ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2021-22
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Λύσεις Τέταρτης Σειράς Ασκήσεων

[$\star$] Άσκηση 1 - Μετασχ. Fourier και Ιδιότητες - Ι

(α΄) Είναι

$$A\mathrm{rect}(t/T) \longleftrightarrow AT\mathrm{sinc}(fT) \tag{1}$$

και από ιδιότητα δυικότητας

$$AT\mathrm{sinc}(Tt) \longleftrightarrow A\mathrm{rect}(f/T) \tag{2}$$

Έστω

$$w(t) = \mathrm{sinc}(t) \longleftrightarrow W(f) = \mathrm{rect}(f) \tag{3}$$

Το πρώτο δοθέν σήμα $z_1(t)$ μπορεί να γραφεί ως

$$y(t) = w(t - b_1) \tag{4}$$

και

$$z_1(t) = y(at) \tag{5}$$

Στο χώρο του Fourier

$$Y(f) = W(f)e^{-j2\pi f b_1} \tag{6}$$

και

$$Z_1(f) = \frac{1}{|a|}Y\left(\frac{f}{a}\right) \tag{7}$$

και άρα

$$Z_1(f) = \frac{1}{|a|}W\left(\frac{f}{a}\right)e^{-j2\pi\frac{f}{a}b_1} = \frac{1}{|a|}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{a}\right)e^{-j2\pi\frac{f}{a}b_1} \tag{8}$$

Όμοια για το δεύτερο δοθέν σήμα $z_2(t)$,

$$Z_2(f) = \frac{1}{|a|}W\left(\frac{f}{a}\right)e^{-j2\pi\frac{f}{a}b_2} \tag{9}$$

Έτσι από την ιδιότητα της συνέλιξης στο χρόνο

$$X_1(f) = Z_1(f)Z_2(f) = \frac{1}{|a|^2}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{a}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{f}{a}\right)e^{-j2\pi\frac{f}{a}(b_1+b_2)} = \frac{1}{|a|^2}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{a}\right)e^{-j2\pi\frac{f}{a}(b_1+b_2)} \tag{10}$$

Γυρίζοντας πίσω στο χρόνο

$$x_1(t) = \frac{1}{|a|}\mathrm{sinc}(at - (b_1 + b_2)) \tag{11}$$

(β΄) Όμοια με το προηγούμενο ερώτημα

$$Z_1(f) = \frac{1}{a}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{a}\right) \tag{12}$$

και

$$Z_2(f) = \frac{1}{b}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{b}\right) \tag{13}$$

Άρα
$$X_2(f) = Z_1(f)Z_2(f) = \frac{1}{ab}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{a}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{f}{b}\right) \tag{14}$$
Το γινόμενο των δυο τετραγωνικών παλμών εξαρτάται από τη διάρκειά τους.

- Αν $a > b$ τότε
$$\mathrm{rect}\left(\frac{f}{a}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{f}{b}\right) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{b}\right) \tag{15}$$
άρα
$$X_2(f) = \frac{1}{ab}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{b}\right) \tag{16}$$
οπότε γυρνώντας πίσω στο χρόνο
$$x_2(t) = \frac{1}{a}\mathrm{sinc}(bt) \tag{17}$$

- Αν $b > a$ τότε
$$\mathrm{rect}\left(\frac{f}{a}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{f}{b}\right) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{a}\right) \tag{18}$$
άρα
$$X_2(f) = \frac{1}{ab}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{a}\right) \tag{19}$$
οπότε γυρνώντας πίσω στο χρόνο
$$x_2(t) = \frac{1}{b}\mathrm{sinc}(at) \tag{20}$$
Έτσι τελικά
$$x_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{a}\mathrm{sinc}(bt), & a > b \\ \frac{1}{b}\mathrm{sinc}(at), & b > a \end{cases} \tag{21}$$

(γ΄) Είναι
$$X_3(f) = F\{e^{-t}u(t)\}F\{e^{-(t+1)}u(t-1)\} \tag{22}$$
Γνωρίζουμε ότι
$$e^{-t}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{1+j2\pi f} \tag{23}$$
και από την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης
$$e^{-(t-1)}u(t-1) \longleftrightarrow \frac{1}{1+j2\pi f}e^{-j2\pi f} \tag{24}$$
Όμως
$$e^{-(t+1)}u(t-1) = e^{-2}e^{-(t-1)}u(t-1) \longleftrightarrow e^{-2}\frac{1}{1+j2\pi f}e^{-j2\pi f} \tag{25}$$
Άρα
$$X_3(f) = \frac{1}{1+j2\pi f}e^{-2}\frac{1}{1+j2\pi f}e^{-j2\pi f} = e^{-2}\frac{1}{(1+j2\pi f)^2}e^{-j2\pi f} \tag{26}$$
Από πίνακες μετασχηματισμών έχουμε
$$te^{-t}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{(1+j2\pi f)^2} \tag{27}$$
οπότε από το ζεύγος αυτό και την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης
$$x_3(t) = e^{-2}(t-1)e^{-(t-1)}u(t-1) \tag{28}$$

Άσκηση 2 - Φάσματα Πλάτους και Φάσης

(α΄) Αφού $|X(f)| = 1,\ \angle X(f) = 2\pi f$, μπορούμε να γράψουμε

$$X(f) = |X(f)|e^{j\angle X(f)} = 1e^{j2\pi f} \longleftrightarrow x(t) = \delta(t+1) \tag{29}$$

(β΄) Αφού $|X(f)| = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{3}\right),\ \angle X(f) = 10\pi f$, μπορούμε να γράψουμε

$$X(f) = |X(f)|e^{j\angle X(f)} = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{3}\right)e^{j2\pi 5f} = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{3}\right)e^{j2\pi\frac{f}{3}15} \longleftrightarrow x(t) = 3\mathrm{sinc}(3t+15) = 3\mathrm{sinc}(3(t+5)) \tag{30}$$

Άσκηση 3 - Μετασχ. Fourier και Ιδιότητες ΙΙ

Θα εχουμε

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 df \tag{31}$$

από το θεώρημα του Parseval. Άρα, από το γνωστό πλέον ζεύγος

$$T\mathrm{sinc}(Tt) \longleftrightarrow \mathrm{rect}\left(\frac{f}{T}\right) \tag{32}$$

θα είναι

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\mathrm{rect}\left(\frac{f}{200}\right)\right|^2 df = \int_{-100}^{100} df = f\Big|_{-100}^{100} = 200 \tag{33}$$

[⋆] Άσκηση 4 - Έξοδος ΓΧΑ συστήματος για περιοδική είσοδο Ι

(α΄) Από την ιδιότητα της παραγώγισης έχουμε

$$RC(j2\pi f)^2V_1(f) + j2\pi fV_1(f) + \frac{R}{L}V_1(f) = j2\pi fV_0(f) \tag{34}$$

και άρα

$$H(f) = \frac{V_1(f)}{V_0(f)} = \frac{j2\pi f}{-4\pi^2RCf^2 + j2\pi f + \frac{R}{L}} = \frac{j2\pi fL}{-4\pi^2RLCf^2 + j2\pi Lf + R} \tag{35}$$

(β΄) Αν $R = 6\ \Omega$, $L = 5$ H, και $C = 1/30$ F, τότε

$$H(f) = \frac{j2\pi 5f}{-4\pi^2f^2 + j2\pi 5f + 6} \tag{36}$$

Για είσοδο $v_0(t) = 5\cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right) = 5\cos\left(2\pi\frac{1}{2\pi}t + \frac{\pi}{3}\right)$, η έξοδος θα είναι

$$v_1(t) = 5\left|H\left(\frac{1}{2\pi}\right)\right|\cos\left(t + \frac{\pi}{3} + \angle H\left(\frac{1}{2\pi}\right)\right) \tag{37}$$

Άρα

$$\left|H\left(\frac{1}{2\pi}\right)\right| = \left|\frac{j5}{5+j5}\right| = \left|\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\right| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{38}$$

$$\angle H\left(\frac{1}{2\pi}\right) = \tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4} \tag{39}$$

Οπότε από τη Σχέση (37)

$$v_1(t) = \frac{5\sqrt{2}}{2}\cos\left(t + \frac{7\pi}{12}\right) \tag{40}$$

(γ΄) Γνωρίζουμε οτι ένα περιοδικό σήμα που αναπτύσσεται σε σειρά Fourier με συντελεστές X_k κι εμφανίζεται στην είσοδο ενός συστήματος με συχνοτική απόκριση $H(f)$, η έξοδος θα έχει συντελεστές $X_k H(kf_0)$. Πιο συγκεκριμένα

$$Y_k = X_k H(kf_0) = X_k H\left(\frac{20k}{\pi}\right) = \frac{1}{\pi^2}\left[\frac{j200}{-1600k^3 + j200k^2 + 6k}\right] \tag{41}$$

(δ΄) Θα είναι

$$H(f) = \frac{j2\pi 5f}{-4\pi^2 f^2 + j2\pi 5f + 6} = \frac{A}{3 + j2\pi f} + \frac{B}{2 + j2\pi f} \tag{42}$$

αφού η ρητή απόκριση συχνότητας του $j2\pi f$ έχει βαθμό πολυωνύμου αριθμητή μικρότερο από τον αντίστοιχο του παρονομαστή. Οπότε

$$A = H(f)(3 + j2\pi f)\Big|_{j2\pi f=-3} = 15 \tag{43}$$

$$B = H(f)(2 + j2\pi f)\Big|_{j2\pi f=-2} = -10 \tag{44}$$

κι άρα

$$H(f) = \frac{15}{3 + j2\pi f} - \frac{10}{2 + j2\pi f} \longleftrightarrow h(t) = 15e^{-3t}u(t) - 10e^{-2t}u(t) \tag{45}$$

μέσω γνωστών ζευγών από πίνακες μετασχηματισμού.

Άσκηση 5 - Έξοδος ΓΧΑ συστήματος για περιοδική είσοδο ΙΙ

(α΄) Αν σε ένα ΓΧΑ σύστημα με απόκριση συχνότητας

$$H(f) = j2\pi f \tag{46}$$

Η περιοδική είσοδος

$$x(t) = 1 + \frac{1}{4}\cos(2t) + \frac{1}{9}\sin(3t) \tag{47}$$

θα δώσει έξοδο

$$y(t) = 1 \cdot H(0) + \frac{1}{4}\left|H\left(\frac{1}{\pi}\right)\right|\cos\left(2t + \angle H\left(\frac{1}{\pi}\right)\right) + \frac{1}{9}\left|H\left(\frac{3}{2\pi}\right)\right|\sin\left(3t + \angle H\left(\frac{3}{2\pi}\right)\right) \tag{48}$$

Θα είναι

$$H(0) = 0 \tag{49}$$

$$H\left(\frac{1}{\pi}\right) = 2j = 2e^{j\pi/2} \Longrightarrow \left|H\left(\frac{1}{\pi}\right)\right| = 2,\ \angle H\left(\frac{1}{\pi}\right) = \frac{\pi}{2} \tag{50}$$

$$H\left(\frac{3}{2\pi}\right) = 3j = 3^{j\pi/2} \Longrightarrow \left|H\left(\frac{3}{2\pi}\right)\right| = 3,\ \angle H\left(\frac{3}{2\pi}\right) = \frac{\pi}{2} \tag{51}$$

Άρα

$$y(t) = 1 \cdot 0 + \frac{2}{4}\cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{3}{9}\sin\left(3t + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{1}{3}\cos(3t) \tag{52}$$

Παρατηρούμε ότι η έξοδος είναι η παράγωγος της εισόδου. Άρα το σύστημα παραγωγίζει όποια είσοδο του εμφανιστεί. Αυτό επιβεβαιώνεται και από τη μορφή της απόκρισης σε συχνότητα, γιατί

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = j2\pi f \Longleftrightarrow Y(f) = X(f)j2\pi f \longleftrightarrow y(t) = \frac{d}{dt}x(t) \tag{53}$$

Λύσεις με χρήση μετασχ. Fourier και θεώρημα συνέλιξης αντί της παραπάνω λύσης θεωρούνται σωστές.

(β΄) Η απόκριση συχνότητας γράφεται

$$H(f) = \frac{j2\pi f - 1}{4\pi^2 f^2 + 4} = \frac{j2\pi f - 1}{-(j2\pi f)^2 + 4} \tag{54}$$

και άρα

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{j2\pi f - 1}{-(j2\pi f)^2 + 4} \Longleftrightarrow Y(f)(-(j2\pi f)^2 + 4) = X(f)(j2\pi f - 1) \tag{55}$$

και γυρίζοντας πίσω στο χρόνο

$$-\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 4y(t) = \frac{d}{dt}x(t) - x(t) \tag{56}$$

Άσκηση 6 - Μετασχ. Fourier και Περιοδικά Σήματα

Μια περίοδος του περιοδικού σήματος μπορεί να γραφεί ως

$$x_{T_0}(t) = 2\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right) - \mathrm{tri}(t) \tag{57}$$

και στο χώρο του Fourier

$$X_{T_0}(f) = 4\mathrm{sinc}(2f) - \mathrm{sinc}^2(f) \tag{58}$$

Μπορούμε να βρούμε τους συντελεστές του περιοδικού, με περίοδο $T_0 = 3$, σήματος ως

$$X_k = \frac{1}{T_0} X_{T_0}\left(\frac{k}{T_0}\right) = \frac{4}{3}\mathrm{sinc}\left(\frac{2k}{3}\right) - \frac{1}{3}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{k}{3}\right) \tag{59}$$

Άσκηση 7 - Μετασχηματισμός Fourier στο MATLAB/Octave

Κώδικας MATLAB/Octave

Άσκηση 8 - Μετασχηματισμός Fourier και Παθολογία Φωνής

Κώδικας MATLAB/Octave

[⋆] Άσκηση 9 - Επέκταση της προηγούμενης άσκησης

Κώδικας MATLAB/Octave

[⋆] Άσκηση 10 - Μετασχηματισμός Fourier κι Αφαίρεση Θορύβου

Κώδικας MATLAB/Octave

Άσκηση 11 - Μετασχηματισμός Fourier και Ανάλυση Ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος

Κώδικας MATLAB/Octave

[⋆] Άσκηση 12 - Μετασχηματισμός Fourier και Ανάλυση Ήχου

Κώδικας MATLAB/Octave

Μια απλή προσέγγιση θα ήταν να διατρέξουμε το φασματογράφημα στήλη-στήλη, και να κρατούμε τις περιοχές όπου υπάρχουν peaks, τόσο τη χρονική στιγμή όσο και τη συχνότητα, σε μια λίστα. Προχωρώντας μια-μια τις στήλες, μπορούμε να ελέγχουμε πότε παραμένει ή χάνεται μια σημαντική φασματική συνιστώσα, λαμβάνοντας έτσι τη διάρκειά της. Η συχνότητά της μπορεί απλώς να υπολογιστεί από τον αριθμό της γραμμής στην οποία βρίσκεται στον διδιάστατο πίνακα του φασματογραφήματος. Μετά τη συλλογή των συχνοτήτων, ξεκινώντας από τις μικρότερες ελέγχουμε αν υπάρχει στο φασματογράφημα, την ίδια χρονική στιγμή, δεύτερη ή τρίτη αρμονική συχνότητα έτσι ώστε να επιβεβαιώσουμε ότι πρόκειται για πλήκτρο πιάνου - και όχι για κάποιο ασήμαντο peak που έτυχε να πιάσουμε. Στη συνέχεια, και γνωρίζοντας τη διάρκεια παρουσίας κάθε peak, μπορούμε να πούμε ποιό πλήκτρο πιάνου παρήγαγε αυτήν την αρμονική σειρά.