ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2021-22
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 5/4/2022 Ημερομηνία Παράδοσης : 21/4/2022, 15:45

Οι ασκήσεις με [$\star$] είναι **bonus**, +10 μονάδες η καθεμία στο βαθμό αυτής της σειράς ασκήσεων (δηλ. μπορείτε να πάρετε μέχρι 120/70 σε αυτή τη σειρά.)

[$\star$] Άσκηση 1 - Μετασχ. Fourier και Ιδιότητες - Ι
Βρείτε μια έκφραση για τα παρακάτω σήματα χωρίς να περιλαμβάνεται η πράξη της συνέλιξης:

$$x_1(t) = \mathrm{sinc}(at - b_1) * \mathrm{sinc}(at - b_2),\ a, b_1, b_2 \in \mathrm{R}, a \neq 0 \tag{1}$$
$$x_2(t) = \mathrm{sinc}(at) * \mathrm{sinc}(bt),\ a, b > 0 \tag{2}$$
$$x_3(t) = e^{-t}u(t) * e^{-t-1}u(t-1) \tag{3}$$

Απ: $x_1(t) = \frac{1}{|a|}\mathrm{sinc}(at - (b_1 + b_2))$, $x_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{a}\mathrm{sinc}(bt), & a > b \\ \frac{1}{b}\mathrm{sinc}(at), & b > a \end{cases}$, $x_3(t) = e^{-2}(t-1)e^{-(t-1)}u(t-1)$

Άσκηση 2 - Φάσματα Πλάτους και Φάσης
Για κάθε ζεύγος φάσματος πλάτους και φάσης παρακάτω, βρείτε το σήμα στο χρόνο που έχει μετασχ. Fourier με τα δοθέντα φάσματα.

(α') $|X(f)| = 1,\ \angle X(f) = 2\pi f$

(β') $|X(f)| = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{3}\right),\ \angle X(f) = 10\pi f$

Απ: (α) $x(t) = \delta(t+1)$, (β) $x(t) = 3\mathrm{sinc}(3(t+5))$

Άσκηση 3 - Μετασχ. Fourier και Ιδιότητες ΙΙ
Υπολογίστε την ενέργεια του σήματος

$$g(t) = 200\mathrm{sinc}(200t) \tag{4}$$

Απ: 200

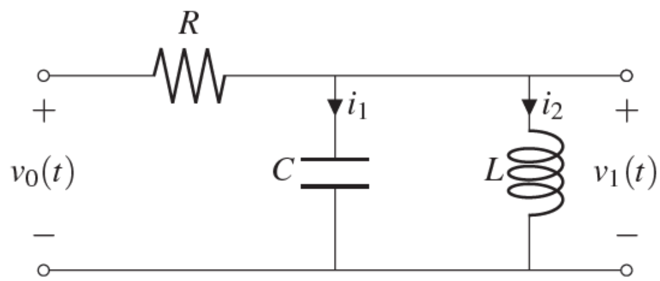
[$\star$] Άσκηση 4 - Έξοδος ΓΧΑ συστήματος για περιοδική είσοδο Ι
Η διαφορική εξίσωση ενός RLC κυκλώματος όπως στο Σχήμα 1 δίνεται ως

$$RC\frac{d^2}{dt^2}v_1(t) + \frac{d}{dt}v_1(t) + \frac{R}{L}v_1(t) = \frac{d}{dt}v_0(t) \tag{5}$$

με $v_0(t)$, $v_1(t)$ την είσοδο και την έξοδο αντίστοιχα.

(α') Βρείτε την απόκριση σε συχνότητα, $H(f)$.

(β') Αν $R = 6\ \Omega$, $L = 5$ H, και $C = 1/30$ F, υπολογίστε την έξοδο του συστήματος για είσοδο $v_0(t) = 5\cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$.



Σχήμα 1: *Σχήμα Άσκησης 4.*

(γ΄) Αν στην είσοδο εμφανιστεί ένα περιοδικό σήμα με συντελεστές εκθετικής Σειράς Fourier

$$X_k = \frac{1}{\pi^2 k^2}$$

και θεμελιώδη συχνότητα $f_0 = \frac{20}{\pi}$ Hz, ποιά μορφή θα έχουν οι εκθετικοί συντελεστές Fourier στην έξοδο του συστήματος;

(δ΄) Βρείτε την κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος, για τις τιμές των R, L, C που δόθηκαν παραπάνω.

Απ.: (α) $H(f) = \dfrac{j2\pi f L}{-4\pi^2 RLC f^2 + j2\pi L f + R}$, (β) $v_1(t) = \frac{5\sqrt{2}}{2}\cos\left(t + \frac{7\pi}{12}\right)$, (γ) $Y_k = \dfrac{1}{\pi^2}\left[\dfrac{j200}{-1600k^3 + j200k^2 + 6k}\right]$, (δ) $h(t) = 15e^{-3t}u(t) - 10e^{-2t}u(t)$

Άσκηση 5 - Έξοδος ΓΧΑ συστήματος για περιοδική είσοδο ΙΙ

(α΄) Αν σε ένα ΓΧΑ σύστημα με απόκριση συχνότητας

$$H(f) = j2\pi f \tag{6}$$

εμφανιστεί η είσοδος

$$x(t) = 1 + \frac{1}{4}\cos(2t) + \frac{1}{9}\sin(3t) \tag{7}$$

τότε ποιά θα είναι η έξοδος του συστήματος; Περιγράψτε με λόγια τι κάνει το σύστημα σε μια οποιαδήποτε είσοδο του παρουσιαστεί και εξηγήστε πως καταλήξατε σε αυτήν την περιγραφή.

(β΄) Αν ένα ΓΧΑ σύστημα περιγράφεται από την απόκριση συχνότητας

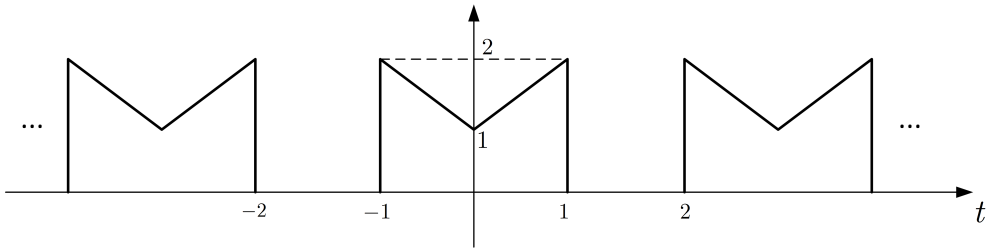
$$H(f) = \frac{j2\pi f - 1}{4\pi^2 f^2 + 4} \tag{8}$$

τότε βρείτε μια διαφορική εξίσωση που να περιγράφει το σύστημα αυτό.

Απ.: (α) $y(t) = -\frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{1}{3}\cos(3t)$, (β) $-\dfrac{d^2}{dt^2}y(t) + 4y(t) = \dfrac{d}{dt}x(t) - x(t)$

Άσκηση 6 - Μετασχ. Fourier και Περιοδικά Σήματα

Στην προηγούμενη σειρά ασκήσεων, σας ζητήθηκε να βρείτε τους συντελεστές της σειράς Fourier του περιοδικού σήματος με περίοδο $T_0 = 3$ του Σχήματος 2.



Σχήμα 2: *Περιοδικό σήμα Άσκησης 6.*

Όποιο τρόπο και να επιλέξατε στη λύση, σίγουρα θα σας πήρε αρκετό χρόνο. Μπορείτε να βρείτε τους συντελεστές X_k, θεωρώντας μια περίοδο του περιοδικού σήματος και εκμεταλλευόμενοι/ες τη θεωρία Fourier για περιοδικά σήματα; Η απάντηση δε θα είναι περισσότερο από $5-6$ γραμμές (συνολικά) αν επιλέξετε να διασπάσετε κατ' ευθείαν το σήμα $x(t)$ σε ένα άθροισμα κατάλληλου τετραγωνικού και τριγωνικού παλμού.

Απ.: $X_k = \dfrac{4}{3}\text{sinc}\left(\dfrac{2k}{3}\right) - \dfrac{1}{3}\text{sinc}^2\left(\dfrac{k}{3}\right)$

Άσκηση 7 - Μετασχηματισμός Fourier στο MATLAB/Octave

Συζητήσαμε αρκετά στις διαλέξεις για τον μετασχ. Fourier και βρήκαμε τη μαθηματική του έκφραση για αρκετά γνωστά μας σήματα. Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα του μετασχ. Fourier στο MATLAB/Octave με αριθμητικό τρόπο θα πρεπει να πάρουμε δείγματα από τον άξονα του χρονου και τον άξονα της συχνότητας, ώστε να κατασκευάσουμε το γινόμενο $I(f,t) = x(t)e^{-j2\pi ft}$ και να το ολοκληρώσουμε ως προς t.

Το MATLAB/Octave φυσικά έχει δική του συνάρτηση που υπολογίζει τον μετ. Fourier ενός σήματος, η οποία λέγεται `fft`. Παρ' όλα αυτά, εμείς θα φτιάξουμε τη δική μας, για να έχουμε απόλυτο έλεγχο και γιατι η `fft` απαιτεί κάποιες λίγες γνώσεις παραπάνω για να τη χρησιμοποιήσετε.

Θυμηθείτε, στο MATLAB/Octave όλα είναι πίνακες, άρα έχουν διακριτές τιμές. Έχετε δει σε προηγούμενη σειρά ασκήσεων πώς υπολογίζουμε στο MATLAB/Octave ένα ολοκλήρωμα. Παρόμοια θα δουλέψουμε και εδώ, μόνο που το ολοκλήρωμά μας δε θα είναι τιμή, αλλά ένας πίνακας $[1 \times L]$, που θα περιέχει L τιμές της συνάρτησης $X(f)$, δηλ. του μετασχ. Fourier που ψάχνουμε.

(α') Έστω ότι θέλουμε να δημιουργήσουμε ένα σήμα διάρκειας 10 δευτερολέπτων. Όπως γνωρίζετε ήδη, ο χρόνος των 10 δευτερολέπτων έχει άπειρες χρονικές στιγμές, οπότε θα πρέπει να διαλέξουμε κάποιες τιμές του σήματος. Έστω ότι θέλουμε να παίρνουμε τιμές ανά 0.01 δευτερόλεπτα. Ας δημιουργήσουμε πρώτα τον άξονα του χρόνου που θα χρησιμοποιηθεί για να πάρουμε τιμές από το σήμα μας. Θα είναι:

```
Dt = 1/100;      % Sampling step in time
D = 10;          % Signal duration in time
t = 0:Dt:D;      % Time axis (you've seen this before)
```

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε το συχνοτικό περιεχόμενο ενός σήματος στο διάστημα $[-10, 10]$, με ίδια "ανάλυση" όπως και στο πεδιο του χρόνου, δηλ. 0.01 Hz. Κατασκευάζουμε τον άξονα των συχνοτήτων ως:

```
Df = 0.01;           % Sampling step in frequency
f = -10:Df:10;       % Frequency axis = [-10,...,10]
```

Θεωρούμε λοιπόν ότι μας ενδιαφέρουν μόνο οι παραπάνω συχνότητες $[-10, 10]$, με ανάλυση `Df`, και ότι σε αυτό το διάστημα θα υπολογίσουμε τον μετασχ. Fourier. Άρα ουσιαστικά θα βλέπουμε τον μετασχ. Fourier μόνο στο διάστημα $[-10, 10]$. Γνωριζοντας τα δείγματα του χρόνου και της συχνότητας μπορούμε να κατασκευάσουμε το λεγόμενο *πίνακα ανάλυσης* του μετασχ. Fourier:

```
M = exp(-j*2*pi*f'*t);
```

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε το φάσμα πλάτους του γνωστού σήματος

$$x(t) = e^{-at}u(t), \;\; a > 0 \tag{9}$$

του οποίου γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι είναι

$$|X(f)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4\pi^2 f^2}} \tag{10}$$

Ας δημιουργήσουμε και σχεδιάσουμε το σημα μας, για $a = 2$:

```
a = 2;
x = exp(-a*t);
figure; plot(t,x);
xlabel('Time (s)');
title('Signal x(t) = exp(-at)');
```

Εδώ παραλείψαμε τη χρήση της βηματικής, αφού ο άξονας του χρόνου που δημιουργήσαμε πριν έχει θετικές τιμες.

Για να υπολογίσουμε τον μετασχ. Fourier, θα δουλέψουμε όπως για το ολοκλήρωμα Riemann σε προηγούμενη σειρά ασκήσεων, δηλ. θα δημιουργήσουμε την προσέγγιση του μετασχ. Fourier ως

$$X(f) = \lim_{\Delta t_i \to 0} \Delta t_i \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \left(x(\Delta t_i) e^{-j2\pi f \Delta t_i} \right) \tag{11}$$

και όπως έχουμε δει σε προηγούμενες σειρές ασκήσεων, αυτό στο MATLAB/Octave υλοποιείται ως

```
X = Dt*x*M.';
```

Ο τελεστής `.'` υπολογίζει τον *ανάστροφο* ενός πίνακα (ενώ ο τελεστής `'` υπολογίζει τον *συζυγή ανάστροφο ή Ερμητιανό* ενός πίνακα, και καλό θα ήταν να το αποφεύγετε). Πολλές φορές χρειάζεται αυτός ο τελεστής για να συμφωνούν οι διαστάσεις των πινάκων που εμπλέκονται ως γινόμενα. Αν η παραπάνω γραμμή σας βγάζει κάποιο σφάλμα διαστάσεων, δοκιμάστε να αφαιρέσετε τον τελεστή αυτό.

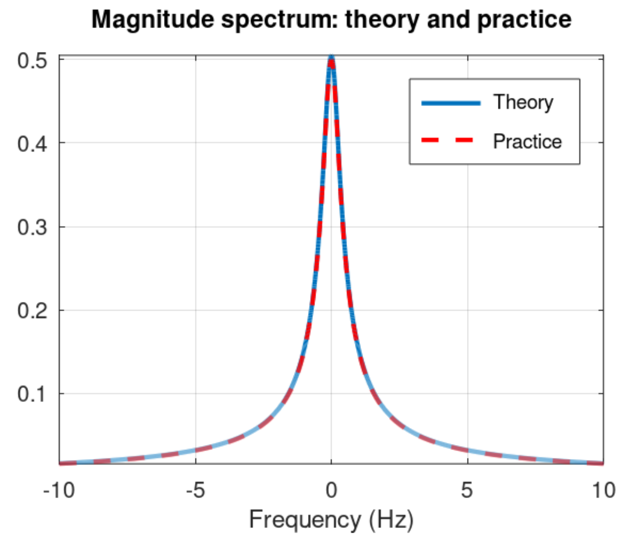
Ας συγκρίνουμε το φάσμα πλάτους του παραπάνω με το θεωρητικό φάσμα πλάτους που ξέρουμε.

```
Xtheoretic = 1./(a + j*2*pi*f);
plot(f, abs(X), "linewidth", 2); grid;
hold on; plot(f, abs(Xtheoretic), 'r--', "linewidth", 2);
hold off; axis tight; xlabel('Frequency (Hz)');
title('Magnitude spectrum: theory and practice');
legend('Theory', 'Practice');
```

Το Σχήμα 3 μας επιστρέφεται από το MATLAB/Octave.

(β') Ας προσπαθήσουμε τώρα να συνθέσουμε το σήμα στο χρόνο μέσω του αντίστροφου μετασχ. Fourier, δηλ. ας προσπαθήσουμε να βρούμε το σήμα στο χρόνο, $x(t)$! Ο μετασχ. Fourier που έχουμε βρει ορίζεται μόνο στο διάστημα $[-10, 10]$, αρα σίγουρα θα έχουμε κάποιο σφάλμα στον υπολογισμό του $x(t)$. Για να δούμε όμως...

Γνωριζοντας τα δείγματα του χρόνου και της συχνότητας μπορούμε να κατασκευάσουμε το λεγόμενο *πίνακα σύνθεσης* του μετασχ. Fourier:



Σχήμα 3: *Φάσματα πλάτους θεωρητικού και αριθμητικού αποτελέσματος.*

```
Minv = exp(j*2*pi*t'*f);
```

Για να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier, θα δουλέψουμε όπως για το ολοκλήρωμα Riemann προηγουμένως, με μικρές διαφοροποιήσεις, δηλ. θα δημιουργήσουμε την προσέγγιση του αντίστροφου μετασχ. Fourier ως

$$x(t) = \lim_{\Delta f_i \to 0} \Delta f_i \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \left(X(\Delta f_i) e^{j2\pi \Delta f_i t} \right) \tag{12}$$

Η σύνθεση του σήματος στο χρόνο γίνεται ως

```
x_est = Df*Xtheoretic*Minv.';
```

Αν η παραπάνω γραμμή σας βγάζει κάποιο σφάλμα διαστάσεων, δοκιμάστε να αφαιρέσετε τον τελεστή `.'`. Ας συγκρίνουμε το αποτέλεσμα μας με το θεωρητικό.

```
plot(t, x_est, 'r--', "linewidth", 1);
hold on; plot(t, x, "linewidth", 1); grid;
hold off; axis([0 2 min(x_est) max(x_est)]); xlabel('Time (s)');
title('Inverse FT: theory and practice');
legend('Practice', 'Theory');
```

Το Σχήμα 4 μας επιστρέφεται από το MATLAB/Octave.

(γ') Γράψτε κατάλληλο κώδικα για να βρείτε το μετασχ. Fourier των σημάτων

i. $x_1(t) = -e^{3t}u(-t)$

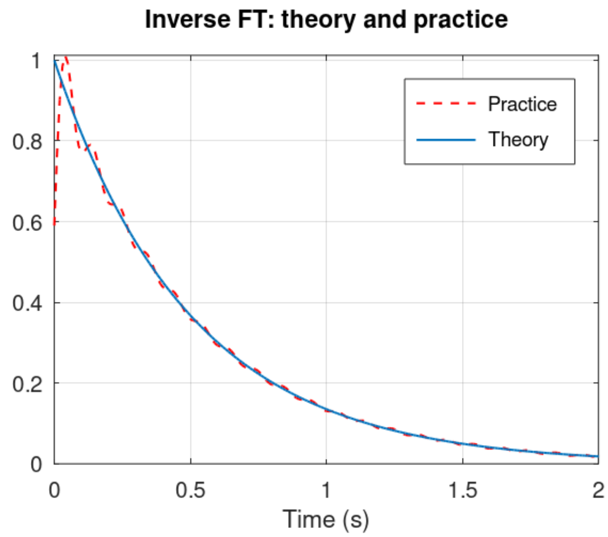
ii. $x_2(t) = 4\mathrm{rect}(t)$

iii. $x_3(t) = 2\mathrm{tri}(t-2)$

iv. $x_4(t) = e^{-|t|}$

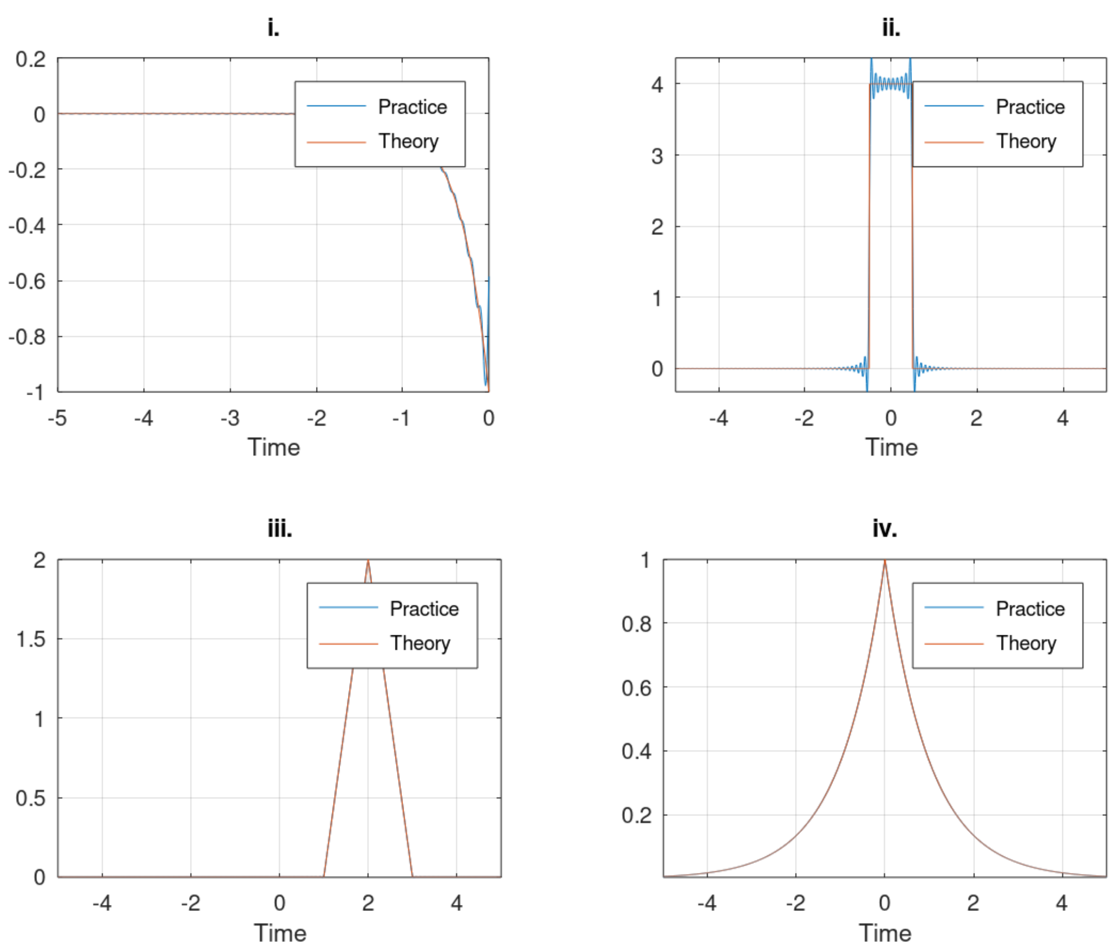
και από αυτό το μετασχηματισμό συνθέστε πίσω το σήμα στο χρόνο μέσω του αντίστροφου μετασχ. Fourier. Χρησιμοποιήστε το αρχείο-σκελετό `Ex7code.m`. Για τις συναρτήσεις rect() και tri() θα σας βοηθήσουν οι έτοιμες συναρτήσεις `rectpuls, tripuls`.[1]

[1]Οι χρήστες Octave θα χρειαστούν το πακέτο signal, το οποίο φορτώνεται με την εντολή pkg load signal



Σχήμα 4: *Ανακατασκευή του σήματος στο χρόνο.*

Παραδωστε συμπληρωμένο τον δοθέντα κώδικα και το γράφημα που επιστρέφει. Αν όλα είναι σωστά από μέρους σας θα πρέπει να πάρετε σχήματα περίπου σαν αυτά του Σχήματος 5.



Σχήμα 5: *Σχήματα-απαντήσεις Άσκησης 7.*

Πραγματικές Εφαρμογές του Μετασχηματισμού Fourier στο MATLAB/Octave

Άσκηση 8 - Μετασχηματισμός Fourier και Παθολογία Φωνής
Ο Μετασχ. Fourier είναι ένα εξαιρετικά χρήσιμο εργαλείο σε πολλούς τομείς της Επεξεργασίας Σήματος. Ένας τομέας είναι η ανίχνευση παθολογίας φωνής.

(α') Ηχογραφήστε τη φωνή σας όταν εκφέρετε το φώνημα /α/, σταθερά, για περιπου 3 δευτερόλεπτα. Φροντίστε να βρίσκεστε σε ήσυχο περιβάλλον, και προσπαθήστε (αν γίνεται) να χρησιμοποιήσετε κανονικό μικρόφωνο (αλλιώς, χρησιμοποιήστε τα ενσωματωμένα των laptops σας). Χρησιμοποιήστε ένα προγραμμα ηχογράφησης της επιλογής σας (π.χ. το δωρεάν πρόγραμμα Wavesurfer ή το Audacity) και φροντίστε η ηχογράφηση να είναι μονοφωνική (δηλ. όχι στέρεο - δικαναλική) και να γίνει σε συχνότητα δειγματοληψίας 16000 Hz, και ακρίβεια αποθήκευσης 16 bits σε μορφη .WAV. Σας δίνεται και ένα ενδεικτικό σήμα στο site του μαθήματος, αν δεν μπορέσετε να πραγματοποιήσετε τα παραπάνω.

(β') Χρησιμοποιήστε τον κώδικα ανάλυσης μετασχ. Fourier που σας δόθηκε στην προηγούμενη - 7η - άσκηση (και για ευκολία, σας δίνεται στο αρχείο `CTFT.m` στο site του μαθήματος) για να αναλύσετε το σήμα όπως περιγράφεται παρακάτω:

- Επιλέξτε ένα τμήμα (ή, όπως λέμε στην ορολογία της Επεξεργασίας Σήματος, ένα *παράθυρο*) φωνής, με διάρκεια περίπου 50 ms, κατά προτίμηση από τη μέση περιπου της ηχογράφησης. Στο MATLAB, αυτό μπορεί να γίνει ως[2]:

```
[s, fs] = audioread('myvoice.wav');     % Load the recorded speech signal
start = 1                               % Assume our speech segment starts
                                        % from time = 1 sec...
finish = 1.05 ;                         % ...and ends after 50 ms
start_s = round(start*fs);              % Convert time in samples
finish_s = round(finish*fs);            % -------- " ------------
segment = s(start_s:finish_s);          % Chop the desired speech segment
plot([start_s:finish_s]./fs, segment); % Visualization!
```

- Στη μεταβλητή `segment` έχετε ένα τμήμα φωνής σας διάρκειας 50 ms. Χρησιμοποιήστε τον κώδικά ανάλυσης Fourier για να αναλύσετε το σήμα σας στην περιοχή συχνοτήτων από 2000 ως 4000 Hz. Βρειτε το μετασχ. Fourier και απεικονίστε γραφικά το φάσμα πλάτους, με χρήση των εντολών `abs`, `plot`, όπως στην προηγούμενη σειρά ασκήσεων. Στον κώδικα της ανάλυσης, χρησιμοποιήστε μικρό βήμα στη συχνότητα, της τάξης του 1 Hz, δηλ.

```
Df = 1;
f = 2000:Df:4000;
```

- Αν το φάσμα πλάτους που θα δείτε, παρουσιάσει μια συμμετρία ως προς τη συχνότητα 3000 Hz, τότε υπάρχει μια πιθανότητα 20% να αναπτύξετε ασθένεια στο φάρυγγά σας τα επόμενα 5 χρόνια. Προσέξτε λοιπόν να κάνετε σωστά την ανάλυση! ☺

Παραδωστε κώδικα που υπολογίζει το μετασχ. Fourier ενός τυχαίου παραθύρου φωνής, και εμφανίζει το φάσμα πλάτους του. Παραδώστε ένα γράφημα αυτού του φάσματος πλάτους. Γράψτε αν παρατηρείτε κάτι.

[2] Παλιότερες εκδόσεις MATLAB/Octave μπορεί να έχουν τη συνάρτηση waverad αντί της audioread.

[⋆] Άσκηση 9 - Επέκταση της προηγούμενης άσκησης

Ίσως να σκεφτήκατε ότι το να πάρουμε ένα τυχαίο κομμάτι απ' το σήμα φωνής μας και αφού το αναλύσουμε, να βγάλουμε απόφαση για κάτι τόσο σοβαρό όπως μια πιθανή παθολογία, είναι λίγο ριψοκίνδυνο και επιπόλαιο. Κάτι πιο ασφαλές θα ήταν το εξής:

(α') Χωρίστε όλο το σήμα σε παράθυρα διάρκειας 50 ms, με μια επικάλυψη γειτονικών παραθύρων της τάξης του 50%, δηλ. "προχωράτε" το παράθυρό σας πάνω στο σήμα της φωνής κάθε 25 ms, ωστε τα παράθυρά σας να επικαλύπτονται κατά μισό παράθυρο. Αν σας φαίνεται δύσκολο, μπορείτε να μη χρησιμοποιήσετε επικάλυψη. Αυτό μπορείτε να το κάνετε με χρήση βρόχων επανάληψης όπως τους γνωρίζετε από τη C (for, while) - δε διαφέρουν πολύ. Γράψτε help for, help while για να δείτε πως συντάσσονται. Σκεφτείτε οτι απλά πρέπει να διατρέχετε ένα πίνακα-γραμμή (που είναι το σήμα σας) ανά κάποιο αριθμό στοιχείων.

(β') Υπολογίστε το μετασχ. Fourier για τις συχνότητες $2000 - 4000$ Hz και βρείτε το φάσμα πλάτους του κάθε παραθύρου. Αποθηκεύστε το φάσμα πλάτους κάθε παραθύρου σε μια γραμμή ενός πίνακα X. Αυτό μπορεί να γίνει ως εξής:

```
% Let N be the whole signal duration in samples
for i = 1:N
    % Let seg be the variable holding
    % our current speech segment
    MF = dt*seg*M.';              % Compute Fourier Transform
    Fasma_platous = abs(MF);      % Compute Magnitude Spectrum
    Y(i, :) = Fasma_platous;      % Store it into the i-th row
                                  % of matrix Y
end
```

(γ') Να υπολογίσετε το "μέσο φάσμα πλάτους ", δηλ. μια μέση τιμή όλων των φασμάτων πλάτους που έχετε βρει, έτσι ώστε στο τελος να έχουμε μόνο ένα φάσμα πλάτους, και να αποφασίσετε για την παθολογία βασει αυτού. Χρήσιμη θα σας φανεί η εντολή `mean` του MATLAB.

(δ') Ακολουθώντας μια τέτοια διαδικασία έχουμε πιο εύρωστα, με τη στατιστική έννοια, συμπεράσματα.

Παραδωστε κώδικα που υπολογίζει και εμφανίζει το μέσο φάσμα πλάτους του μετασχ. Fourier. Παραδώστε αυτό το μέσο φάσμα πλάτους σε γράφημα. Γράψτε αν παρατηρείτε κάτι.

[⋆] Άσκηση 10 - Μετασχηματισμός Fourier κι Αφαίρεση Θορύβου

Σας δίνεται στο site του μαθήματος ένα σήμα μουσικής `sample-noise.wav`. Πρόκειται για ένα γνωστό τραγούδι "μολυσμένο" με ένα ισχυρό σήμα ημιτόνου σε κάποια υψηλή, σταθερή, συχνότητα μεταξύ 1000 και 3000 Hz. Σκοπός της άσκησης είναι να αναλύσετε το σήμα και να αφαιρέσετε το θόρυβο. Ακολουθήστε τα παρακάτω βήματα.

(α') Αρχικά, ακούστε το σήμα[3].

```
[s, fs] = audioread('sample-noise.wav');  % Load the speech signal
soundsc(s, fs);                           % Listen to it!
t = 0:1/fs:(length(s)-1)/fs;              % Time axis in seconds
plot(t, s);                               % Visualize!
```

(β') Παρατηρήστε - και ακούστε - ότι η συνιστώσα του ημιτόνου είναι ισχυρή, και εύκολα διακρίνεται μέσα στον ήχο της ηχογράφησης. Γνωρίζετε όμως ότι λόγω της ισχύος της, θα πρέπει να "ξεχωρίζει" σχετικά στο φάσμα πλάτους του σήματος απο το υπόλοιπο σήμα. Επίσης, επειδή είναι σταθερής συχνότητας, μπορούμε να την εντοπίσουμε σε οποιοδήποτε σημείο (παράθυρο) του σήματος κι αν επιλέξουμε.

[3] Παλιότερες εκδόσεις MATLAB/Octave μπορεί να έχουν τη συνάρτηση wavread αντί της audioread.

(γ΄) Διαλέξτε ένα τυχαίο παραθυρο σήματος, διάρκειας 30 ms και αναλύστε το στις παραπάνω συχνότητες ($1000 - 3000$ Hz) με τον μετασχ. Fourier, χρησιμοποιώντας φυσικά το φάσμα πλάτους[4]. Προσπαθήστε να εντοπίσετε το ημίτονο. Σκεφτείτε ότι ο μετασχ. Fourier του ημιτόνου πλησιάζει τη συνάρτηση Δέλτα που έχει γίνει συνέλιξη με το μετασχ. Fourier του παραθύρου σας. Πρακτικά, θα περιμένετε να δείτε κάποιο ισχυρό peak (κορυφή) στο φάσμα πλάτους. Όμως επειδη το περιεχόμενο του σήματος ειναι μουσική και φωνή, το φάσμα πλάτους θα περιέχει και άλλες συχνότητες. Οπότε η αναγνώριση του peak από ένα και μόνο παράθυρο δε θα είναι εύκολη, εκτός αν είστε τυχεροί/ες. ☺ Στην ανάλυσή σας, χρησιμοποιήστε ενδεικτικά τον παρακάτω κώδικα:

```
T = 30;                             % Window duration of 30ms
Ts = T*10^(-3)*fs;                  % Window duration of 30ms in samples
x = s(45213:45213 + Ts);            % Choose randomly a 30 ms segment
                                    % from the speech signal that starts
                                    % from the sample number 45213
                                    % (also randomly chosen)
plot(x);                            % Visualize!
Dt = 1/fs;                          % Analysis step in time
Df = 1;                             % Analysis step in frequency
f = 1000:Df:3000;                   % Frequency axis that is of our
                                    % interest
t = 0:(1/fs):(Ts/fs);               % Time axis of 30ms duration
M = exp(-j*2*pi*f'*t);              % Matrix M
x = reshape(x, 1, length(x));       % Make sure x is a row vector

X = Dt*x*M.';                       % Fourier Transform
figure; plot(f, abs(X));            % Search for a strong peak in
                                    % [1000, 3000]
```

(δ΄) Επιλέξτε διάφορα παράθυρα μέσα στο σήμα ($4 - 5$), όλα ίδιας διάρκειας, μέχρι να εντοπίσετε τη συχνότητα του ημιτόνου με κάποια βεβαιότητα. Προς διευκόλυνσή σας, δίνεται οτι η συχνότητα είναι *ακέραιος αριθμός*, πολλαπλάσιος του 100, στο διάστημα $[1000, 3000]$ Hz. Σε κάθε plot που κάνετε, στο πάνω μέρος υπάρχουν κάποια εικονίδια. Ένα από αυτά, ο Data Cursor, σας δίνει τις συντεταγμένες του σημείου του σήματος που θα κάνετε κλικ. Έτσι, μπορειτε να βρίσκετε εύκολα τη συχνότητα ενός σημείου στο φάσμα σας. Παραδωστε μερικά plots από τα παράθυρα που διαλέξατε, τόσο στο χρόνο όσο και στο φάσμα πλάτους.

(ε΄) Σας δίνουμε επιπλέον ότι το ισχυρό αυτό ημίτονο έχει πλάτος $A = 0.01$ και αρχική φάση $\phi = 0$, δηλ. είναι της μορφής

$$n(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$$

Σε προηγούμενες ασκήσεις, έχετε δει πώς δημιουργούμε ενα απλό ημίτονο. Δημιουργήστε ένα ημίτονο στο MATLAB με πλάτος και φάση που σας δινεται παραπάνω, και με συχνότητα αυτήν που βρήκατε από την ανάλυσή σας στο προηγούμενο ερώτημα. Φροντίστε να έχει ίδια διάρκεια με ολόκληρο το σήμα s του τραγουδιού. Για να βρείτε τη διάρκεια αυτή, χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση `length` του MATLAB. Για παραδειγμα, αν θέλετε να φτιάξετε ενα ημίτονο διάρκειας 100 δειγμάτων, δηλ. $1/160 = 0.00625$ s (με συχνότητα δειγματοληψίας 16000 Hz), πλάτους 1 και συχνότητας 200 Hz, θα κάνετε το εξής:

```
A = 1;
f0 = 200;
fs = 16000;
n = A*cos(2*pi*f0*[0:99]/fs);      % Example
```

[4] Σε σχέση με τις προηγούμενες δυο ασκήσεις, στην πραγματική ρέουσα ομιλία και στον ήχο, το σήμα αλλάζει πιο γρηγορα απ΄ ότι όταν λέμε ένα απλό /α/. Έτσι, χρησιμοποιούμε μικρότερο παράθυρο ανάλυσης για να είμαστε σχετικά ασφαλείς ότι το περιεχόμενό του δεν αλλάζει σημαντικά.

(ϛ') Αφαιρέστε το σήμα ημιτόνου που φτιάξατε παραπάνω από το σήμα της ηχογράφησης s, απλώς αφαιρώντας μεταξύ τους το διάνυσμα s και το διάνυσμα ημιτόνου που μόλις φτιάξατε, όπως παρακάτω. Ακούστε το αποτέλεσμα. Θα πρέπει να ακούγεται πλέον καθαρό το σήμα. ☺

```
clean_sig = s - n.';                % s = signal, n = cosine
soundsc(clean_sig, fs);             % Listen!
```

Αν η πράξη σας βγάζει σφάλμα, αφαιρέστε το `.'`.

Σημείωση: Το παραπάνω παράδειγμα ήταν πολύ "εκπαιδευτικό" ☺. Στην πράξη, το ημίτονο μπορεί να μην έχει σταθερό πλάτος ή μηδενική φάση, ή ακόμα κι αν έχει, δεν μπορούμε να γνωρίζουμε εκ των προτέρων τις τιμές τους. Έτσι, μια μέθοδος όπως η παραπάνω, στο πεδίο του χρόνου δηλαδή, δε θα δουλέψει. Συνήθως χρησιμοποιούμε μεθόδους στο χώρο της συχνότητας για να αφαιρέσουμε τον ενοχλητικό θόρυβο, εφαρμόζοντας τα λεγόμενα *notch* φίλτρα, τα οποία είναι συστήματα που μηδενίζουν το πλάτος μιας συγκεκριμένης συχνότητας από ένα σήμα που δέχονται ως είσοδο. Η εφαρμογή μιας τέτοιας τεχνικής ξεφεύγει από τα πλαίσια του μαθήματος[5], αν και ίσως προς το τέλος του μαθήματος να μπορέσετε να υλοποιήσετε ένα τέτοιο απλό φίλτρο! ☺

Παραδωστε όσα plots ζητούνται στη διάρκεια της εκφώνησης, και κώδικα MATLAB που καθαρίζει το ηχητικό σήμα από το θόρυβο.

Άσκηση 11 - Μετασχηματισμός Fourier και Ανάλυση Ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος

Τοποθετώντας ηλεκτρόδια σε διάφορες περιοχές της κεφαλής ανιχνεύουμε ηλεκτρικές δραστηριότητες (διαφορές δυναμικού) οι οποίες θεωρείται ότι αποτελούν μια έκφραση της εγκεφαλικής δραστηριότητας. Τέτοιες καταγραφές έχουν γίνει τόσο κατά το στάδιο του ύπνου όσο και κατά τη διάρκεια κάποιας έντονης δραστηριότητας (π.χ. όταν προσπαθείτε να λύσετε τις ασκήσεις στο ΗΥ215 ☺). Από κάθε ηλεκτρόδιο (σε συνδυασμό με ένα ηλεκτρόδιο αναφοράς) συλλέγουμε ένα σήμα όπου παρατηρούμε διαφορές δυναμικού.

Ένα σοβαρό πρόβλημα είναι η ανίχνευση των συχνοτήτων που υπάρχουν σε αυτές τις καταγραφές. Σε ορισμένες συχνότητες έχουμε αντιστοιχίσει κάποιους *ρυθμούς*, όπως ονομάζονται, και οι οποίοι σηματοδοτούν κάτι ενδιαφέρον για την εγκεφαλική μας δραστηριότητα. Για παράδειγμα, η συχνότητα των 10 Hz αντιστοιχεί στο ρυθμό Άλφα.

Σας δίνουμε δυο καταγραφές διάρκειας ενός δευτερολέπτου η καθεμία. Η καταγραφή των δεδομένων έγινε λαμβάνοντας ένα δείγμα του σήματος συνεχούς χρόνου ανά 0.01 δευτερόλεπτα. Ζητάμε να ελέγξετε αν αυτά τα σήματα έχουν ρυθμό Άλφα στο συχνοτικό τους περιεχόμενο (δηλ. αν έχουν ισχυρή φασματική συνιστώσα στα 10 Hz). Οι ρυθμοί εμφανίζονται συνήθως στο εύρος συχνοτήτων $[3, 20]$ Hz, άρα θα στοχεύσουμε σε αυτό το διάστημα.

Με βάση τα παραπάνω, ο άξονας του χρόνου στο MATLAB θα είναι:

```
dt = 0.01;          % Time sampling
t = 0:dt:1;         % Time axis
```

ενώ για τη συχνότητα θα είναι

```
df = 0.01;          % Frequency sampling
f = 3:df:20;        % Frequency axis
```

Για να εισάγετε τα δυο σήματα στο MATLAB χρησιμοποιήστε την εντολή

```
load 'EEG-new.mat'
```

και θα σας εμφανιστούν δυο σήματα `x1, x2` στο workspace σας.

[5] Είναι αντικείμενο του μαθήματος ΗΥ370-Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος.

(α΄) Απεικονίστε τα δυο σήματα στο χρόνο σε δυο γραφήματα με χρήση της εντολής `plot` και του άξονα `t` που δημιουργήσαμε παραπάνω. Παραδώστε τα γραφήματα που προκύπτουν.

(β΄) Θέλουμε να δούμε το φάσμα πλάτους (το μέτρο του μετασχ. Fourier δηλαδή) των σημάτων αυτών για να αναγνωρίσουμε αν υπάρχει κάποια ισχυρή συνιστώσα στα 10 Hz - δηλ. ο ρυθμός Άλφα. Χρησιμοποιήστε τον πίνακα ανάλυσης `M = exp(-j*2*pi*f'*t)` όπως στην 7η Άσκηση για να αναλύσετε τα δυο σήματα στο διάστημα $[3, 20]$ Hz. Παραδώστε τα δυο φάσματα πλάτους σχεδιασμένα το ένα πάνω στο άλλο (εντολή `hold on` ανάμεσα στα δυο plot) και αναφέρετε αν βρίσκετε ρυθμό Άλφα σε κάποιο από τα δυο σήματα.

Παραδώστε κώδικα MATLAB/Octave που εκτελεί την απεικόνιση των φασμάτων πλατών καθώς και όποια γραφήματα σας ζητούνται στα παραπάνω ερωτήματα. Απαντήστε σε σχόλιο αν βρέθηκε ρυθμός Άλφα στα δυο εγκεφαλογραφήματα, κι αν ναι, σε ποιο/α.

[$\star$] Άσκηση 12 - Μετασχηματισμός Fourier και Ανάλυση Ήχου

Μια από τις πιο δημοφιλείς εφαρμογές του μετασχ. Fourier είναι στο πεδίο της ανάλυσης ήχου, και συγκεκριμένα, μουσικής. Στην άσκηση αυτή θα δούμε πως μπορεί κανείς να εξάγει συχνοτική πληροφορία από ένα μουσικό κομμάτι και στη συνέχεια να προσπαθήσει να κατασκευάσει μια παρτιτούρα με βάση αυτήν την πληροφορία.

Σας δίνεται στην ιστοσελίδα του μαθήματος το (αληθινό) μουσικό κομμάτι Fur Elise, με το οποίο "παίξατε" στην προηγούμενη σειρά ασκήσεων, όπου και προσπαθήσατε να το συνθέσετε με χρήση Σειρών Fourier από πληροφορίες νότας και διάρκειας των δυο χεριών πιάνου. Στην άσκηση αυτή θα δούμε πως μπορούμε να κάνουμε το αντίστροφο: να εξάγουμε την "παρτιτούρα" από πληροφορία που μας δίνει ο μετασχ. Fourier. Πριν συνεχίσουμε, να αναφέρουμε ότι αυτό είναι ένα δύσκολο - για σας - εγχείρημα, οπότε θα περιοριστούμε στο να αναπαραστήσουμε την πληροφορία αυτή οπτικά, ως μια εικόνα συχνότητας - χρόνου (εν αντιθέσει με τις αναπαραστάσεις πλάτους - συχνότητας ή φάσης - συχνότητας που έχετε δει στο μετασχ. Fourier).

Ένα πραγματικό μουσικό κομμάτι, όπως κι ένα σήμα ομιλίας, είναι ένα σήμα τελείως διαφορετικό από αυτά που αναλύουμε στο χαρτί μας. Η βασική του διαφορά είναι ότι *αλλάζει πολύ γρήγορα* με την πάροδο του χρόνου. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούμε να πάρουμε το μετασχ. Fourier όλου του μουσικού κομματιού! Μα γιατί όχι; Γιατί αν το κάνουμε αυτό, θα εμφανιστούν στο φάσμα *όλες* οι νότες του κομματιού, από την αρχή ως το τέλος του, και εμείς δε θα γνωρίζουμε *πότε*, δηλ. σε ποιά χρονική στιγμή παίχτηκε η καθεμιά, ακόμα περισσότερο *πόσες* φορές παίχτηκε κάθε νότα. Άρα η προσέγγισή μας θα πρέπει να μοιάζει αρκετά με αυτή της Άσκησης 8 της 2ης σειράς ασκήσεων, όπου τμηματοποιήσαμε το σήμα μας για να υλοποιήσουμε έναν ανιχνευτή δραστηριότητας ομιλίας: στην Άσκηση 8 της 2ης σειράς ασκήσεων το κάναμε για να παρατηρούμε τις *ενεργειακές* μεταβολές του σήματος και να πάρουμε αποφάσεις για το αν υπάρχει *τοπικά* (δηλ. σε ένα συγκεκριμένο παράθυρο/τμήμα ομιλίας) δραστηριότητα ομιλίας, ενώ τώρα θα το κάνουμε για να παρατηρούμε τις *συχνοτικές* μεταβολές του κομματιού με την πάροδο του χρόνου!

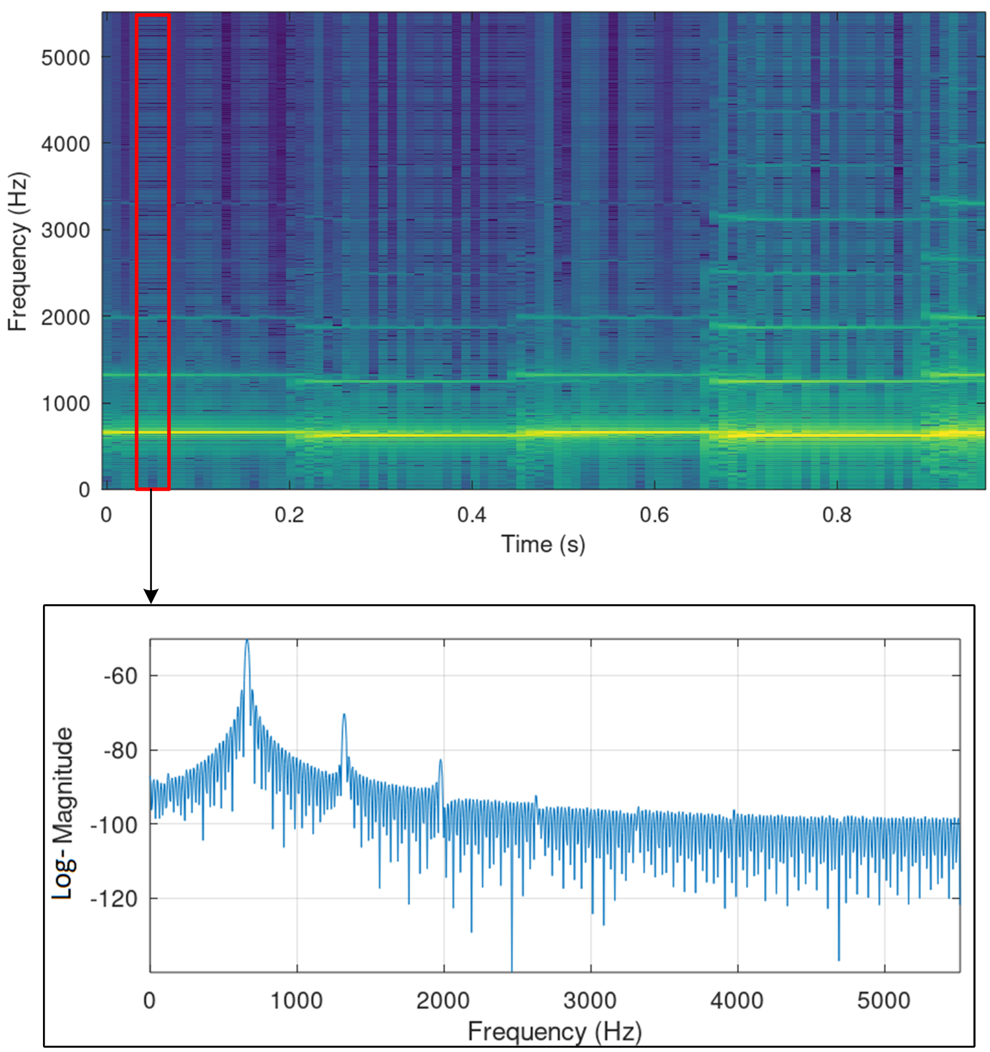
Η προσέγγισή μας θα είναι η ακόλουθη:

- Επιλέγουμε να αναλύσουμε το μουσικό σήμα μας σε τμήματα διάρκειας 40 ms. Είναι ένα μέγεθος τμήματος που χρησιμοποιείται συχνά στην πράξη.
- Επιλέγουμε τα τμήματα αυτά να είναι *επικαλυπτόμενα* κατά 75%, δηλ. το παράθυρό μας θα μετακινείται στο χρόνο ανά 10 ms. Αυτό το κάνουμε γιατί θέλουμε να παρατηρούμε με λεπτομέρεια τις μεταβολές του μουσικού κομματιού με την πάροδο του χρόνου.
- Θα αναλύσουμε κάθε τμήμα σε 1024 σημεία στη συχνότητα, δηλ. ο θετικός άξονας των συχνοτήτων θα είναι ομοιόμορφα δειγματοληπτημένος σε 1024 σημεία.
- Σε κάθε παράθυρο θα εφαρμόζουμε μετασχ. Fourier όπως έχουμε μάθει σε αυτή τη σειρά ασκήσεων (Άσκηση 7).

- Θα αποθηκεύουμε κάθε μετασχηματισμό Fourier σε έναν πίνακα X διάστασης $1024 \times N$, με N το πλήθος των επικαλυπτόμενων παραθύρων που χρησιμοποιούμε.

- Όταν προσπελάσουμε όλο το σήμα μουσικής, θα καταλήξουμε να έχουμε τον παραπάνω πίνακα X που σε κάθε στήλη του θα έχει ένα μετασχ. Fourier, άρα θα έχουμε μια συλλογή από μετασχηματισμούς Fourier. Αν πάρουμε το μέτρο κάθε μετασχηματισμού/στήλης, αυτή η συλλογή καταλήγει να ονομάζεται **φασματογράφημα - spectrogram**, και αποτελεί σημαντικό μέλος πάρα πολλών πραγματικών εφαρμογών (συμπεριλαμβανομένων όσων σχετίζονται με τεχνητή νοημοσύνη) που σχετίζονται με τον ήχο και την ομιλία.

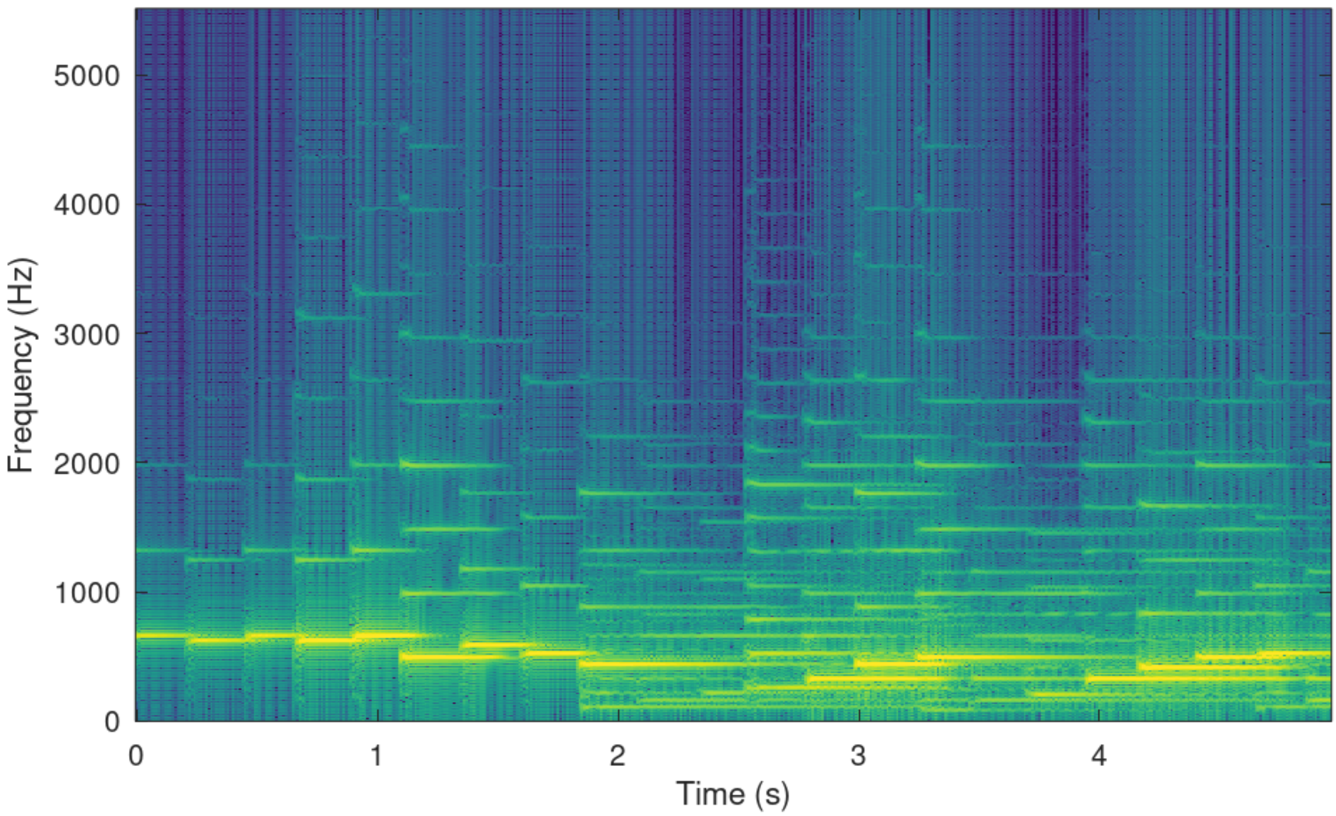
- Συνήθως το φάσμα πλάτους παρουσιάζεται σε λογαριθμική κλίμακα (deciBel - dB) για καλύτερη ευκρίνεια της κατάστασης. Μια απεικόνιση του περιεχομένου μιας στήλης του πίνακα X κάπου κοντά στην αρχή του σήματος που αντιπροσωπεύει ένα παράθυρο διάρκειας 40 ms φαίνεται στο Σχήμα 6. Προσέξτε: το φασματογράφημα αποτελεί μια αναπαράσταση χρόνου - συχνότητας και "έντασης" στο φάσμα πλάτους. Η φωτεινότητα της εικόνας αναπαριστά τις υψηλότερες τιμές στο λογαριθμικό φάσμα πλάτους. Για παράδειγμα, στο διάστημα $0-1$ δευτερόλεπτα, βλέπετε μια αλληλουχία φωτεινών περιοχών κοντά στα 620 και στα 660 Hz[6], και κάποιων ασθενέστερων αρμονικών τους. Αυτό σημαίνει ότι ο μετασχ. Fourier σε αυτή τη χρονική γειτονιά θα παρουσιάζει ισχυρές κορυφές στο φάσμα πλάτους σε αυτές τις δυο συχνότητες (πότε στη μια συχνότητα, πότε στην άλλη).



Σχήμα 6: *Φασματογράφημα και περιεχόμενό του.*

[6] Δεν μπορείτε να το επιβεβαιώσετε αυτό από το σχήμα, όμως θα το δείτε αν παράξετε εσείς αυτήν την εικόνα και κάνετε μεγέθυνση στην περιοχή αυτή.

Σας δίνεται ο κώδικας `noteRecFurElise_students.m`, που υλοποιεί το παραπάνω σκεπτικό για τα πρώτα 5 δευτερόλεπτα του κομματιού. Εσείς πρέπει να τον συμπληρώσετε κατάλληλα. Αν το κάνετε σωστά, θα σας παρουσιαστεί μια εικόνα, όπως στο Σχήμα 7, που αποτελεί το προαναφερθέν φασματογράφημα. Επίσης, θυμηθείτε ότι κάθε πλήκτρο πιάνου δημιουργεί μια πεπερασμένης διάρκειας σειρά Fourier με θεμελιώδη συχνότητα f_0 τη συχνότητα του πλήκτρου.



Σχήμα 7: *Φασματογράφημα του ηχητικού σήματος Fur Elise.*

Παραδώστε συμπληρωμένο τον κώδικα MATLAB/Octave που παράγει το φασματογράφημα. Περιγράψτε σε μια παράγραφο $8-10$ γραμμών, με λόγια, πώς θα μπορούσατε να χρησιμοποιήσετε το φασματογράφημα και τις τιμές του για να αναγνωρίσετε τις νότες του κομματιού και να φτιάξετε έτσι την παρτιτούρα του. Η τελευταία περιλαμβάνει και τη διάρκεια κάθε νότας, άρα πρακτικά θέλετε ζεύγη (νότας - διάρκειας). Μπορείτε να είστε όσο αφαιρετικοί/ες ή λεπτομερείς θέλετε.