ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2021-22
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1 - Σειρές Fourier - I

Το αρχικό μας σήμα έχει συντελεστές

$$X_k = \frac{1-e^{-1}(-1)^k}{j2\pi k+2} \tag{1}$$

και περίοδο $T_0 = 2$, άρα

(α') το σήμα $y_{T_0}(t) = \begin{cases} e^{-t}, & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} < t < \frac{3}{2} \end{cases}$ είναι το αρχικό μας σήμα μετατοπισμένο αριστερά κατά $t_0 = 1/2$ και πολλαπλασιασμένο με $e^{1/2}$, οπότε οι συντελεστές του θα είναι - από την ιδιότητα της γραμμικότητας και της χρονικής μετατόπισης - ως

$$Y_k = e^{1/2}\frac{1-e^{-1}(-1)^k}{j2\pi k+2}e^{j2\pi k f_0 t_0} = e^{1/2}\frac{1-e^{-1}(-1)^k}{j2\pi k+2}e^{j2\pi k\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = e^{1/2}\frac{1-e^{-1}(-1)^k}{j2\pi k+2}e^{j\frac{\pi k}{2}} \tag{2}$$

με την ίδια περίοδο.

(β') το σήμα $w_{T_0}(t) = \begin{cases} e^{-4t}, & 0 < t < \frac{1}{4} \\ 0, & \frac{1}{4} < t < \frac{1}{2} \end{cases}$ είναι το αρχικό μας σήμα χρονικά κλιμακώμενο κατά παράγοντα 4, δηλ. $w(t) = x(4t)$, και από την ιδιότητα της χρονικής κλικάκωσης οι συντελεστές του δίνονται ως

$$W_k = X_k \tag{3}$$

αλλά η νέα περίοδος είναι $T_0' = \frac{T_0}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Άσκηση 2 - Σειρές Fourier - II

Το σήμα-παλάτι του Buckingham μπορεί να σπάσει σε τέσσερα υποσήματα, όπως στο Σχήμα 1. Καθένα από αυτά έχει περίοδο $T_0 = 5$. Γνωρίζουμε ότι για μια σειρά από συναρτήσεις Δέλτα με περίοδο T_0 οι συντελεστές της είναι $X_{\delta_k} = 1/T_0$, ενώ μπορούμε να βρούμε ότι οι συντελεστές X_{pulse_k} ενός συμμετρικού ως προς το μηδέν τετραγωνικού περιοδικού παλμού διάρκειας $T < T_0$ και πλάτους 1 είναι

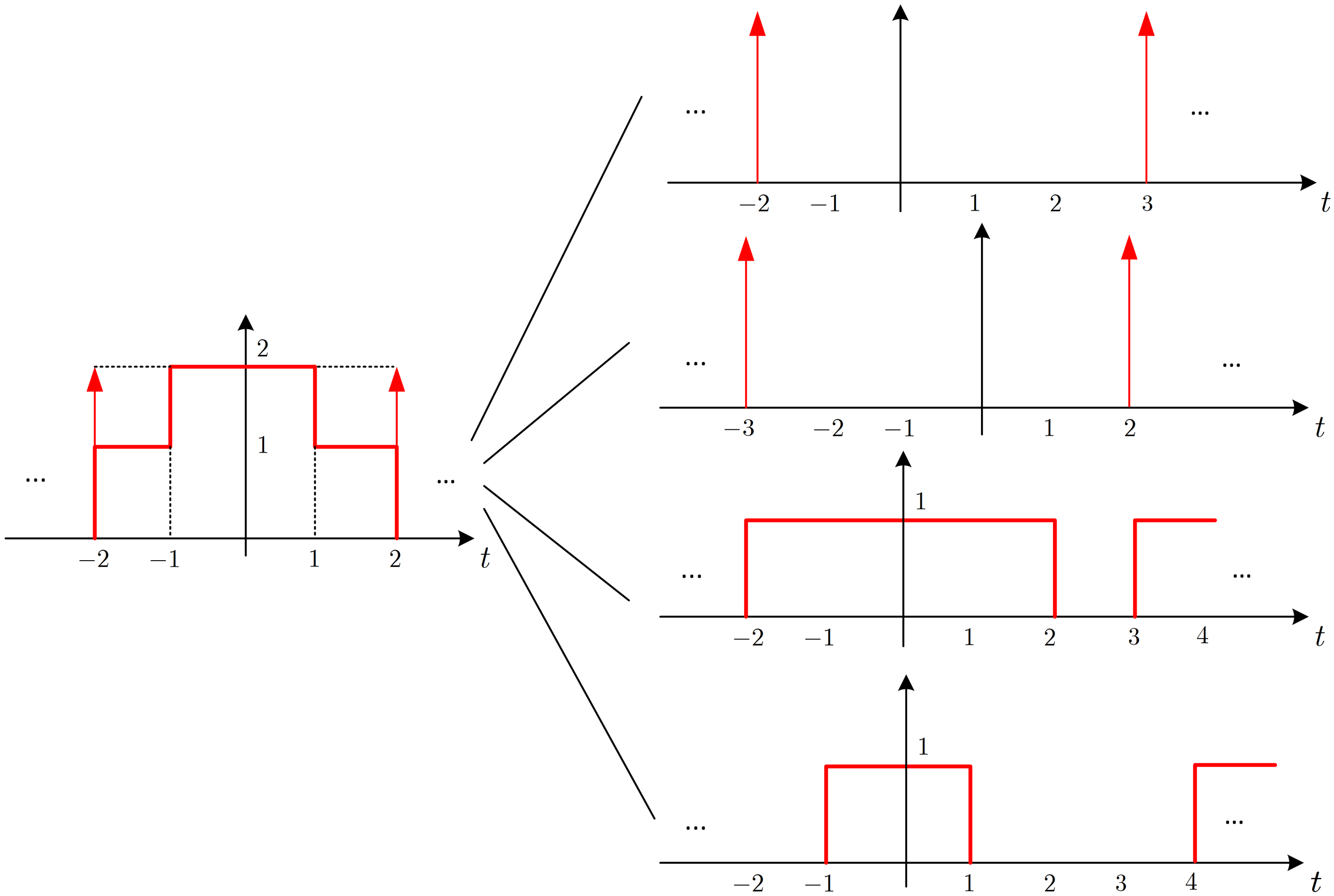
$$X_{pulse_k,T} = \frac{1}{T_0}\int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{\pi k}\sin\left(\frac{\pi k T}{T_0}\right) \tag{4}$$

- Για το πρώτο σήμα, έχουμε μια σειρά από συναρτήσεις Δέλτα, μετατοπισμένη δεξιά κατά $t_0 = 2$ αριστερά, με περίοδο $T_0 = 5$ και συντελεστή 2. Από την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης θα είναι

$$X_1 = 2X_{\delta_k}e^{j2\pi k\frac{t_0}{T_0}} = \frac{2}{5}e^{j\frac{4\pi k}{5}} \tag{5}$$

- Για το δεύτερο σήμα, έχουμε μια σειρά από συναρτήσεις Δέλτα, μετατοπισμένη δεξιά κατά $t_0 = 2$ δεξιά, με περίοδο $T_0 = 5$, ξανά με συντελεστή 2. Από την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης θα είναι

$$X_2 = 2X_{\delta_k}e^{-j2\pi k\frac{t_0}{T_0}} = \frac{2}{5}e^{-j\frac{4\pi k}{5}} \tag{6}$$



Σχήμα 1: *Παλάτι και διάσπασή του.*

.

- Για το τρίτο σήμα, έχουμε έναν παλμό διάρκειας $T = 4$ επαναλαμβανόμενο με περίοδο $T_0 = 5$. Με βάση την εξίσωση (4) οι συντελεστές του θα είναι

$$X_3 = X_{pulse_k, T=4} = \frac{1}{\pi k} \sin\left(\frac{4\pi k}{5}\right) \tag{7}$$

- Για το τέταρτο σήμα, έχουμε έναν παλμό διάρκειας $T = 2$ επαναλαμβανόμενο με περίοδο $T_0 = 5$. Με βάση την εξίσωση (4) οι συντελεστές του θα είναι

$$X_4 = X_{pulse_k, T=2} = \frac{1}{\pi k} \sin\left(\frac{2\pi k}{5}\right) \tag{8}$$

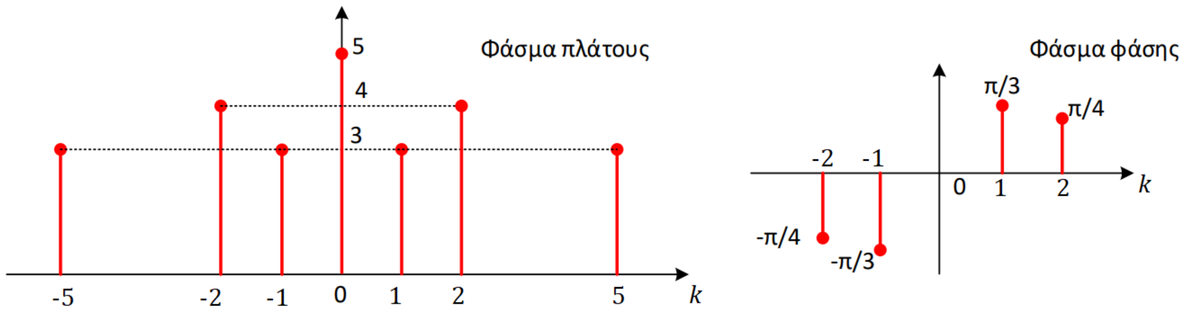
Άρα οι συντελεστές Fourier του περιοδικού παλατιού είναι

$$\begin{align}
X_k &= X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \tag{9}\\
&= \frac{2}{5} e^{j\frac{4\pi k}{5}} + \frac{2}{5} e^{-j\frac{4\pi k}{5}} + \frac{1}{\pi k} \sin\left(\frac{4\pi k}{5}\right) + \frac{1}{\pi k} \sin\left(\frac{2\pi k}{5}\right) \tag{10}\\
&= \frac{4}{5} \cos\left(\frac{4\pi k}{5}\right) + \frac{1}{\pi k}\left(\sin\left(\frac{4\pi k}{5}\right)\right) + \frac{1}{\pi k}\left(\sin\left(\frac{2\pi k}{5}\right)\right) \tag{11}\\
&= \frac{4}{5} \cos\left(\frac{4\pi k}{5}\right) + \frac{4}{5} \text{sinc}\left(\frac{4k}{5}\right) + \frac{2}{5} \text{sinc}\left(\frac{2k}{5}\right) \tag{12}
\end{align}$$

Άλλες λύσεις (π.χ. με διαφορετική διάσπαση ή με μετασχ. Fourier και δειγματοληψία του ανά k/T_0) είναι αποδεκτές.

Άσκηση 3 - Σειρές Fourier - III

Για κάθε συνιστώσα στο φάσμα πλάτους και φάσης του περιοδικού σήματος με περίοδο $T_0 = 0.002$ s στο Σχήμα 2 αντιστοιχεί ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα.



Σχήμα 2: *Φάσματα Άσκησης 3.*

(α') **Λάθος:** *Τα παραπάνω φάσματα αντιστοιχούν σε ένα σήμα με ισχύ*

$$P_x = 39 \tag{13}$$

Από το θεώρημα του Parseval και το φάσμα πλάτους

$$P_x = \sum_k |X_k|^2 = 5^2 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 3^2 = 25 + 18 + 32 + 18 = 93 \tag{14}$$

(β') Η περίοδος είναι $T_0 = 0.002$ και άρα η θεμελιώδης συχνότητα είναι $f_0 = 500$ Hz. Είναι

$$x(t) = 5 + 3e^{j(2\pi 500t + \frac{\pi}{3})} + 3e^{-j(2\pi 500t + \frac{\pi}{3})} + 4e^{j(2\pi 1000t + \frac{\pi}{4})} + 4e^{-j(2\pi 1000t + \frac{\pi}{4})} + 3e^{j2\pi 2500t} + 3e^{-j(2\pi 2500t} \tag{15}$$

η εκθετική σειρά και

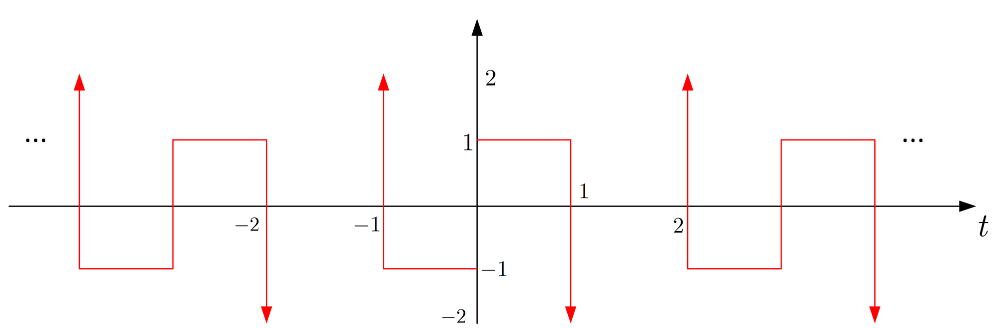
$$x(t) = 5 + 6\cos\left(2\pi 500t + \frac{\pi}{3}\right) + 8\cos\left(2\pi 1000t + \frac{\pi}{4}\right) + 6\cos\left(2\pi 2500t\right) \tag{16}$$

συνδυάζοντας τα εκθετικά με τη σχέση του Euler.

Άσκηση 4 - Σειρές Fourier - IV

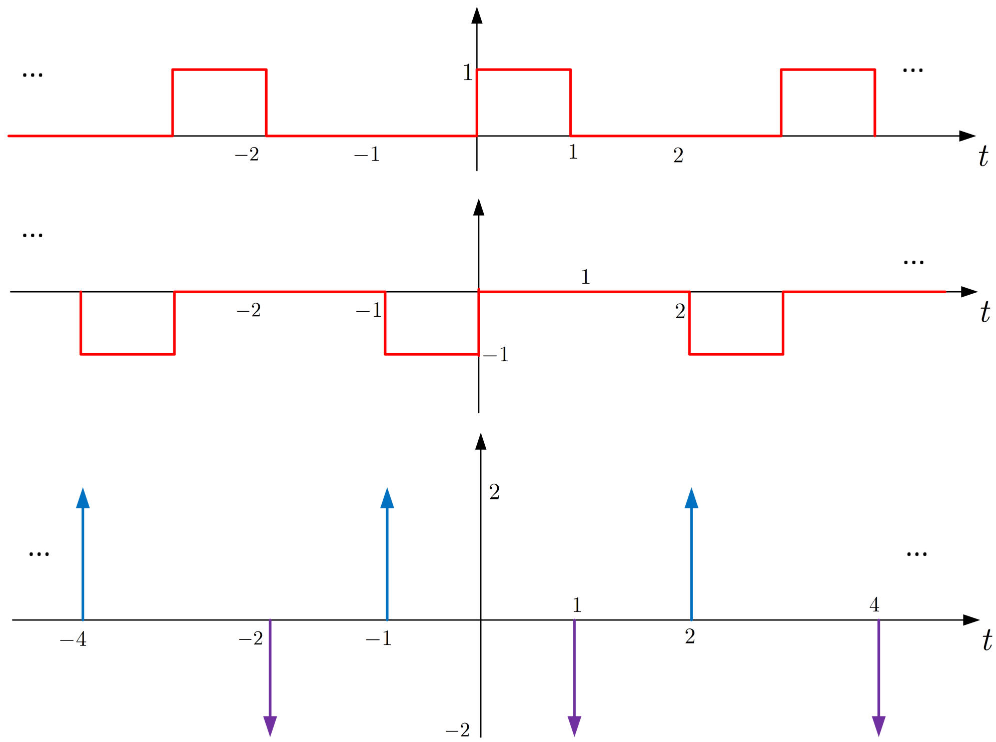
(α') Έχουμε τέσσερα ολοκληρώματα με βάση τον ορισμό, τα δυο με κατά παράγοντες ολοκλήρωση. Αναζητούμε ευκολότερους τρόπους. ☺

(β') Έστω η παράγωγος του περιοδικού σήματος της εκφώνησης, που δίνεται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3: *Παράγωγος περιοδικού σήματος Άσκησης 4.*

Από το Σχήμα 3 μπορούμε να διασπάσουμε το περιοδικό σήμα σε απλούστερα, όπως οι δυο ± 1 παλμοί, και το ζεύγος των συναρτήσεων Δέλτα. Η προτεινόμενη διάσπαση φαίνεται στο Σχήμα 4. Ο περιοδικός παλμός με πλάτος



Σχήμα 4: *Διάσπαση παραγώγου περιοδικού σήματος Άσκησης 4.*

1 και περίοδο $T_0 = 3$ έχει συντελεστές

$$X_{pulseup_k} = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x_{pulseup}(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{3}\int_0^1 e^{-j2\pi kt/3} = \frac{1}{3}\frac{1}{(-j2\pi k/3)}\left[e^{-j2\pi k/3} - 1\right] = \frac{1}{\pi k}e^{-j\pi k/3}\sin\left(\frac{\pi k}{3}\right) \tag{17}$$

Ο περιοδικός παλμός με πλάτος -1 μας προκύπτει από τον προηγούμενο με αρνητικό πρόσημο πλάτους και ανάκλαση ως προς τον κατακόρυφο άξονα, και άρα έχει συντελεστές

$$X_{pulsedown_k} = -X_{pulseup_{-k}} = -\frac{1}{\pi k}e^{j\pi k/3}\sin\left(\frac{\pi k}{3}\right) \tag{18}$$

Οπότε το περιοδικό άθροισμα των δυο παλμών έχει συντελεστές Fourier ως

$$X_{pulses_k} = \frac{1}{\pi k}e^{-j\pi k/3}\sin\left(\frac{\pi k}{3}\right) - \frac{1}{\pi k}e^{j\pi k/3}\sin\left(\frac{\pi k}{3}\right) = -j\frac{2}{\pi k}\sin^2\left(\frac{\pi k}{3}\right) \tag{19}$$

Το ζεύγος συναρτήσεων δέλτα που επαναλαμβάνεται περιοδικά με περίοδο $T_0 = 3$ έχει συντελεστές Fourier ως το άθροισμα των συντελεστών Fourier δυο υποσημάτων, μιας περιοδικής συνάρτησης δέλτα με συντελεστή 2, μετατοπισμένης κατά $t_0 = 1$ αριστερά και μιας περιοδικής συνάρτησης δέλτα με συντελεστή -2, μετατοπισμένης κατά $t_0 = 1$ δεξιά. Από γνωστους συντελεστές για την περιοδική συνάρτηση δέλτα, $X_{\delta_k} = 1/T_0$, και την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης

$$X_{deltas_k} = 2X_{\delta_k}e^{j2\pi k/3} - 2X_{\delta_k}e^{-j2\pi k/3} = j\frac{4}{3}\sin\left(\frac{2\pi k}{3}\right) \tag{20}$$

Οπότε συνολικά θα έχουμε

$$X_{\text{παράγωγος}_k} = X_{pulses_k} + X_{deltas_k} = -j\frac{2}{\pi k}\sin^2\left(\frac{\pi k}{3}\right) + j\frac{4}{3}\sin\left(\frac{2\pi k}{3}\right) \tag{21}$$

Από την ιδιότητα της ολοκλήρωσης θα έχουμε

$$X_k = \frac{X_{\text{παράγωγος}_k}}{j2\pi k f_0} = \frac{X_{\text{παράγωγος}_k}}{j\frac{2\pi k}{3}} = \frac{3}{j2\pi k}\Big[-j\frac{2}{\pi k}\sin^2\left(\frac{\pi k}{3}\right) + j\frac{4}{3}\sin\left(\frac{2\pi k}{3}\right)\Big] \tag{22}$$

$$= \frac{3}{\pi k}\Big[\frac{2}{3}\sin\left(\frac{2\pi k}{3}\right) - \frac{1}{\pi k}\sin^2\left(\frac{\pi k}{3}\right)\Big] \tag{23}$$

$$= \frac{2}{\pi k}\sin\left(\frac{2\pi k}{3}\right) - \frac{3}{(\pi k)^2}\sin^2\left(\frac{\pi k}{3}\right) \tag{24}$$

$$= \frac{4}{3}\text{sinc}\left(\frac{2k}{3}\right) - \frac{1}{3}\text{sinc}^2\left(\frac{k}{3}\right) \tag{25}$$

Λύσεις με διαφορετική διάσπαση ή με άλλο τρόπο είναι αποδεκτές.

Άσκηση 5 - Σειρές Fourier - V

Οι συντελεστές Fourier ενός περιοδικού σήματος $x(t)$ δίνονται ως

$$X_k = \frac{1-\cos(\pi k)}{(\pi k)^2} \tag{26}$$

(α') Επειδή οι συντελεστές είναι καθαρά πραγματικοί αριθμοί, το σήμα στο χρόνο είναι άρτιο.

(β') Αναγνωρίζουμε ότι $\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)dt = X_0$. Έτσι

$$X_k = \frac{1-\cos(\pi k)}{(\pi k)^2} = 2\frac{\sin^2\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{(\pi k)^2} = \frac{1}{2}\text{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right) \Longrightarrow X_0 = X_k\Big|_{k=0} = \frac{1}{2} \tag{27}$$

(γ') Αν $Y_k = \sqrt{X_k}$, τότε η ισχύς του σήματος θα δίνεται από το θεώρημα Parseval, ως

$$P_y = \sum_k |Y_k|^2 = \sum_k |\sqrt{X_k}|^2 = \sum_k X_k = \sum_k \frac{1}{2}\text{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right) = \frac{1}{2}\sum_k \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1 \tag{28}$$

γιατί

$$\text{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right) = \frac{4}{\pi^2 k^2}\sin^2\left(\frac{\pi k}{2}\right) = \begin{cases} \frac{4}{\pi^2 k^2}, & k \text{ περιττά} \\ 0, & k \text{ άρτια} \\ 1, & k = 0 \end{cases} \tag{29}$$

Άρα

$$\sum_k \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right) = 1 + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k \text{ περιττά}} \frac{1}{k^2} \tag{30}$$

$$= 1 + \frac{4}{\pi^2}\left[\sum_{k=-\infty,\ \text{περιττά}}^{-1} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1,\ \text{περιττά}}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\right] \tag{31}$$

$$= 1 + \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{8}\right) \tag{32}$$

$$= 1 + \frac{4}{\pi^2}\frac{\pi^2}{4} = 2 \tag{33}$$

οπότε προκύπτει το αποτέλεσμα της σχέσης (28).

Άσκηση 6 - Σειρές Fourier στο MATLAB/Octave
Κώδικας MATLAB/Octave

[$\star$] **Άσκηση 7 - Σύνθεση Μουσικής στο MATLAB/Octave**
Κώδικας MATLAB/Octave

[$\star$] **Άσκηση 8 - Βελτίωση της προηγούμενης άσκησης**
Κώδικας MATLAB/Octave

Άσκηση 9 - ΓΧΑ Συστήματα και Παραγωγή Ηχούς
Κώδικας MATLAB/Octave

(α') Για είσοδο $x(t) = \delta(t)$ θα έχουμε

$$h(t) = \delta(t) + a\delta(t - t_d) \tag{34}$$

(β') Όμοια θα είναι

$$h(t) = \delta(t) + \sum_{i=1}^{N} a_i \delta(t - t_i) \tag{35}$$