ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2021-22
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1 - Μιγαδικές Εξισώσεις Ι

(α΄) Είναι

$$\frac{z+4-3j}{z+2} = -4 \iff z+4-3j = -4z-8 \iff 5z = -12+3j \iff z = -\frac{12}{5}+j\frac{3}{5} \tag{1}$$

(β΄) Είναι

$$2w+3z = j \tag{2}$$
$$w-2z+1 = 0 \tag{3}$$

και $w = \frac{j-3z}{2}$, οπότε

$$w-2z+1=0 \iff \frac{j-3z}{2}-2z+1=0 \iff j-3z-4z+2=0 \iff z=\frac{2}{7}+j\frac{1}{7} \tag{4}$$

και άρα

$$w = \frac{j-3z}{2} = -\frac{3}{7}+\frac{2}{7}j \tag{5}$$

Άσκηση 2 - Μιγαδικές Εξισώσεις ΙΙ

Γράφουμε

$$z^2 = -4 \iff z^2+4=0 \tag{6}$$

και άρα

$$z_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{0 \pm \sqrt{0^2-4\cdot 4\cdot 1}}{2} = \frac{\pm\sqrt{-16}}{2} = \pm j2 \tag{7}$$

Άσκηση 3 - Γεωμετρικοί Τόποι Ι

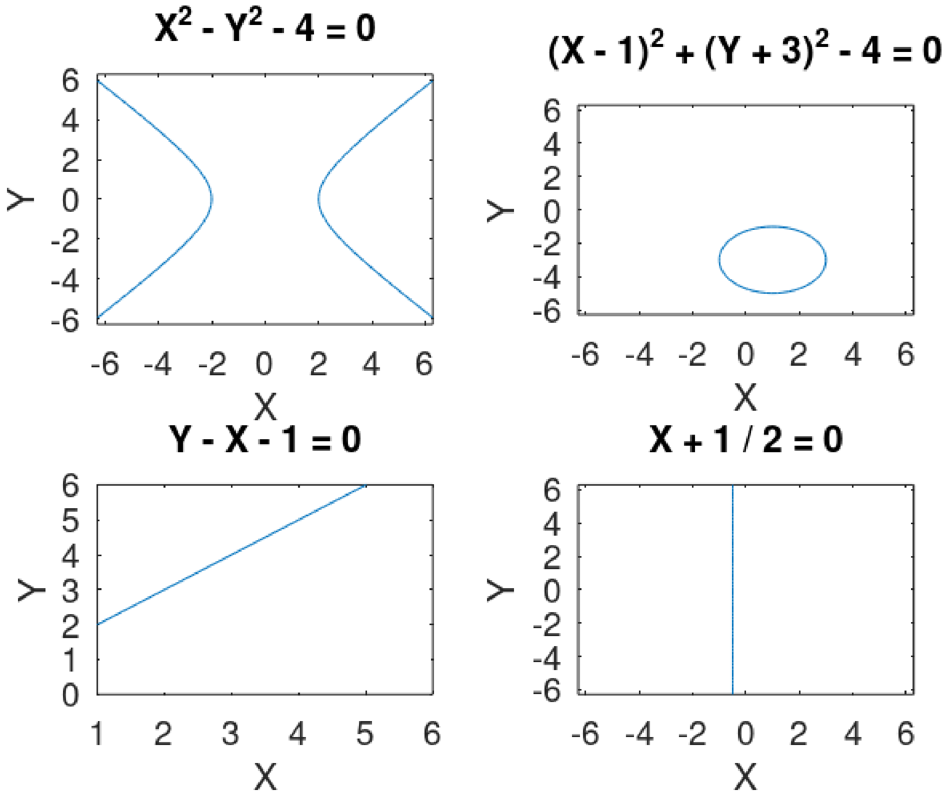
(α΄) $\Re\{z^2\} = 4 \iff \Re\{(x+jy)^2\} = 4 \iff \Re\{x^2+2jxy-y^2\} = 4 \iff x^2-y^2=4$, που αποτελεί υπερβολή.

(β΄) $|z-1+3j| = 2 \iff |z-1+3j)|^2 = 4 \iff (x-1)^2+(y+3)^2 = 4$, που αποτελεί κύκλο ακτίνας 2 με κέντρο το σημείο $(1,-3)$.

(γ΄) $\sphericalangle(z-1-2j) = \frac{\pi}{4} \iff \sphericalangle[(x-1)+j(y-2)] = \frac{\pi}{4} \iff \tan^{-1}\frac{y-2}{x-1} = \frac{\pi}{4} \iff y-2 = x-1 \iff y = x+1$. Όμως οι μιγαδικοί $z-(1+2j)$ αναπαρίστανται από ένα διάνυσμα από το σημείο $(1,2)$ στο σημειο (x,y). Ο γεωμ. τόπος τους είναι μια ημιευθεία από το σημείο $(1,2)$ υπό γωνία $\pi/4$ με τον οριζόντιο άξονα. Άρα θα πρέπει $x>1$.

(δ΄) $|z| = |z+1| \iff |z|^2 = |z+1|^2 \iff x^2+y^2 = (x+1)^2+y^2 \iff 0 = 2x+1 \iff x = -\frac{1}{2}$

Οι γεωμ. τόποι φαίνονται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: *Γεωμετρικοί Τόποι Άσκησης 3.*

[⋆] Άσκηση 4 - Γεωμετρικοί Τόποι ΙΙ

Είναι

$$w = \frac{2-z}{z+j},\ \ z \neq -j \iff wz + jw = 2 - z \tag{8}$$

$$wz + z = 2 - jw \iff z(w+1) = 2 - jw \tag{9}$$

$$z = \frac{2-jw}{w+1} \iff z = \frac{2-j(x+yj)}{x+1+jy} \tag{10}$$

$$z = \frac{(2-jx+y)(x+1-jy)}{|x+1+jy|^2} \iff z = \frac{(2-jx+y)(x+1-jy)}{(x+1)^2+y^2} \tag{11}$$

Αφού $\Re\{z\} = 0$, θα είναι

$$z = \frac{2x+2+y}{(x+1)^2+y^2} + j\frac{-2y-x^2-x-y^2}{(x+1)^2+y^2} \tag{12}$$

και άρα

$$2x + 2 + y = 0 \iff y = -2x - 2 \tag{13}$$

Ο γεωμ. τόπος φαίνεται στο Σχήμα 2.

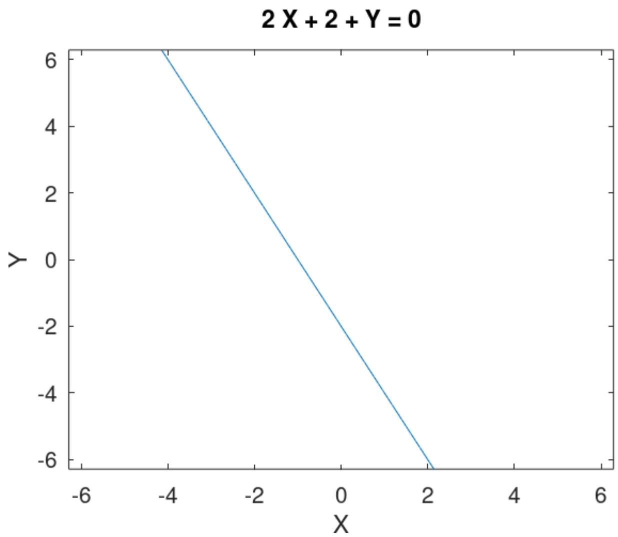
Άσκηση 5 - Ρίζες πολυωνύμων

(α΄) Αφού αποτελεί ρίζα, τότε επαληθεύει την εξίσωση. Άρα

$$1^3 - 5\cdot 1^2 + 9 \cdot 1 + k = 0 \iff k = -5 \tag{14}$$

Άρα

$$x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = 0 \tag{15}$$



Σχήμα 2: *Γεωμετρικός Τόπος Άσκησης 4.*

(β΄) Έχει 3 ρίζες αφού είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού. Μια είναι η μονάδα, πρέπει να βρούμε τις άλλες δυο. Διαιρώντας το πολυώνυμο με το $(x-1)$ έχουμε

$$x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = (x-1)(x^2 - 4x + 5) \tag{16}$$

Οπότε θέλουμε τις ρίζες του $x^2 - 4x + 5$, οι οποίες είναι

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{4 \pm j2}{2} = 2 \pm j \tag{17}$$

Οπότε συνολικά οι ρίζες είναι $1, 2+j, 2-j$.

Άσκηση 6 - Επίλυση εξισώσεων με De Moivre

Να λυθούν οι εξισώσεις

(α΄)

$$z^4 - 1 = 0 \Longleftrightarrow |z|^4 e^{j4\theta} = 1e^{j2\pi k},\ \ k \in \{0, \cdots, 3\} \tag{18}$$

Αρα

$$|z|^4 = 1 \Longleftarrow |z| = 1 \tag{19}$$

και

$$4\theta = 2\pi k \Longleftrightarrow \theta = \frac{\pi k}{2} \tag{20}$$

Άρα οι λύσεις είναι $z = e^{j\frac{\pi k}{2}}$, $k = 0, \cdots, 3$.

(β΄)

$$z^3 - (1+j) = 0 \Longleftrightarrow |z|^3 e^{j3\theta} = \sqrt{2} e^{j(2k\pi + \pi/4)},\ \ k \in \{0, \cdots, 2\} \tag{21}$$

Αρα

$$|z|^3 = \sqrt{2} \Longleftarrow |z| = (2^{1/2})^{1/3} = 2^{1/6} \tag{22}$$

και

$$3\theta = 2\pi k + \pi/4 \Longleftrightarrow \theta = \frac{2\pi k}{3} + \frac{\pi}{12} \tag{23}$$

Άρα οι λύσεις είναι $z = e^{j\frac{\pi k}{2}}$, $k = 0, \cdots, 3$.

(γ′)
$$z^{10} - 100 = 0 \iff |z|^{10} e^{j10\theta} = 100 e^{j2\pi k}, \;\; k \in \{0, \cdots, 9\} \tag{24}$$

Αρα
$$|z|^1 0 = 100 \Longleftarrow |z| = (10^2)^{1/10} = 10^{1/5} \tag{25}$$

και
$$10\theta = 2\pi k \iff \theta = \frac{\pi k}{5} \tag{26}$$

Άρα οι λύσεις είναι $z = 10^{\frac{1}{5}} e^{j\frac{\pi k}{5}}$, $k = 0, 1, \cdots, 9$.

Άσκηση 7 - Απλοποίηση με Euler και De Moivre

(α′) $(1 + j)^{20} = (\sqrt{2} e^{j\pi/4})^{20} = (\sqrt{2})^{20} e^{j5\pi} = (2^{1/2})^{20} \cdot (-1) = -1024$

(β′) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right)^{888} = (1 \cdot e^{j\pi/6})^{888} = e^{j888\pi/6} = e^{j2\pi(444/6)} = e^{j2\pi 74} = 1$

(γ′) $(-j)^{888} = (e^{-j\pi/2})^{888} = e^{-j888\pi/2} = e^{-j444\pi} = e^{-j2\pi 222} = 1$

Άσκηση 8 - MATLAB/Octave: τα βασικά
Κώδικας MATLAB/Octave

[⋆] **Άσκηση 9 - MATLAB/Octave: προχωρημένα**
Κώδικας MATLAB/Octave