ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2020-21
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Έκτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 20/5/2021 Ημερομηνία Παράδοσης: 3/6/2021

Άσκηση 1 - Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες

α΄) Είναι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} 4e^{-2t}u^2(t)dt = \int_{0}^{+\infty} 4e^{-2t}dt = 4\int_{0}^{+\infty} e^{-2t}dt \tag{1}$$

$$= 4\Big(\frac{-1}{2}\Big)e^{-2t}\Big|_{0}^{+\infty} = -2(\lim_{t\to+\infty} e^{-2t} - 1) = -2(0-1) = 2 \tag{2}$$

β΄) Είναι

$$x(t) = 2e^{-t}u(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(f) = \frac{2}{1+j2\pi f} \tag{3}$$

και από θεώρημα Parseval,

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4}{1+4\pi^2 f^2} df = 4\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(2\pi f)^2} df \tag{4}$$

Θέτουμε $x = 2\pi f \Rightarrow dx = 2\pi df$, και $x_1 = -\infty, \quad x_2 = +\infty$, άρα

$$E = 4\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\frac{1}{2\pi}dx = \frac{4}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx \tag{5}$$

$$= \frac{4}{2\pi}\tan^{-1}(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{4}{2\pi}(\tan^{-1}(+\infty) - \tan^{-1}(-\infty)) \tag{6}$$

$$= \frac{4}{2\pi}\Big(\frac{\pi}{2} - \Big(-\frac{\pi}{2}\Big)\Big) = \frac{4}{2\pi}\pi = 2 \tag{7}$$

γ΄) Είναι

$$\phi_x(\tau) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(f)X^*(f) = |X(f)|^2 = \frac{4}{1+4\pi^2 f^2} \tag{8}$$

και από τα γνωστά ζεύγη, $\phi_x(\tau) = 2e^{-|\tau|}$. Όμως γνωρίζουμε ότι

$$E_x = \phi_x(0) = 2e^{-|\tau|}\mid_{\tau=0} = 2 \tag{9}$$

Άσκηση 2 - Αυτοσυσχέτιση

α΄) Είναι

$$\phi_x(\tau) \overset{F}{\longleftrightarrow} \Phi_x(f) = \frac{2}{1+4\pi^2 f^2} \tag{10}$$

β΄) Είναι $E_x = \phi_x(0) = 1$.

γ΄) Έχουμε

$$\Phi_y(f) = |H(f)|^2 \cdot \Phi_x(f) = |H(f)|^2 \frac{2}{1+4\pi^2 f^2} = \begin{cases} \frac{2A^2}{1+4\pi^2 f^2}, & 2 < |f| < 4 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{11}$$

Άρα η ενέργεια της εξόδου μπορεί να βρεθεί ως

$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_y(f)df = \int_{-4}^{-2} \frac{2A^2}{1+4\pi^2 f^2}df + \int_{2}^{4} \frac{2A^2}{1+4\pi^2 f^2}df \tag{12}$$

Επειδή η συνάρτηση $\frac{1}{1+x^2}$ είναι άρτια, το παραπάνω άθροισμα ισούται με

$$E_y = 2\int_{2}^{4} \frac{2A^2}{1+4\pi^2 f^2}df = 4A^2 \int_{2}^{4} \frac{1}{1+4\pi^2 f^2}df \tag{13}$$

Θέτουμε $x = 2\pi f \Rightarrow dx = 2\pi df, \quad x_1 = 4\pi, \quad x_2 = 8\pi$ και άρα

$$E_y = 4A^2 \int_{4\pi}^{8\pi} \frac{1}{1+x^2}\frac{1}{2\pi}dx = \frac{4A^2}{2\pi}\int_{4\pi}^{8\pi} \frac{1}{1+x^2}dx \tag{14}$$

$$= \frac{2A^2}{\pi}\tan^{-1}(x)\Big|_{x=4\pi}^{x=8\pi} = \frac{2A^2}{\pi}\left(\tan^{-1}(8\pi) - \tan^{-1}(4\pi)\right) \tag{15}$$

$$= \frac{2A^2}{\pi}(1.5310 - 1.4913) = \frac{2A^2}{\pi}\cdot 0.0396 \simeq \frac{0.08A^2}{\pi} \tag{16}$$

Άσκηση 3 - Δειγματοληψία Ι

Είναι

$$x_1[n] = \cos\left(\frac{4\pi n}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \tag{17}$$

και

$$x_2[n] = \cos\left(\frac{12\pi n}{8}\right) = \cos\left(\frac{16\pi n - 4\pi n}{8}\right) = \cos\left(-\frac{\pi n}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \tag{18}$$

ενώ

$$x_3[n] = \cos\left(\frac{20\pi n}{8}\right) = \cos\left(\frac{16\pi n + 4\pi n}{8}\right) \tag{19}$$

$$= \cos\left(2\pi n + \frac{4\pi n}{8}\right) = \cos\left(\frac{4\pi n}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \tag{20}$$

Άρα πράγματι στο διακριτό χρόνο τα σήματα είναι τα ίδια.

Άσκηση 4 - Δειγματοληψία ΙΙ

α΄) Είναι

$$x(t) = A\cos(2\pi 40t) + B\cos(2\pi 150t) \tag{21}$$

με μετασχηματισμό Fourier

$$X(f) = \frac{A}{2}\delta(f-40) + \frac{A}{2}\delta(f+40) + \frac{B}{2}\delta(f-150) + \frac{B}{2}\delta(f+150) \tag{22}$$

Άρα $f_{max} = 150$, οπότε Nyquist rate$= 2f_{max} = 300Hz$.

β΄) Είναι

$$x(t) = A\cos(2\pi 40t)\cdot B\cos(2\pi 150t) = AB\cos(2\pi 40t)\cdot\cos(2\pi 150t) \tag{23}$$

Επειδή

$$X(f) = \frac{AB}{4}\delta(f-110) + \frac{AB}{4}\delta(f+110) + \frac{AB}{4}\delta(f-190) + \frac{AB}{4}\delta(f+190) \tag{24}$$

Οπότε $f_{max} = 190$ Hz και άρα Nyquist rate$= 2f_{max} = 380$ Hz.

Άσκηση 5 - Δειγματοληψία III

Είναι

$$x(t) = 4\cos(2\pi t)\sin(20\pi t) = 2\sin(22\pi t) + 2\sin(18\pi t) = 2\sin(2\pi 11t) + 2\sin(2\pi 9t) \tag{25}$$

Αν το παραπάνω σήμα περάσει από ένα χαμηλοπερατό φίλτρο με $f_c = 10$ Hz, τότε στην έξοδο θα κοπεί η συνιστώσα των 11 Hz, άρα

$$y(t) = 2\sin(2\pi 9t) \tag{26}$$

Άσκηση 6 - Δειγματοληψία στο MATLAB

Κώδικας MATLAB/Octave

Άσκηση 7 - Αφαίρεση ηχούς - MATLAB

Κώδικας MATLAB/Octave

[$\star$] **Άσκηση 8 - Εύρεση θεμελιώδους συχνότητας στην ανθρώπινη φωνή - MATLAB**

Κώδικας MATLAB/Octave