ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2021-22
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Λύσεις Δεύτερης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1 - Σήματα

(α΄) i. Είναι

$$-x(-t) = -(-t)^3 = t^3 = x(t) \tag{1}$$

άρα είναι περιττό.

ii. Είναι

$$-x(-t) = -(-t)^3|-t| = t^3|t| = x(t) \tag{2}$$

άρα είναι περιττό.

iii. Είναι

$$x(-t) = |(-t)^3| = |-t^3| = |t^3| = x(t) \tag{3}$$

άρα είναι άρτιο.

iv. Είναι

$$x(t) = \frac{1}{2}(ejt + e^{-jt}) = \cos(2\pi t) \tag{4}$$

από τις σχέσεις του Euler. Ξέρουμε ότι για το συνημιτονο ισχύει $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$, δηλ. είναι άρτιο σήμα. Επαλήθευση:

$$x(-t) = \cos(2\pi(-t)) = \cos(-2\pi t) = \cos(2\pi t) \tag{5}$$

v. Είναι

$$-x(-t) = -(1 + \sin(2\pi(-t)) = -1 - \sin(-2\pi t) = -1 + \sin(2\pi t) \neq x(t) \tag{6}$$

$$x(-t) = 1 + \sin(2\pi(-t)) = 1 + \sin(-2\pi t) = 1 - \sin(2\pi t) \neq x(t) \tag{7}$$

άρα δεν είναι ούτε άρτιο ούτε περιττό.

(β΄) i. *Το άθροισμα δυο σημάτων ισχύος είναι πάντα σήμα ισχύος*: Λάθος. το άθροισμα $u(t) - u(t-2)$ είναι άθροισμα δυο σημάτων ισχύος, των $u(t)$ και $-u(t-2)$ αλλά το αποτέλεσμα είναι ένας τετραγωνικός παλμός με κέντρο το $t_0 = 1$ και διάρκεια $T = 2$. Αυτός είναι σήμα ενέργειας.

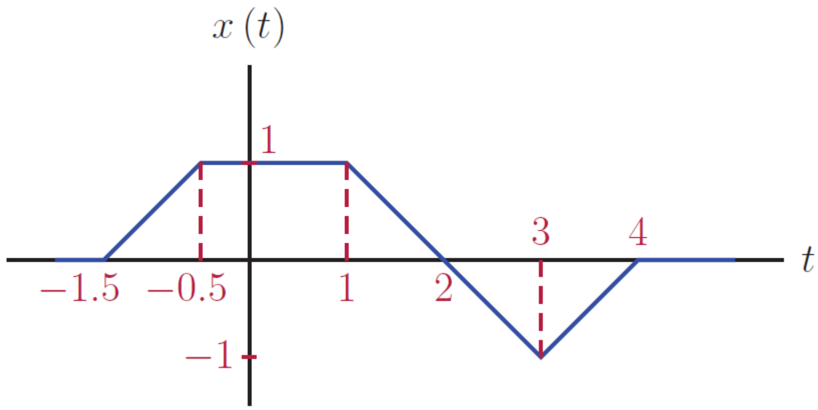
ii. *Το γινόμενο δυο σημάτων ισχύος μπορεί να είναι ένα σήμα ενέργειας*: Σωστό. Το γινόμενο $u(t)u(2-t) = 1$, για $0 < t < 2$, που είναι ένας τετραγωνικός παλμός διάρκειας $T = 2$ με κέντρο $t_0 = 1$. Ξανά, ο παλμός είναι σήμα ενέργειας.

Κάθε παρόμοια αιτιολόγηση - ή κάθε άλλη, τεκμηριωμένη επαρκώς - είναι αποδεκτή.

Άσκηση 2 - Μετασχηματισμοί Σημάτων

Έστω το σήμα του σχήματος 1.

(α΄) $x(-t+3)$: χρονική αντιστροφή και μετατόπιση κατά 3 δεξιά



Σχήμα 1: *Σχήμα Άσκησης 2.*

(β΄) $x(-t)$: χρονική αντιστροφή

(γ΄) $x\left(\frac{t-1}{3}\right)$: χρονική κλιμάκωση κατά $1/3$ και μετατόπιση κατά 1 δεξιά

(δ΄) $x(4t-3)$: χρονική κλιμάκωση κατά 4 και μετατόπιση κατά $3/4$ δεξιά

Τα σχήματα φαίνονται στο Σχήμα 2.

Άσκηση 3 - Συναρτήσεις Δέλτα

(α΄)

$$\frac{(t^2+1)\delta(t+1)}{t^2+9} = \left.\frac{(t^2+1)}{t^2+9}\right|_{t=-1}\delta(t+1) = \frac{2}{10}\delta(t+1) = \frac{1}{5}\delta(t+1) \tag{8}$$

(β΄)

$$\frac{\sin(at)\delta(t)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin(at)}{t}\delta(t) = a\lim_{t\to 0}\frac{\sin(at)}{at}\delta(t) = a\delta(t) \tag{9}$$

(γ΄)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t-1}\cos(\pi(t-5)/2)\delta(t-3)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t-1}\cos(\pi(t-5)/2)\Big|_{t=3}\delta(t-3)dt \tag{10}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2}\cos(-\pi)\delta(t-3)dt = (-e^2)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-3)dt = -e^2 \tag{11}$$

(δ΄)

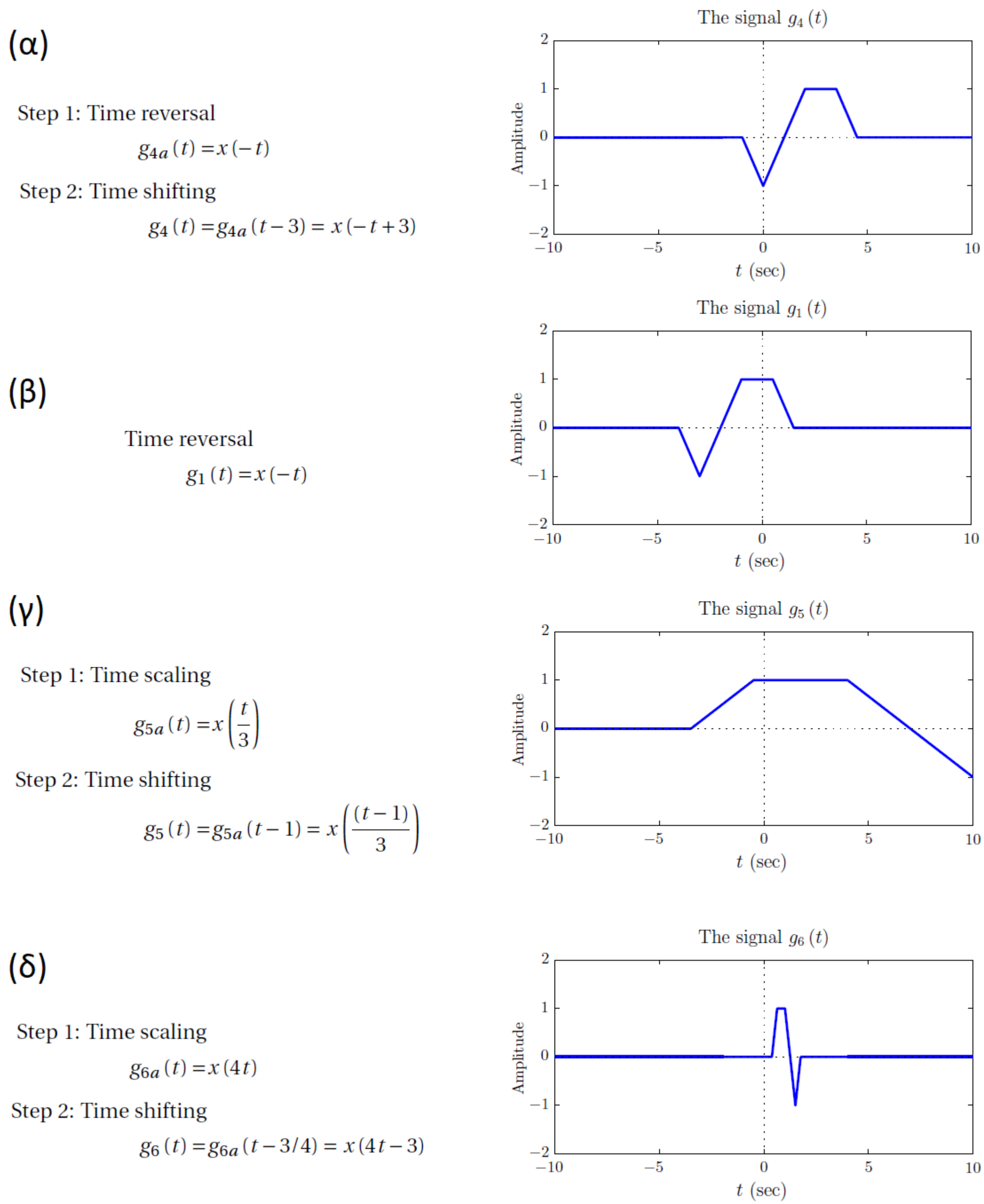
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(2t-3)\sin(\pi t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\sin(\pi u/2)\frac{1}{2}\delta(u-3)du = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(\pi u/2)\Big|_{u=3}\delta(u-3)dt = -\frac{1}{2} \tag{12}$$

(ε΄)

$$\int_{t}^{\infty}(\tau^2+1)\delta(\tau+2)d\tau = \int_{t}^{\infty}(\tau^2+1)\Big|_{\tau=-2}\delta(\tau+2)d\tau = 5\int_{t}^{\infty}\delta(\tau+2)d\tau \tag{13}$$

Αν $t > -2$, τότε το ολοκλήρωμα είναι μηδέν, γιατί η συνάρτηση Δέλτα βρίσκεται στο $t_0 = -2$ και δεν περιλαμβάνεται στο ολοκλήρωμα. Αν $t < -2$, τότε το ολοκλήρωμα είναι 1, γιατί περιλαμβάνει τη συνάρτηση Δέλτα. Άρα

$$\int_{t}^{\infty}(\tau^2+1)\delta(\tau+2)d\tau = \begin{cases} 5, & t < -2 \\ 0, & t > 2 \end{cases} = 5u(-t-2) \tag{14}$$



Σχήμα 2: *Σχήματα Άσκησης 2.*

(ϛ') $\int_0^2 e^{j2t}\delta(t-4)dt = 0$, γιατί η συνάρτηση Δέλτα βρίσκεται στο $t_0 = 4$ και το ολοκλήρωμα είναι από 0 ως 2.

Άσκηση 4 - Συναρτήσεις Δέλτα και Βηματικές

Είναι

$$g(t) = 3\cos(2\pi t)\mathrm{rect}\left(t - \frac{1}{2}\right) = 3\cos(2\pi t)(u(t) - u(t-1)) \tag{15}$$

οπότε η παράγωγος θα είναι

$$\frac{d}{dt}g(t) = [3\cos(2\pi t)(u(t) - u(t-1))]' = -6\pi\sin(2\pi t)(u(t) - u(t-1)) + 3\cos(2\pi t)(u(t) - u(t-1))' \quad (16)$$

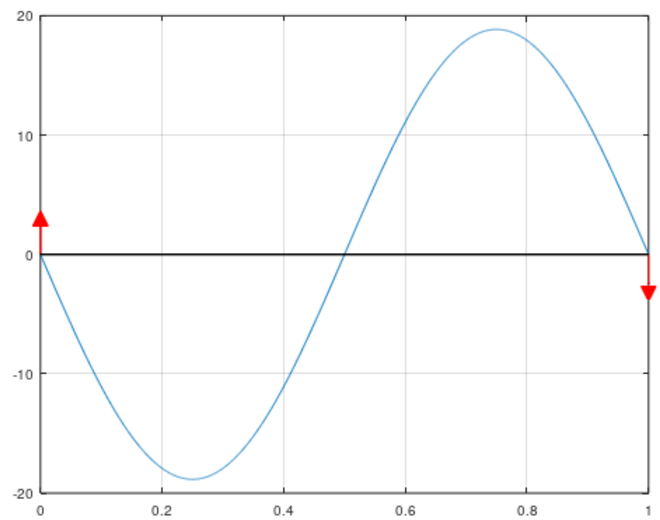
$$= -6\pi\sin(2\pi t)\mathrm{rect}\Big(t - \frac{1}{2}\Big) + 3\cos(2\pi t)(\delta(t) - \delta(t-1)) \quad (17)$$

$$= -6\pi\sin(2\pi t)\mathrm{rect}\Big(t - \frac{1}{2}\Big) + 3\cos(2\pi t)\delta(t) - 3\cos(2\pi t)\delta(t-1) \quad (18)$$

$$= -6\pi\sin(2\pi t)\mathrm{rect}\Big(t - \frac{1}{2}\Big) + 3\cos(2\pi t)\Big|_{t=0}\delta(t) - 3\cos(2\pi t)\Big|_{t=1}\delta(t-1) \quad (19)$$

$$= -6\pi\sin(2\pi t)\mathrm{rect}\Big(t - \frac{1}{2}\Big) + 3\delta(t) - 3\delta(t-1) \quad (20)$$

Δείτε το Σχήμα 3.



Σχήμα 3: *Σχήμα Άσκησης 4.*

Άσκηση 5 - Συστήματα και Ιδιότητες

(α) $y(t) = |x(t)| + x(t+1)$:

- Γραμμικό: πρέπει να είναι ομογενές και αθροιστικό:
  - Ομογένεια: αν η είσοδος είναι $ax(t)$ πρέπει η έξοδος να είναι $ay(t)$. Είναι

    $$ax(t) \longrightarrow |ax(t)| + ax(t+1) = |a||x(t)| + ax(t+1) \neq ay(t) \quad (21)$$

    Δεν είναι ομογενές, άρα δεν είναι γραμμικό.
  - Αθροιστικότητα: (δεν απαιτείται, αφού αποδείχθηκε η μη ομογένεια, απλά για λόγους πληρότητας) αν η είσοδος είναι $x_1(t) + x_2(t)$ τότε η έξοδος πρέπει να είναι $y_1(t) + y_2(t)$. Είναι

    $$x_1(t)+x_2(t) \longrightarrow |x_1(t)+x_2(t)|+x_1(t+1)+x_2(t+1) \neq |x_1(t)|+|x_2(t)|+x_1(t+1)+x_2(t+1) = y_1(t)+y_2(t) \quad (22)$$

    Άρα δεν είναι ούτε αθροιστικό.
- Χ.Α.: πρέπει για είσοδο $x(t - t_0)$ η έξοδος να είναι $y(t - t_0)$. Είναι

  $$x(t-t_0) \longrightarrow |x(t-t_0)| + x(t-t_0+1) = y(t-t_0) \quad (23)$$

  Άρα είναι Χ.Α.

- Ευσταθές: για να είναι ευσταθές πρέπει $|x(t)| < B_x \Longrightarrow |y(t)| < B_y$. Είναι
$$|y(t)| = ||x(t)| + x(t+1)| \leq |x(t)| + |x(t+1)| < 2B_x = B_y \tag{24}$$
Άρα είναι ευσταθές.
- Αιτιατό: η τρέχουσα έξοδος $y(t)$ εξαρτάται από μελλοντική τιμή της εισόδου ($x(t+1)$), άρα δεν είναι αιτιατό.
- Δυναμικό: για τον υπολογισμό οποιασδήποτε τιμής $y(t)$ της εξόδου απαιτείται μνήμη, αφού χρειάζεται να έχουμε αποθηκεύσει κάπου το $x(t+1)$, που αποτελεί μελλοντική τιμή της εισόδου.

(β') $y(t) = tx(t)$:

- Γραμμικό: πρέπει να είναι ομογενές και αθροιστικό:
  - Ομογένεια: αν η είσοδος είναι $ax(t)$ πρέπει η έξοδος να είναι $ay(t)$. Είναι
  $$ax(t) \longrightarrow tax(t) = a(tx(t)) = ay(t) \tag{25}$$
  Άρα είναι ομογενές.
  - Αθροιστικότητα: αν η είσοδος είναι $x_1(t)+x_2(t)$ τότε η έξοδος πρέπει να είναι $y_1(t)+y_2(t)$. Είναι
  $$x_1(t) + x_2(t) \longrightarrow t(x_1(t) + x_2(t)) = tx_1(t) + tx_2(t) = y_1(t) + y_2(t) \tag{26}$$
  Άρα είναι ούτε αθροιστικό, οπότε ισχύουν και οι δυο προϋποθέσεις, άρα είναι γραμμικό.
- Χ.Α.: πρέπει για είσοδο $x(t-t_0)$ η έξοδος να είναι $y(t-t_0)$. Είναι
$$x(t-t_0) \longrightarrow tx(t-t_0) \tag{27}$$
$$y(t-t_0) = (t-t_0)x(t-t_0) \tag{28}$$
Οι δυο έξοδοι διαφέρουν, άρα δεν είναι Χ.Α.
- Ευσταθές: για να είναι ευσταθές πρέπει $|x(t)| < B_x \Longrightarrow |y(t)| < B_y$. Είναι
$$|y(t)| = |tx(t)| = |t||x(t)| < |t|B_x \tag{29}$$
Δεν είναι ευσταθές γιατί η έξοδος αυξάνει χωρίς όριο όσο περνά ο χρόνος.
- Αιτιατό: η τρέχουσα έξοδος $y(t)$ εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα τιμή της εισόδου, άρα είναι αιτιατό.
- Δυναμικό: για τον υπολογισμό οποιασδήποτε τιμής $y(t)$ της εξόδου δεν απαιτείται μνήμη, αφού χρειάζεται μόνο η τρέχουσα τιμή της εισόδου.

Άσκηση 6 - Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα

(α') Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της διαφορικής εξίσωσης είναι
$$\lambda^2 + \lambda - 6 \tag{30}$$
και οι ρίζες του είναι $\lambda = -3$, $\lambda = 2$. Άρα η απόκριση μηδενικής εισόδου θα είναι
$$y_{zi}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t}, \ \ t > 0 \tag{31}$$
Από τις αρχικές συνθήκες
$$y(0^-) = y_{zi}(0^-) = c_1 + c_2 = 0 \tag{32}$$
$$y'(0^-) = y_{zi}(0^-) = -3c_1 + 2c_2 = -1 \tag{33}$$
Λύνοντας το σύστημα, βρίσκουμε $c_1 = \frac{1}{5}$, $c_2 = -\frac{1}{5}$. Οπότε
$$y_{zi}(t) = \Big(\frac{1}{5}e^{-3t} - \frac{1}{5}e^{2t}\Big)u(t) \tag{34}$$

(β΄) Θεωρούμε το σύστημα

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \frac{d}{dt}y(t) - 6y(t) = x(t) \tag{35}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης είναι

$$\lambda^2 + \lambda - 6 \tag{36}$$

και οι ρίζες του είναι $\lambda = -3$, $\lambda = 2$. Άρα η κρουστική της απόκριση $h_o(t)$ θα είναι

$$h_o(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t},\ \ t > 0 \tag{37}$$

Από τις αρχικές συνθήκες που εισάγει η συνάρτηση Δέλτα (ψευδο-αρχικές συνθήκες) έχουμε

$$h_o(0^+) = c_1 + c_2 = 0 \tag{38}$$
$$h_o'(0^+) = -3c_1 + 2c_2 = 1 \tag{39}$$

Λύνοντας το σύστημα, βρίσκουμε $c_1 = -\frac{1}{5}$, $c_2 = \frac{1}{5}$. Οπότε

$$h_o(t) = \Big(-\frac{1}{5}e^{-3t} + \frac{1}{5}e^{2t}\Big)u(t) \tag{40}$$

Η κρουστική απόκριση της διαφορικής εξίσωσης της εκφώνησης είναι

$$h(t) = h_o(t) + 2h_o'(t) = (e^{-3t} + e^{2t})u(t) \tag{41}$$

(γ΄) Η απόκριση μηδενικής κατάστασης δίνεται από τη συνέλιξη της εισόδου με την κρουστική απόκριση.

$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \tag{42}$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-3\tau} + e^{2\tau})e^{-3(t-\tau)}u(\tau)u(t-\tau)d\tau \tag{43}$$
$$= \int_0^t (e^{-3\tau} + e^{2\tau})e^{-3(t-\tau)}d\tau \tag{44}$$
$$= \int_0^t e^{-3\tau}e^{-3t}e^{3\tau}d\tau + \int_0^t e^{2\tau}e^{-3t}e^{3\tau}d\tau \tag{45}$$
$$= e^{-3t}\int_0^t d\tau + e^{-3t}\int_0^t e^{5\tau}d\tau \tag{46}$$
$$= te^{-3t} + e^{-3t}\frac{1}{5}(e^{5t} - 1) \tag{47}$$
$$= te^{-3t} + \frac{1}{5}e^{2t} - \frac{1}{5}e^{-3t} \tag{48}$$

για $0 < \tau < t$. Άρα

$$y_{zs}(t) = [te^{-3t} + \frac{1}{5}e^{2t} - \frac{1}{5}e^{-3t}]u(t) \tag{49}$$

(δ΄) Είναι

$$y_{tot}(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) = te^{-3t}u(t) \tag{50}$$

Άσκηση 7 - Ολοκλήρωση στο MATLAB/Octave

Κώδικας MATLAB/Octave

Άσκηση 8 - Ανίχνευση Δραστηριότητας Ομιλίας στο πρότυπο GSM - MATLAB/Octave
Κώδικας MATLAB/Octave

[⋆] **Άσκηση 9 - Δώστε μας τη φωνή σας** ☺
Κώδικας MATLAB/Octave

[⋆] **Άσκηση 10 - Διαφορικές εξισώσεις στο MATLAB/Octave**
Κώδικας MATLAB/Octave