

με $\sigma \in \Re$, αφού το σήμα είναι πεπερασμένης διάρκειας.

(β΄) Είναι

$$\frac{d}{dt}x(t) = \mathrm{rect}\left(t-\frac{1}{2}\right) - \delta(t-2) \tag{42}$$

και

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = \delta(t) - \delta(t-1) - \frac{d}{dt}\delta(t-2) \tag{43}$$

Έτσι

$$L\left\{\frac{d^2}{dt^2}\right\} = 1 - e^{-s} - se^{-2s} \tag{44}$$

και από ιδιότητες

$$L\left\{\frac{d^2}{dt^2}\right\} = 1 - e^{-s} - se^{-2s} = s^2X(s) \Longrightarrow X(s) = \frac{1 - e^{-s} - se^{-2s}}{s^2} \tag{45}$$

με $\sigma \in \Re$, αφού το σήμα είναι πεπερασμένης διάρκειας.

(γ') Είναι

$$\frac{d}{dt}x(t) = \delta(t) + \delta(t-1) - \delta(t-2) - \delta(t-3) \tag{46}$$

Έτσι

$$L\left\{\frac{d}{dt}\right\} = 1 + e^{-s} - e^{-2s} - e^{-3s} \tag{47}$$

και από ιδιότητες

$$L\left\{\frac{d}{dt}\right\} = 1 + e^{-s} - e^{-2s} - e^{-3s} = sX(s) \Longrightarrow X(s) = \frac{1 + e^{-s} - e^{-2s} - e^{-3s}}{s} \tag{48}$$

με $\sigma \in \Re$, αφού το σήμα είναι πεπερασμένης διάρκειας.

(δ') Είναι

$$\frac{d}{dt}x(t) = \mathrm{rect}\left(t - \frac{1}{2}\right) - \mathrm{rect}\left(t - \frac{3}{2}\right) \tag{49}$$

και

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = \delta(t) - 2\delta(t-1) + \delta(t-2) \tag{50}$$

Έτσι

$$L\left\{\frac{d^2}{dt^2}\right\} = 1 - 2e^{-s} + e^{-2s} \tag{51}$$

και από ιδιότητες

$$L\left\{\frac{d^2}{dt^2}\right\} = 1 - 2e^{-s} + e^{-2s} = s^2X(s) \Longrightarrow X(s) = \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s^2} \tag{52}$$

με $\sigma \in \Re$, αφού το σήμα είναι πεπερασμένης διάρκειας.

Άσκηση 5 - Μετασχ. Laplace και Συστήματα

(α') Για τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος, $H(s)$, θα έχουμε

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{3}{2}\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}}{\frac{1}{2}\frac{1}{s+2}} = \frac{s+5}{s+3} = 1 + \frac{2}{s+3}, \ \ \sigma > -3 \tag{53}$$

με το πεδίο σύγκλισης να είναι τέτοιο για να υποστηρίζει την αιτιατότητα του συστήματος.

(β') Για την κρουστική απόκριση, $h(t)$, του συστήματος θα είναι

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\} = L^{-1}\left\{1 + \frac{2}{s+3}\right\} = \delta(t) + 2e^{-3t}u(t) \tag{54}$$

(γ') Ναι, γιατί το πεδίο σύγκλισης περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα, και αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να υπολογίσουμε το μετασχ. Fourier ως

$$H(f) = H(s)\Big|_{s=j2\pi f} = 1 + \frac{2}{j2\pi f + 3} \tag{55}$$

(δ') Μια διαφορική εξίσωση η οποία περιγράφει το παραπάνω σύστημα $H(s)$ δίνεται ως

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+5}{s+3} \Longleftrightarrow sY(s) + 3Y(s) = sX(s) + 5X(s) \tag{56}$$

και επιστρέφοντας στο χρόνο

$$\frac{d}{dt}y(t) + 3y(t) = \frac{d}{dt}x(t) + 5x(t) \tag{57}$$

Άσκηση 6 - Πόλοι και Μηδενικά

i. Για να υπάρχει η συχνοτική απόκριση μέσω του ορισμού της θα πρέπει να περιλαμβάνεται ο φανταστικός άξονας στο πεδίο σύγκλισης, άρα θα πρέπει να επιλέξουμε

(α') $\sigma > -1$

(β') $-1 < \sigma < 1$

(γ') $\sigma > -2$

Στο διάγραμμα (δ) υπάρχει πρόβλημα γιατί καμιά επιλογή πεδίου σύγκλισης δεν οδηγεί σε συμπερίληψη του φανταστικού άξονα εντός του.

ii. Θα επιλέξουμε "δεξιόπλευρο" πεδίο σύγκλισης:

(α') $\sigma > -1$

(β') $\sigma > 1$

(γ') $\sigma > -2$

(δ') $\sigma > 0$

iii. Θα επιλέξουμε "αριστερόπλευρο" πεδίο σύγκλισης:

(α') $\sigma < -2$

(β') $\sigma < -1$

(γ') $\sigma < -2$

(δ') $\sigma < 0$

Στην περίπτωση (β) μπορεί να επιλεγεί το πεδίο σύγκλισης ως $-1 < \sigma < 1$, έτσι ώστε το πεδίο σύγκλισης να είναι λωρίδα και να περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα (το τελευταίο συνεπάγεται ευστάθεια).

Άσκηση 7 - Ασύρματα Δίκτυα

(α') Θα πρέπει

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h_1(t)} \longrightarrow y(t) \longrightarrow \boxed{h_2(t)} \longrightarrow x(t-T) \tag{58}$$

δηλ.

$$X(s) \longrightarrow \boxed{H_1(s)} \longrightarrow Y(s) = X(s)(e^{-sT} + ae^{-s(T+\tau)}) \longrightarrow \boxed{H_2(s)} \longrightarrow X(s)e^{-sT} \tag{59}$$

Άρα

$$H_2(s) = \frac{Y_2(s)}{X_2(s)} = \frac{X(s)e^{-sT}}{X(s)(e^{-sT} + ae^{-s(T+\tau)})} = \frac{e^{-sT}}{e^{-sT}(1 + ae^{-s\tau})} = \frac{1}{1 + ae^{-s\tau}} \tag{60}$$

(β΄) Είναι

$$h_2(t) = L^{-1}\{H_2(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{1+ae^{-s\tau}}\right\} \tag{61}$$

Ξέρουμε ότι

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k, \text{ αν } |x| < 1 \tag{62}$$

οπότε

$$\frac{1}{1+ae^{-s\tau}} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-ae^{-s\tau})^k = \sum_{k=0}^{+\infty}(-a)^k e^{-ks\tau} \tag{63}$$

και άρα

$$h_2(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{1+ae^{-s\tau}}\right\} = L^{-1}\left\{\sum_{k=0}^{+\infty}(-a)^k e^{-ks\tau}\right\} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-a)^k L^{-1}\left\{e^{-ks\tau}\right\} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-a)^k \delta(t-k\tau) \tag{64}$$

αν $|-ae^{-s\tau}| < 1 \Longleftrightarrow |a||e^{-s\tau}| < 1 \Longleftrightarrow |a||e^{-(\sigma+j2\pi f)\tau}| < 1 \Longleftrightarrow |a||e^{-\sigma\tau}||e^{-j2\pi f\tau}| < 1 \Longleftrightarrow |a||e^{-\sigma\tau}| < 1$

δηλ.

$$|a| < |e^{\sigma\tau}| \Longleftrightarrow e^{\sigma\tau} > |a| \Longleftrightarrow \sigma\tau > \ln|a| \Longleftrightarrow \sigma > \frac{\ln|a|}{\tau} \tag{65}$$

αν εύλογα υποθέσουμε ότι $\tau > 0$.

Άσκηση 8 - Ηλεκτρικά κυκλώματα και μονόπλευρος μετασχ. Laplace

Η διαφορική εξίσωση γράφεται

$$v_0(t) = 2\frac{d}{dt}v_1(t) + \frac{d^2}{dt^2}v_1(t) + v_1(t) \tag{66}$$

και $v_1(0^-) = 0$, $\frac{d}{dt}v_1(t)\Big|_{t=0^-} = 1$, $v_0(t) = u(t)$, μεταφέρουμε την εξίσωση στο χώρο του Laplace:

$$V_0(s) - v_0(0^-) = 2sV_1(s) - 2v_1(0^-) + s^2V_1(s) - sv_1(0^-) - v_1'(0^-) + V_1(s) \tag{67}$$

$$V_0(s) - 0 = 2sV_1(s) - 0 + s^2V_1(s) - 0 - 1 + V_1(s) \tag{68}$$

$$V_0(s) = V_1(s)(2s + s^2 + 1) - 1 \tag{69}$$

$$\frac{1}{s} = V_1(s)(s^2 + 2s + 1) - 1 \tag{70}$$

$$V_1(s) = \frac{1+\frac{1}{s}}{s^2+2s+1} = \frac{1+\frac{1}{s}}{(s+1)^2} = \frac{1}{s(s+1)} \tag{71}$$

Αντί να αναπτύξουμε σε μερικά κλάσματα (που θα ήταν σωστό), ας δούμε μια άλλη λύση:

$$V_1(s) = \frac{1}{s}\frac{1}{s+1} \longleftrightarrow v_1(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\tau}u(\tau)d\tau = \int_0^t e^{-\tau}d\tau = -e^{-\tau}\Big|_0^t = 1 - e^{-t} \tag{72}$$

για $t > 0$, δηλ.

$$v_1(t) = (1 - e^{-t})u(t) \tag{73}$$

Άσκηση 9 - Ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα στο MATLAB/Octave

Κώδικας MATLAB/Octave

[$\star$] Άσκηση 10 - Toy-φιλτράρισμα στο MATLAB/Octave

(α΄) -

(β΄) Ναι, βρίσκονται εκεί που αναμένουμε.

(γ΄) i. Αρκεί $B = 500$, έτσι ώστε $B/2 = 250$ και να αποκόπτονται οι συχνότητες 600, 750 Hz.

ii. Αρκεί $B = 1300$, έτσι ώστε $B/2 = 650$ και να αποκόπτεται η συχνότητα 750 Hz.

iii. Αρκεί $B = 1600$, έτσι ώστε $B/2 = 800$ και να μην αποκόπτεται καμία συχνότητα.

iv. Αρκεί $B = 200$, έτσι ώστε $B/2 = 100$ και να αποκόπτονται όλες οι συχνότητες. Τα πλατη που μένουν στο φάσμα έχουν πάρα πολύ μικρό πλάτος που οφείλεται σε αριθμητικά σφάλματα.

(δ΄) -

[$\star$] Άσκηση 11 - Σχεδίαση ενός πραγματικού χαμηλοπερατού (lowpass) φίλτρου - MATLAB/Octave

α΄) Το $H(f)$ είναι το $H(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right)$, και άρα το $h(t) = 2f_c\mathrm{sinc}(2f_ct)$, που είναι μη-αιτιατό και άπειρης διάρκειας, άρα μη πραγματοποιήσιμο.

β΄) Είναι

$$|H(s)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j2\pi f_c}\right)^{2N}} \tag{74}$$

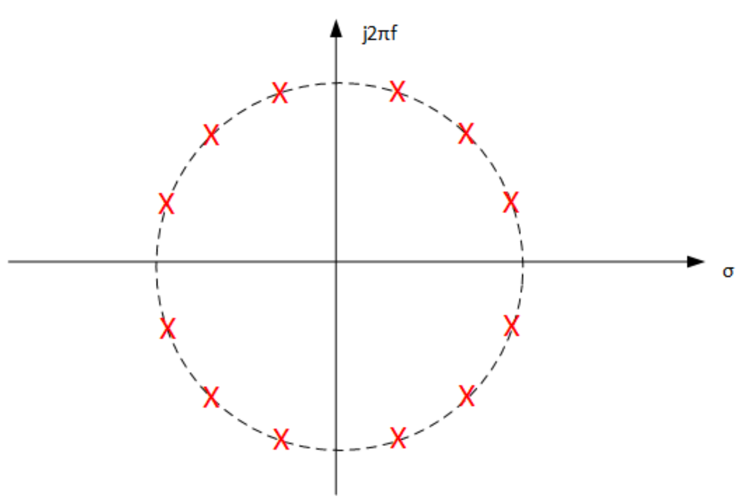
γ΄) Μπορούμε να γράψουμε ότι

$$|H(s)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j2\pi f_c}\right)^{2N}} = \frac{(j2\pi f_c)^{2N}}{s^{2N} + (j2\pi f_c)^{2N}} \tag{75}$$

Οι πόλοι δίνονται ως

$$s^{2N} + (j2\pi f_c)^{2N} = 0 \tag{76}$$
$$s^{2N} = (j2\pi f_c)^{2N}(-1) \tag{77}$$
$$s_k = j2\pi f_c \cdot (-1)^{\frac{1}{2N}} \tag{78}$$
$$= e^{j\frac{\pi}{2}} 2\pi f_c \cdot (-1)^{\frac{1}{2N}} \tag{79}$$
$$= 2\pi f_c e^{j\pi\frac{2k+N-1}{2N}}, \quad k = 0, 1, ..., 2N-1 \tag{80}$$

αφού $-1 = e^{j(-\pi+2\pi k)}, \quad k = 0, 1, 2, ..., 2N-1$. Άρα το διάγραμμα πόλων-μηδενικών θα είναι:



δ΄) Επιλέγουμε όλους τους πόλους που βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο. Έτσι, το ROC θα είναι

$$R_H : \sigma > \max \Re\{s_k^{left}\} \tag{81}$$

ε΄) Είναι για $N = 1$

$$H(s) = \frac{2\pi f_c}{s + 2\pi f_c}$$

για $N = 2$

$$H(s) = \frac{(2\pi f_c)^2}{(s - 2\pi f_c e^{j3\pi/4})(s - 2\pi f_c e^{j5\pi/4})}$$

ϛ΄) Για $N = 3$ και $f_c = \frac{1}{2\pi}$,

$$H(s) = \frac{1}{(s^3 + 2s^2 + 2s + 1)}$$

άρα

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{(s^3 + 2s^2 + 2s + 1)} \Longrightarrow Y(s)(s^3 + 2s^2 + 2s + 1) = X(s) \tag{82}$$

και

$$\frac{d^3}{dt^3}y(t) + 2\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 2\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = x(t) \tag{83}$$

ζ΄) Κώδικας MATLAB.