ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2021-22
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Πρώτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 18/2/2022, 15:45 Ημερομηνία Παράδοσης: 25/2/2022, 15:45

Οι ασκήσεις με [$\star$] είναι πιο προχωρημένες και θεωρούνται **bonus**,
$+10$ μονάδες η καθεμία στο βαθμό αυτής της σειράς ασκήσεων
(δηλ. μπορείτε να πάρετε μέχρι $90/70$ σε αυτή τη σειρά.)

Άσκηση 1 - Μιγαδικές Εξισώσεις Ι

(α') Βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = x + jy$, $x, y \in \mathbb{R}$, που ικανοποιούν την εξίσωση

$$\frac{z + 4 - 3j}{z + 2} = -4 \tag{1}$$

(β') Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί z, w αν

$$2w + 3z = j \tag{2}$$
$$w - 2z + 1 = 0 \tag{3}$$

Απ.: (α) $z = -\frac{12}{5} + \frac{3}{5}j$, (β) $w = -\frac{3}{7} + \frac{2}{7}j$, $z = \frac{2}{7} + \frac{1}{7}j$

Άσκηση 2 - Μιγαδικές Εξισώσεις ΙΙ
Βρείτε το μιγαδικό z αν

$$z^2 = -4 \tag{4}$$

αξιοποιώντας τη σχέση $z_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ του τριωνύμου.

Απ.: $z_1 = -2j$, $z_2 = 2j$

Άσκηση 3 - Γεωμετρικοί Τόποι Ι
Βρείτε και σχεδιάστε τους γεωμετρικούς τόπους του z αν

(α') $\Re\{z^2\} = 4$

(β') $|z - 1 + 3j| = 2$

(γ') $\sphericalangle(z - 1 - 2j) = \dfrac{\pi}{4}$

(δ') $|z| = |z + 1|$

Απ.: (α) $x^2 - y^2 = 4$, υπερβολή, (β) $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$, κύκλος, (γ) $y = x + 1$, $x > 1$, (δ) $x = -\frac{1}{2}$

[$\star$] **Άσκηση 4 - Γεωμετρικοί Τόποι ΙΙ**
Βρείτε και σχεδιάστε το γεωμετρικό τόπο του w αν γνωρίζετε ότι

$$w = \frac{2-z}{z+j}, \;\; z \neq -j \tag{5}$$

και ότι $\Re\{z\} = 0$.

Απ.: ευθεία: $y = -2x - 2$

Άσκηση 5 - Ρίζες πολυωνύμων
Αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα της εξίσωσης

$$x^3 - 5x^2 + 9x + k = 0 \tag{6}$$

τότε

(α') βρείτε την τιμή του k.

(β') πόσες ρίζες έχει η εξίσωση συνολικά; Εξηγήστε και βρείτε τις.

Απ.: (β) $x = 1$, $x = 2 - j$, $x = 2 + j$

Άσκηση 6 - Επίλυση εξισώσεων με De Moivre
Να λυθούν οι εξισώσεις

(α') $z^4 - 1 = 0$

(β') $z^3 - (1 + j) = 0$

(γ') $z^{10} - 100 = 0$

Απ.: (α) $z = e^{j\frac{\pi k}{2}}$, $k = 0, \cdots, 3$, (β) $z = 2^{\frac{1}{6}} e^{j(\frac{2\pi k}{3} + \frac{\pi}{12})}$, $k = 0, 1, 2$, (γ) $z = 10^{\frac{1}{5}} e^{j\frac{\pi k}{5}}$, $k = 0, 1, \cdots, 9$

Άσκηση 7 - Απλοποίηση με Euler και De Moivre
Υπολογίστε τους μιγαδικούς

(α') $(1 + j)^{20}$

(β') $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right)^{888}$

(γ') $(-j)^{888}$

Απ.: (α) -1024, (β) 1, (γ) 1

Άσκηση 8 - MATLAB/Octave: τα βασικά

Στο MATLAB/Octave, η χρήση μιγαδικών αριθμών είναι πολύ απλή. Σημειώστε ότι η φανταστική μονάδα $j = \sqrt{-1}$ είναι δεσμευμένη μεταβλητή. Μπορείτε να την κάνετε overwrite με κάποιον άλλο αριθμό (π.χ. σε ένα for loop, όπως συνηθίζεται) αλλά αυτό δε συνίσταται όταν δουλεύετε με μιγαδικούς αριθμούς. Όταν θέλετε πληροφορίες για κάποια έτοιμη συνάρτηση του MATLAB/Octave, γράψτε `help function_name`.

(α΄) Η συνάρτηση `roots` του MATLAB/Octave υπολογίζει ρίζες πολυωνύμων. Για παράδειγμα, για το πολυώνυμο

$$x^2 + 2x - 3 \tag{7}$$

η σύνταξη είναι

```
roots([1, 2, -3])
```

με τους αριθμούς αυτούς να αποτελούν τους συντελεστές του πολυωνύμου. Βρείτε τις ρίζες των παρακάτω πολυωνύμων

(i.) $x^4 + 2x$

(ii.) $x^7 + x^6 + 6x^3 - 4x$

(iii.) $(1 - j)x^2 + 8x$

με χρήση του MATLAB/Octave. **Παραδώστε τις γραμμές κώδικα που χρησιμοποιήσατε**

(β΄) Το MATLAB/Octave μπορεί να εκτελέσει τόσο αριθμητικούς όσο και *συμβολικούς* υπολογισμούς (εν μέρει). Για παράδειγμα, έστω ότι θέλετε να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{z+3}{jz-6} = 2 \tag{8}$$

Στο MATLAB/Octave μπορείτε να δηλώσετε τη μεταβλητή που σας ενδιαφέρει να βρείτε, δηλ. τη z, ως συμβολική γράφοντας

```
syms z
```

και στη συνέχεια να ζητήσετε τη λύση της εξίσωσης ως

```
solve((z+3)/(j*z-6) == 2)
```

Το MATLAB/Octave θα πρέπει να σας αποκριθεί ότι $z = -3 - 6j$. Χρησιμοποιήστε το MATLAB/Octave για να λύσετε τις εξισώσεις των Ασκήσεων 1, 2, και 6. Για την Άσκηση 1(β), θα χρειαστεί να δείτε το documentation της συνάρτησης `solve` για να δείτε πως να τη συντάξετε για πολλαπλές εξισώσεις. **Παραδώστε τις γραμμές κώδικα που εκτελεί τη λύση τους - δείτε τη σημείωση στο τέλος του φυλλαδίου ασκήσεων - και σχολιάστε το συμβολικό αποτέλεσμα σε σχέση με τις απαντήσεις των ασκήσεων αυτών.**

(γ΄) Η απεικόνιση συναρτήσεων στο MATLAB/Octave είναι πολύ εύκολη. Αν για παράδειγμα θέλετε να απεικονίσετε ένα ημίτονο της μορφής

$$x(t) = 2\sin(2\pi 5t) \tag{9}$$

στο διάστημα $[-2, 2]$, ο παρακάτω κώδικας θα το κάνει για σας.

```
dt = 0.01;                    % Sampling step
t = -2:dt:2;                  % Time vector
x = 2*sin(2*pi*5*t);          % Function
plot(t, x, 'b-');             % Visualize
grid on;                      % Enforce grid
title('A simple sinusoid');   % Make plot pretty
xlabel('Time (s)');           % Make plot pretty
```

Μια μικρή επεξήγηση: δε θα μπορούσαμε να αποθηκεύσουμε *όλες* τις τιμές μιας συνάρτησης συνεχούς χρόνου, καθώς αυτές είναι άπειρες - ακόμα και στο πεπερασμένο διάστημα $[-2, 2]$, υπάρχουν άπειρες τιμές - και η χωρητικότητα του υπολογιστή μας πεπερασμένη. Αυτό που κάνουμε στο διάνυσμα `t` είναι να πάρουμε *δείγματα* από το συνεχή άξονα t. Ξεκινάμε από τον αριθμό $t_0 = -2$ και διανύουμε τον άξονα t με βήμα $dt = 0.01$, καταλήγοντας στη χρονική στιγμή $t_0 = 2$. Στη συνέχεια ζητάμε από το MATLAB/Octave να υπολογίσει για μας τις τιμές της ημιτονοειδούς συνάρτησης στις χρονικές στιγμές που υπάρχουν στο διάνυσμα `t`. Η συνάρτηση `plot` αναλαμβάνει την απεικόνιση σε γράφημα, ενώ οι υπόλοιπες εντολές είναι διακοσμητικού χαρακτήρα (αλλά πολύ επεξηγηματικές για αυτόν/ήν που διαβάζει το γράφημα).

Τυπώστε στο MATLAB/Octave τις συναρτήσεις

(i.) $x(t) = 2e^{-t} - e^{-3t}, \quad t \in [0, 8]$

(ii.) $x(t) = 2\cos(\pi t) + \cos(20\pi t), \quad t \in [-5, 5]$

(iii.) $x(t) = t^3 + 3, \quad t \in [-3, 3]$

(iv.) $x(t) = \dfrac{te^t}{t + \sin(100t)}, \quad t \in (\pi, 2\pi]$

Παραδώστε τον κώδικα που τις τυπώνει.

[⋆] Άσκηση 9 - MATLAB/Octave: προχωρημένα

Η απεικόνιση μιγαδικών συναρτήσεων είναι ελαφρά διαφορετική. Δεδομένου ότι οι συναρτήσεις αυτές είναι της μορφής $f : A \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, δεν μπορούμε να τις απεικονίσουμε ρητά - η συνάρτηση είναι τεσσάρων διαστάσεων, εν γένει. Θα απεικονίσουμε είτε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος, είτε το μέτρο και τη φάση τους. Για παράδειγμα, έστω η μιγαδική συνάρτηση

$$f(z) = 3\cos(z) \tag{10}$$

την οποία θέλουμε να απεικονίσουμε στο μιγαδικό επίπεδο, στο "πλέγμα" $[-5, 5] \times [-5, 5]$. Οι παρακάτω εντολές πραγματοποιούν την απεικόνιση του πραγματικού και του φανταστικού μέρους της συνάρτησης.

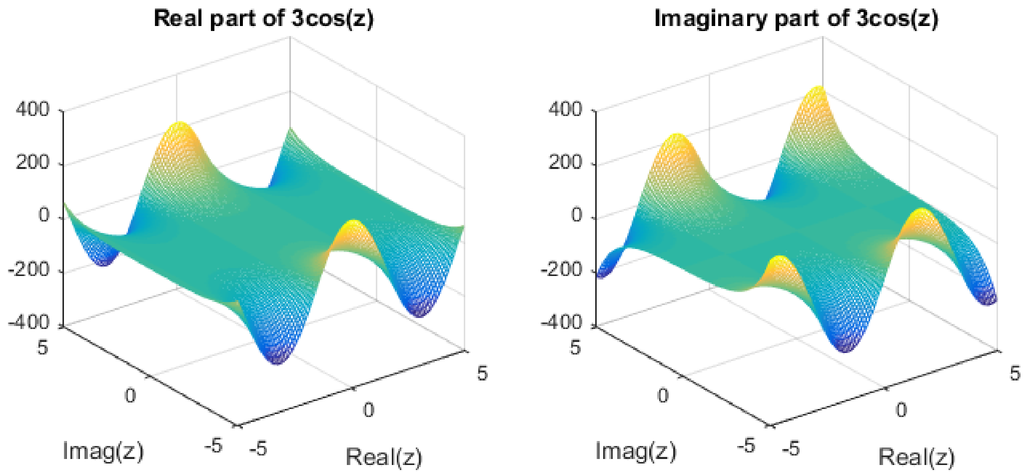
```
[x,y] = meshgrid(-5:0.1:5, -5:0.1:5);  % Create a complex grid
Z = x+j*y;                             % Create complex number in the grid
f = 3*cos(Z);                          % Create function

subplot(121);                          % Split a plot into two parts (1st part)
mesh(x,y, real(f));                    % Plot the real part
title('Real part of 3cos(z)');         % Make plot pretty
xlabel('Real(z)'); ylabel('Imag(z)');   % Make plot pretty

subplot(122);                          % Split a plot into two parts (2nd part)
mesh(x,y, imag(f));                    % Plot the imaginary part
title('Imaginary part of 3cos(z)');    % Make plot pretty
xlabel('Real(z)'); ylabel('Imag(z)');  % Make plot pretty
```

Το αποτέλεσμα που θα πάρετε πρέπει να είναι όπως στο Σχήμα 1. Χρησιμοποιήστε τις συναρτήσεις `abs` και `angle` του MATLAB/Octave για να απεικονίσετε το μέτρο $|f(z)|$ και τη φάση $\phi(z)$ της παραπάνω συνάρτησης στο ίδιο πεδίο ορισμού. Επιπλέον, σχεδιάστε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της συνάρτησης

$$f(z) = \mathrm{sinc}(z)$$

στο "πλέγμα" $[-2, 2] \times [-2, 2]$. Η συνάρτηση $\mathrm{sinc}()$ υπάρχει έτοιμη στο MATLAB/Octave και - όπως θα δούμε αργότερα στο μάθημα - ορίζεται ως:

$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \tag{11}$$



Σχήμα 1: *Πραγματικό και φανταστικό μέρος συνάρτησης.*

Παραδώστε τον κώδικα που εκτελεί τις απεικονίσεις.

Σημείωση για τους **χρήστες Octave** σχετικά με συμβολικούς υπολογισμούς (Ασκ. 8(β)):

- Linux users: Στο Octave θα χρειαστεί να εγκαταστήσετε το πακέτο symbolic και μετά να το φορτώσετε με την εντολή pkg load symbolic. Αυτό γίνεται γράφοντας στο Command Window του Octave:

  ```
  pkg install -forge symbolic
  pkg load symbolic
  ```

  και είστε έτοιμοι/ες.

- Windows users: Για χρήστες Windows, θα χρειαστεί να κατεβάσετε αυτό:

  `https://github.com/cbm755/octsympy/releases/download/v2.8.0/symbolic-win-py-bundle-2.8.0.tar.gz`

  Βάλτε το σε ένα βολικό φάκελο, ανοίξτε το Octave, και βάλτε τον File Browser του Octave να βλέπει τον κατάλογο που έχετε βάλει το παραπάνω tar.gz αρχείο. Μετά γράψτε στο Command Window τις εντολες:

  ```
  pkg install symbolic-win-py-bundle-2.8.0.tar.gz
  ```

  Στη συνέχεια κάνετε επανεκκίνηση του Octave και γράψτε:

  ```
  pkg load symbolic
  ```

  και είστε έτοιμοι/ες.

Θα πρέπει κάθε φορά που ανοίγετε το Octave να φορτώνετε το συμβολικό πακέτο με την παραπάνω εντολή

```
pkg load symbolic
```

αν θέλετε να κάνετε συμβολικούς υπολογισμούς.

Σε περίπτωση δυσκολίας, μπορείτε να δείτε περισσότερες λεπτομέρειες εδώ: https://github.com/cbm755/octsympy