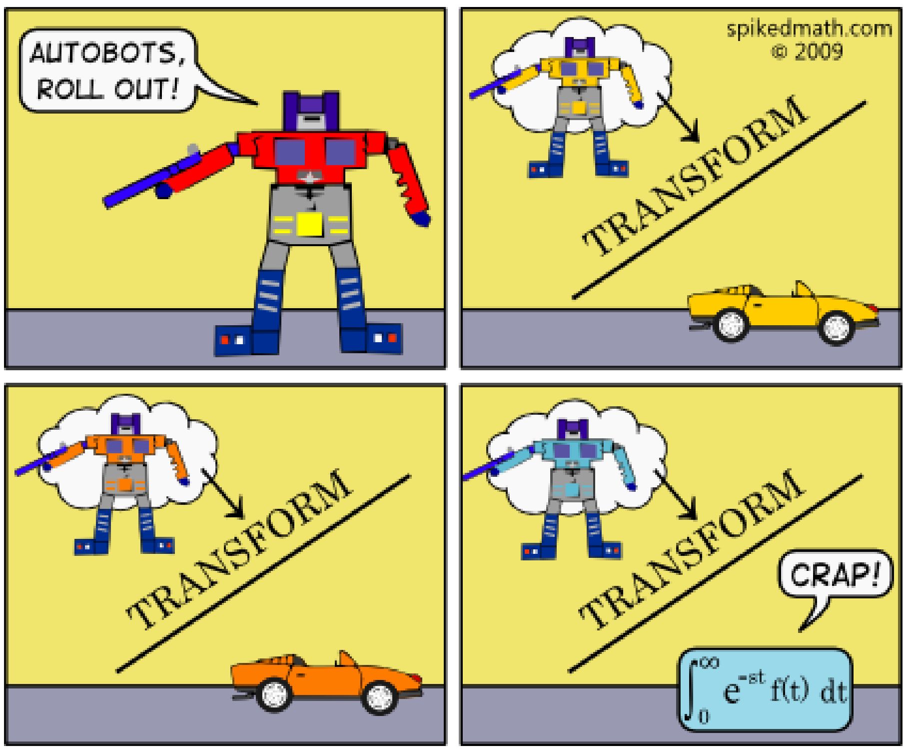
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2020-21
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Πέμπτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 5/5/2021 Ημερομηνία Παράδοσης: 18/5/2021, 23:59

Οι ασκήσεις με [$\star$] είναι **bonus**, $+10$ μονάδες η καθεμία στο βαθμό αυτής της σειράς ασκήσεων (δηλ. μπορείτε να πάρετε μέχρι $100/70$ σε αυτή τη σειρά.)



Σχήμα 1: *...αν δε σας φαίνεται αστείο, η ρήτρα της τελικής σας εξέτασης ανεβαίνει στο 8.0 ☺!*

Άσκηση 1 - Ο μετασχηματισμός Laplace
Βρείτε τις αριθμητικές σταθερές a, b, c, d, f για τα παρακάτω ζεύγη μετασχ. Laplace και συμπληρώστε το πεδίο σύγκλισης. Δείξτε αναλυτικά το σκεπτικό σας.

(α') $4e^{-5t}\cos(25\pi t)u(t) \longleftrightarrow a\dfrac{s+b}{s^2+cs+d}$

(β') $3e^{-2t}\cos(8t-24)u(t-3) \longleftrightarrow a\dfrac{s+b}{s^2+cs+d}e^{fs}$

(γ') $a\delta(t)+(bt-c)u(t) \longleftrightarrow 3\dfrac{(s-1)(s-2)}{s^2}$

(δ') $atu(t)+b(1-e^{-ct})u(t) \longleftrightarrow \dfrac{s-1}{s^2(s+3)}$

Άσκηση 2 - Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace
Αποδείξτε τα παρακάτω ζεύγη αντίστροφου μετασχ. Laplace αποκλειστικά με χρήση ιδιοτήτων και πινάκων ζευγών μετασχηματισμού (ξεκινώντας **πάντα** από το πεδίο του μετασχ. Laplace):

(α') $X(s) = \dfrac{s+5}{s^2(s+2)},\ \sigma > 0 \longleftrightarrow x(t) = \Big(\dfrac{5}{2}t - \dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{4}e^{-2t}\Big)u(t)$

(β') $X(s) = \dfrac{10s^2}{(s+1)(s+3)},\ \sigma > -1 \longleftrightarrow x(t) = 10\delta(t) - 45e^{-3t}u(t) + 5e^{-t}u(t)$

(γ') $X(s) = \dfrac{s}{(s-3)(s^2-4s+5)},\ \sigma < 2 \longleftrightarrow x(t) = \dfrac{3}{2}\Bigg[e^{2t}\Big(\cos(t)+\dfrac{1}{3}\sin(t)\Big) - e^{3t}\Bigg]u(-t)$

Άσκηση 3 - Συνέλιξη
Με χρήση μετασχ. Laplace βρείτε τη συνέλιξη των σημάτων $x(t) = 8\cos(\pi t/2)u(t)$ και $y(t) = u(t) - u(t-1)$.

Απ.: $c_{xy}(t) = \frac{16}{\pi}\Big[\sin(\pi t/2)u(t) - \sin(\pi(t-1)/2)u(t-1)\Big]$

Άσκηση 4 - Μετασχ. Laplace και Συστήματα Ι
Ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα για είσοδο $x(t) = e^{-3t}u(t)$ επιστρέφει έξοδο

$$y(t) = \frac{1}{3}e^{t}u(t) - \frac{1}{3}e^{-2t}u(t) \tag{1}$$

(α') Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος, $H(s)$.

(β') Βρείτε την κρουστική απόκριση, $h(t)$, του συστήματος.

Απ.: $h(t) = \dfrac{4}{3}e^{t}u(t) - \dfrac{1}{3}e^{-2t}u(t)$

(γ') Μπορείτε να υπολογίσετε την απόκριση σε συχνότητα, $H(f)$, του συστήματος μέσω του μετασχ. Laplace; Αν ναι, εξηγήστε και βρείτε την. Αν όχι, εξηγήστε γιατί.

(δ') Βρείτε μια διαφορική εξίσωση η οποία περιγράφει το παραπάνω σύστημα $H(s)$.

Απ.: $\dfrac{d^2}{dt^2}y(t) + \dfrac{d}{dt}y(t) - 2y(t) = 3x(t) + \dfrac{d}{dt}x(t)$

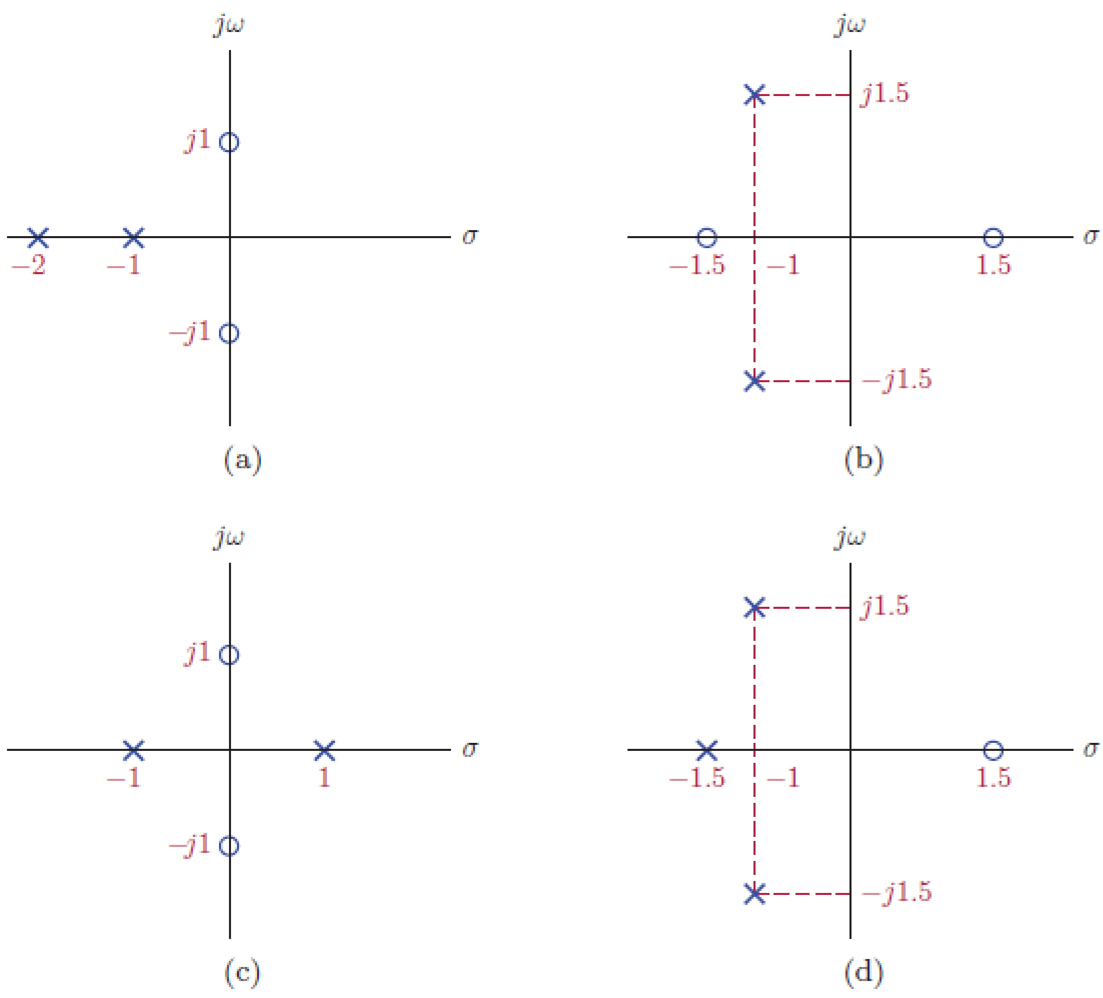
Άσκηση 5 - Μετασχ. Laplace και Συστήματα ΙΙ
Ένα *αιτιατό* ΓΧΑ σύστημα περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^3}{dt^3}y(t) + 3\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 4\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = 6x(t) \tag{2}$$

Ελέγξτε αν το σύστημα αυτό είναι ευσταθές και βρείτε την κρουστική του απόκριση.

Απ.: $h(t) = 6e^{-t}(1 - \cos(t))u(t)$

Άσκηση 6 - Πόλοι και Μηδενικά
Στο Σχήμα 2 βλέπετε τέσσερα διαγράμματα πόλων-μηδενικών, ένα για κάθε μια συνάρτηση μεταφοράς, $H_i(s)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Προσέξτε ότι ο κατακόρυφος άξονας είναι της μορφής $j\omega$, δηλ. αν $j\omega = j1$, τότε $f = 1/2\pi$. Για καθεμιά από αυτές βρείτε το πεδίο σύγκλισης αν γνωρίζετε ότι



Σχήμα 2: *Διαγράμματα πόλων-μηδενικών Άσκησης 6.*

(α′) η συχνοτική απόκριση του κάθε συστήματος με κρουστική απόκριση $h_i(t)$ υπάρχει μέσω του ορισμού της.

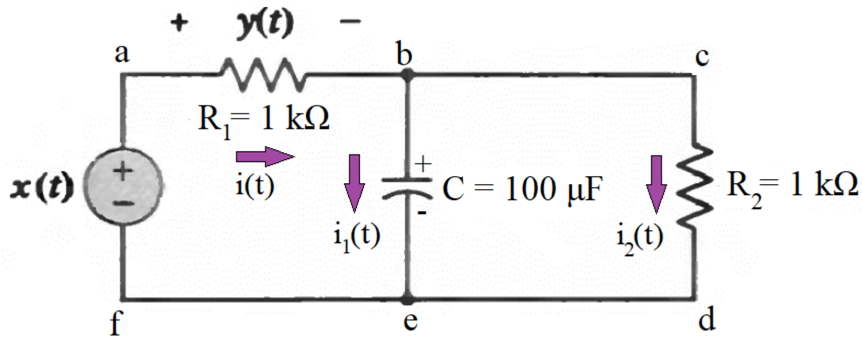
(β′) το $h_i(t)$ είναι αιτιατό και στις τέσσερις περιπτώσεις.

(γ′) το $h_i(t)$ είναι αντι-αιτιατό και στις τέσσερις περιπτώσεις.

(δ′) σε ποιά (μια) από τις τέσσερις περιπτώσεις το σύστημα είναι αμφίπλευρο και ευσταθές; Εξηγήστε.

[⋆] Άσκηση 7 - Ηλεκτρικά κυκλώματα και μονόπλευρος μετασχ. Laplace

Για να δούμε τι θυμάστε από το ΗΥ112 - Φυσική Ι ☺... Έστω το κύκλωμα του Σχήματος 3 το οποίο θεωρούμε ότι αποτελεί σύστημα με είσοδο $x(t) = 3e^{-10t}u(t)$ V, η οποία αποτελεί τη διαφορά δυναμικού στα άκρα της πηγής του κυκλώματος. Έξοδος του κυκλώματος θεωρείται η διαφορά δυναμικού $\Delta V = y(t)$ στα άκρα του αντιστάτη R_1. Θυμηθείτε τους κανόνες του Kirchhoff:



Σχήμα 3: *Κύκλωμα Άσκησης 7.*

$$\text{Κανόνας κόμβου} : i_{in} = i_{out} \tag{3}$$

$$\text{Κανόνας βρόχου} : \sum \Delta V = 0 \tag{4}$$

Εδώ, τόσο τα ρεύματά μας, i, (ήδη σχεδιασμένα για σας) όσο και οι διαφορές δυναμικού θα είναι συναρτήσεις του χρόνου. Υπενθυμίζεται ότι για έναν αντιστάτη αντίστασης R ισχύει

$$\Delta V(t) = i(t)R \tag{5}$$

ενώ για έναν πυκνωτή χωρητικότητας C ισχύει

$$\Delta V(t) = \frac{q(t)}{C} + v_c(0^-) = \frac{1}{C}\int_{0^-}^{t} i(\tau)d\tau + v_c(0^-) \tag{6}$$

με $v_c(0^-)$ η αρχική διαφορά δυναμικού στα άκρα του πυκνωτή. Στο κύκλωμά μας, ισχύει $v_c(0^-) = 5$ V.

(α΄) Εφαρμόστε τον κανόνα κόμβου στον κόμβο b. Γράψτε το ρεύμα $i(t)$ συναρτήσει της διαφοράς δυναμικού $y(t)$ στα άκρα του αντιστάτη R_1. Γράψτε την εξίσωση αυτή στο χώρο του Laplace.

(β΄) Εφαρμόστε τον κανόνα βρόχου στο βρόχο $abefa$. Γράψτε την εξίσωση στο χώρο του Laplace.

Απ.: $X(s) = Y(s) + \frac{1}{sC}I_1(s) + \frac{v_c(0^-)}{s}$

(γ΄) Εφαρμόστε τον κανόνα βρόχου στο βρόχο $abcdefa$. Γράψτε την εξίσωση το χώρο του Laplace.

Απ.: $X(s) = Y(s) + R_2 I_2(s)$

(δ΄) Χρησιμοποιήστε τις τρεις εξισώσεις στο χώρο του Laplace για να κατασκευάσετε μια εξίσωση που περιλαμβάνει μόνο τις συναρτήσεις $Y(s)$, $X(s)$ (και φυσικά τη μεταβλητή s καθώς και όποιους σταθερούς αριθμούς).

(ε΄) Χρησιμοποιώντας το μετασχ. Laplace της εισόδου $x(t)$, βρείτε την έξοδο $y(t)$.

Απ.: $y(t) = -2e^{-20t}u(t)$ V

[⋆] Άσκηση 8 - Toy-φιλτράρισμα στο MATLAB/Octave
Γνωρίζετε το περίφημο πλέον ζεύγος μετασχηματισμού Fourier

$$A\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow AT\mathrm{sinc}(fT) \tag{7}$$

Από την ιδιότητα της στάθμισης στο πεδίο του χρόνου, γνωρίζετε την επιρροή του τετραγωνικού παλμού στο χώρο του χρόνου, και πως η διάρκειά του επηρεάζει το χώρο της συχνότητας. Θα ήταν ενδιαφέρον να δούμε τη σχέση αυτή αντίστροφα, δηλ. με τον τετραγωνικό παλμό στο πεδίο της συχνότητας. Ας θεωρήσουμε λοιπόν τον τετραγωνικό παλμό στο χώρο της συχνότητας ως

$$H(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{T}\right) \tag{8}$$

και ας τον θεωρήσουμε ως ένα σύστημα, που μπορεί να δέχεται εισόδους και να παράγει εξόδους. Προφανώς, λόγω της ιδιότητας της δυικότητας, η έκφραση του συστήματος - δηλ. η *κρουστική απόκριση* - στο χώρο του χρόνου θα είναι

$$h(t) = T\mathrm{sinc}(Tt) \tag{9}$$

Ο τετραγωνικός παλμός θα λειτουργήσει ως συχνοτικό *φίλτρο*, το οποίο θα επιτρέπει τη διέλευση των συχνοτήτων που βρίσκονται εντός του διαστήματος που είναι μη μηδενικός. Το πλάτος αυτών των συχνοτήτων θα είναι μοναδιαίο. Επίσης, θα αποκόπτει τις συχνότητες που θα βρίσκονται εκτός αυτού του διαστήματος. Γιατί όμως θα έχει αυτή τη συμπεριφορά; Γιατί όπως ξέρετε (ΠΛΕΟΝ), η σχέση εισόδου-εξόδου ενός συστήματος στο χώρο της συχνότητας εκφράζεται με τη σχέση του *γινομένου* των μετασχηματισμών Fourier της εισόδου και του συστήματος. Άρα στην περίπτωσή μας, αφού ο τετραγωνικός παλμός έχει μοναδιαίο πλάτος στο διάστημα $f \in (-T/2, T/2)$ (στη συχνότητα δηλαδή!), η έξοδος στο χώρο του μετασχ. Fourier για κάθε είσοδο θα είναι.

$$Y(f) = X(f)H(f) = \begin{cases} X(f), & |f| < \frac{T}{2} \\ 0, & |f| > \frac{T}{2} \end{cases} \tag{10}$$

Ας δοκιμάσουμε το νέο φίλτρο μας.

(α΄) Υλοποιήστε στο MATLAB/Octave ένα σήμα ως άθροισμα από τρια ημίτονα, με συχνότητες $f_1 = 200, f_2 = 600, f_3 = 750$ Hz, με πλάτη και φάσεις της επιλογής σας. Σας δίνονται οι εντολές:

```
Dt = 0.0001;
t = -1:Dt:1;
Df = 1;
f = -1500:1500;
f1 = 200;
f2 = 600;
f3 = 750;
A1 = % INSERT CODE HERE
A2 = % INSERT CODE HERE
A3 = % INSERT CODE HERE
phi1 = % INSERT CODE HERE
phi2 = % INSERT CODE HERE
phi3 = % INSERT CODE HERE
x = [A1 A2 A3]*cos(2*pi*[f1 f2 f3]'*t + [phi1 phi2 phi3]'*ones(size(t)));
```

(β΄) Τυπώστε και παραδώστε τα τρια γραφήματα που σας επιστρέφει η συνάρτηση `ctft` (την οποία κατεβάζετε από το site του μαθήματος) για το σήμα `x`. Γράψτε `doc ctft` για να δείτε τη σύνταξη. Είναι ίδιο με αυτό που θεωρητικά αναμένατε; (αν εξαιρέσετε τα σφάλματα στα πλάτη του μετασχηματισμού)

(γ΄) Υλοποιήστε το φίλτρο σας στο *χρόνο*, δηλ. υλοποιήστε την κρουστική απόκριση $h(t)$. Το MATLAB/Octave έχει έτοιμη συνάρτηση `sinc`. Για να την υλοποιήσετε, χρειάζεστε την παράμετρο T:

i. Βρείτε στο χαρτί και ορίστε την παράμετρο T να είναι τέτοια ώστε αν δοθεί στο σύστημα η είσοδος `x` που δημιουργήσατε, να μένει στην έξοδο μόνο το ημίτονο των 200 Hz. Εφαρμόστε το φίλτρο στο σήμα σας με χρήση της συνάρτησης `conv`, που πραγματοποιεί τη συνέλιξη μεταξύ των δυο σημάτων που δέχεται ως όρισμα. Για σήματα συνεχούς χρόνου η συνέλιξη υλοποιείται ως `y = Dt*conv(x,h);` . Τυπώστε και παραδώστε τα γραφήματα της εξόδου `y`, με χρήση της `ctft`. Ακούστε το αποτέλεσμα με την εντολή `soundsc(y,1/Dt);` .

ii. Επαναλάβατε όλα τα παραπάνω με T τέτοιο ώστε να μένουν στην έξοδο μόνο τα ημίτονα των 200 και 600 Hz.

iii. Επαναλάβατε όλα τα παραπάνω με T τέτοιο ώστε να μένουν όλα τα ημίτονα στην έξοδο.

iv. Επαναλάβατε όλα τα παραπάνω με T τέτοιο ώστε να μη μένει κανένα ημίτονο στην έξοδο! Παρατηρείτε κάτι περίεργο στο φάσμα πλάτους; Εξηγήστε, προσέχοντας την κλίμακα πλάτους του μετασχηματισμού.

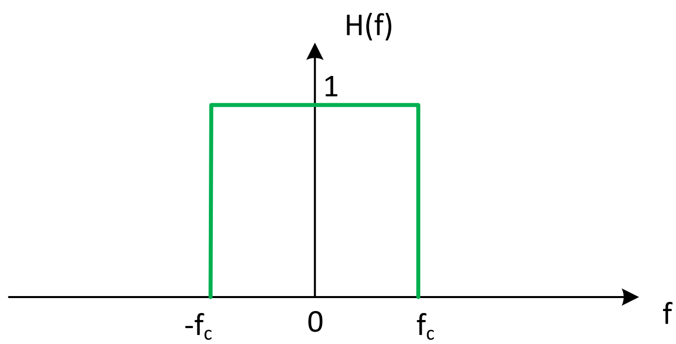
(δ΄) Υλοποιήστε το φίλτρο σας στη *συχνότητα*, δηλ. αντι να κάνετε συνέλιξη στο χρόνο υλοποιήστε το ισοδύναμό της στη συχνότητα, δηλ. το *γινόμενο* των μετασχηματισμών Fourier! Η συνάρτηση `ctft` επιστρέφει ως όρισμα εξόδου το μετασχηματισμό Fourier του σήματος που της δίνετε. Χρησιμοποιήστε τον τελεστή `.*` του MATLAB/Octave για να υλοποιήσετε το γινόμενο των μετασχηματισμών. Παραδώστε *μόνο* τον κώδικα που υλοποιεί το φιλτράρισμα στη συχνότητα για κάθε περίπτωση από τις παραπάνω.

Παραδώστε κώδικα MATLAB/Octave που υλοποιεί τα ερωτήματα παραπάνω, όποια plots σας ζητούνται στα υποερωτήματα, καθώς και τις απαντήσεις στις θεωρητικές ερωτήσεις σε ξεχωριστό χαρτί ή σε σχόλια στον κώδικα MATLAB/Octave.

[⋆] Άσκηση 9 - Σχεδίαση χαμηλοπερατού (lowpass) φίλτρου[1] - MATLAB/Octave

Εργάζεστε σε μια από τις πρώτες εταιρίες κινητής τηλεφωνίας, και το πόστο σας είναι "μηχανικός σχεδίασης φίλτρων". Ο προϊστάμενός σας συγκαλεί σύσκεψη στην οποία αποφασίζεται ότι εσείς πρέπει να αναπτύξετε και να σχεδιάσετε ένα σύστημα με απόκριση συχνότητας $H(f)$ για εφαρμογές επικοινωνίας φωνής, το οποίο θα αποκόπτει τις συχνότητες μεγαλύτερες από κάποιο δοθέν f_c (η οποία λέγεται *συχνότητα αποκοπής - cut-off frequency*) ενώ θα κρατά όσο γίνεται ανέπαφες τις συχνότητες μικρότερες από f_c. Τέτοια συστήματα γνωρίζετε ότι ονομάζονται *φίλτρα επιλογής συχνοτήτων*, και για αυτήν την άσκηση θα αποκαλούμε απλά ως *φίλτρο* το σύστημά μας.

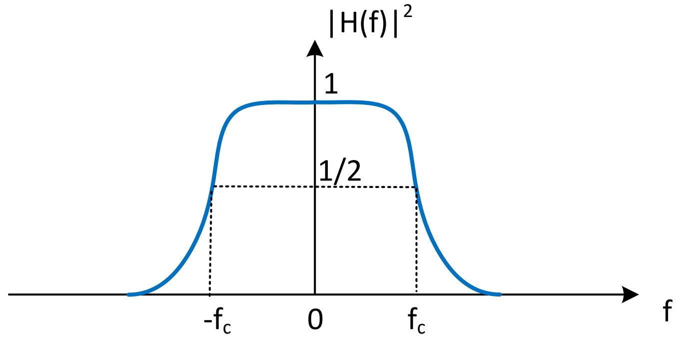
Ο προϊστάμενός σας, που δε γνωρίζει θεωρία σημάτων και συστημάτων, σας παραδίδει την απόκριση συχνότητας $H(f)$ που θέλει να φτιάξετε, στο Σχήμα 4, και σας αναφέρει ότι το ζητούμενο f_c ισούται με $f_c = 2000$ Hz, αφού το φίλτρο θα ενσωματωθεί σε στρατιωτικά ασύρματα τηλεφωνικά συστήματα, όπου το εύρος ζώνης επικοινωνίας - και το κόστος λειτουργίας (έχουμε κρίση! :-)) είναι περιορισμένο.



Σχήμα 4: *Φίλτρο $H(f)$ που θέλει ο προϊστάμενος.*

(α΄) Αποδείξτε του ότι η κρουστική απόκριση $h(t)$ του ζητούμενου φίλτρου είναι άπειρης διάρκειας και μη-αιτιατή, με αποτέλεσμα το φίλτρο που σας ζήτησε να μην είναι υλοποιήσιμο στην πράξη.

(β΄) Αφού τον πείσατε για την ορθότητα του παραπάνω ερωτήματος, σας αναθέτει να υλοποιήσετε ένα φίλτρο που να πλησιάζει όσο γίνεται αυτό που σας ζήτησε αρχικά, και να είναι υλοποιήσιμο. Στην προσπάθειά σας αυτή, ένας μαθηματικός φίλος σας αναφέρει ότι έχει υπόψη του μια συνάρτηση η οποία να πλησιάζει το ζητούμενο φίλτρο σας, και την οποία σχεδιάζει πρόχειρα στο χαρτί, όπως στο Σχήμα 5. Η συνάρτηση ονομάζεται *συνάρτηση Butterworth*.



Σχήμα 5: *Συνάρτηση Butterworth.*

Μη έχοντας καλύτερη εναλλακτική, του ζητάτε να σας δώσει τη μαθηματική περιγραφή της συνάρτησης. Σας δίνει μια περιγραφή στο χώρο της συχνότητας που βρήκε σε κάποιο μαθηματικό εγχειρίδιο, ως

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{j2\pi f}{j2\pi f_c}\right)^{2N}} \tag{11}$$

με N την τάξη της συνάρτησης, όπως σας ανέφερε. Μετατρέψτε τη συνάρτηση αυτή στο χώρο του μετασχ. Laplace, θέτοντας $s = j2\pi f$.

(γ') Θέλετε να μελετήσετε τη συμπεριφορά του φίλτρου - όπως το ονομάζετε πλέον - Butterworth, για να το κατανοήσετε καλύτερα. Βρείτε και σχεδιάστε τους πόλους του $|H(s)|^2$ στο s-επίπεδο.

Απ.: $s_k = 2\pi f_c e^{j\pi\frac{2k+N-1}{2N}}, \;\; k = 0, 1, 2, \cdots, 2N-1$

(δ') Γνωρίζετε από τη θεωρία σας ότι επειδή το φίλτρο σας είναι πραγματικό σήμα στο χρόνο, θα ισχύει

$$|H(f)|^2 = H(f)H^*(f) = H(f)H(-f) = H(s)H(-s)\big|_{s=j2\pi f} \tag{12}$$

Επιλέξτε από τους πόλους που σχεδιάσατε ένα υποσύνολο πόλων ώστε το σύστημα που θα προκύψει από αυτούς να είναι *ευσταθές και αιτιατό*. Προσέξτε ότι αν s_p είναι ένας πόλος του $H(s)$, τότε το $-s_p$ είναι πόλος του $H(-s)$.

(ε') Προσέξτε επίσης ότι $H(s)H(-s)\big|_{s=0} = 1$. Υπολογίστε το $H(s)$ για $N = 1$ και $N = 2$.

Απ.: $H_{N=1}(s) = \dfrac{1}{s + 2\pi f_c}, \;\; H_{N=2}(s) = \dfrac{1}{(s - 2\pi f_c e^{j3\pi/4})(s - 2\pi f_c e^{j5\pi/4})}$

(ϛ') Βρείτε τη διαφορική εξίσωση *τρίτης τάξης* που περιγράφει ένα φίλτρο Butterworth με συχνότητα αποκοπής $f_c = \frac{1}{2\pi}$ Hz.

Απ.: $\dfrac{d^3}{dt^3}y(t) + 2\dfrac{d^2}{dt^2}y(t) + 2\dfrac{d}{dt}y(t) + y(t) = x(t)$

(ζ') Υλοποιήστε στο MATLAB/Octave την απόκριση φάσματος $|H(f)|$ του φίλτρου για $f_c = 2000$ Hz, δειγματοληπτώντας έναν άξονα συχνοτήτων $[-8000, 8000]$ ανά $Df = 1$ Hz, για $N = 6$, $N = 16$, και $N = 46$. Η εντολή `plot` θα σας δώσει, ως γνωστόν, τη γραφική παράσταση. Χρησιμοποιήστε την εντολή `hold on` για να τυπώσετε το ένα πάνω στο άλλο, και να παραδώσετε μαζί εκτυπωμένα τα φίλτρα σας. Η συνάρτηση `legend` θα σας βοηθήσει να κάνετε το γράφημά σας πιο περιγραφικό. Περιγράψτε τι επιρροή έχει η τάξη N του φίλτρου στο φάσμα πλάτους του γενικά, και γύρω από τη συχνότητα f_c ειδικά.

[1]Οι χρήστες Octave θα χρειαστεί να φορτώσουν το πακέτο signal σε αυτήν την άσκηση.

(η') Προτού παραδώσετε το φίλτρο σας στον προϊστάμενό σας ώστε να υλοποιηθεί σε κύκλωμα, θέλετε να βεβαιωθείτε ότι λειτουργεί όπως πρέπει, εξομοιώνοντάς το στο MATLAB/Octave και βάζοντας ως είσοδο μια τυπική στρατιωτική διαταγή, δωρεά του Υπουργείου Άμυνας. Θα τη βρείτε στο αρχείο military.wav, στο site του μαθήματος.

Φορτώστε το αρχείο στο MATLAB/Octave με τη - γνωστή πια - εντολή `audioread` (ή την `wavread`, αν έχετε πιο παλιά έκδοση του MATLAB/Octave). Η συνάρτηση `butter` υλοποιεί ένα χαμηλοπερατό φίλτρο Butterworth με τάξη N την οποία παρέχετε εσείς ως όρισμα, όπως και τη συχνότητα αποκοπής f_c, και επιστρέφει τα μηδενικά, τους πόλους, και το κέρδος (δηλ. τη σταθερά του αριθμητή) του φίλτρου $H(s)$. Με άλλα λόγια, δε μας δίνει απευθείας τη μορφή του $H(s)$, αλλά μας δίνει ό,τι χρειαζόμαστε για να το φτιάξουμε.

Τα παραπάνω γίνονται με τις εντολές

```
f = 2000;
N = 8;
[z, p, k] = butter(N, 2*pi*f, 's');
```

όπου το όρισμα `s` δηλώνει στη συνάρτηση ότι το φίλτρο μας αντιστοιχεί σε σύστημα $h(t)$ συνεχούς χρόνου.

(θ') Στη συνέχεια, πρέπει από τους πόλους, τα μηδενικά, και το κέρδος, να γράψουμε το φίλτρο ως λόγο πολυωνύμων $H(s) = N(s)/D(s)$ ώστε να το χρησιμοποιήσουμε. Αυτό γίνεται εύκολα ως

```
[B, A] = zp2tf(z, p, k);
```

όπου η συνάρτηση `zp2tf`, που είναι συντομογραφία για τη φράση Zeros+Poles to Transfer Function, μετατρέπει τα μηδενικά, τους πόλους, και το κέρδος, σε ένα λόγο πολυωνύμων του s, που φυσικά δεν είναι άλλος από τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$. Η μεταβλητή `B` περιέχει τους συντελεστές του s-πολυωνύμου του αριθμητή, ενώ η μεταβλητή `A` τους αντίστοιχους του παρονομαστή.

(ι') Δείτε την απόκριση συχνότητας $H(f)$ του φίλτρου σας με χρήση των εντολών

```
W = 2*pi*[-5000:5000];
[H] = freqs(B, A, W);
subplot(211); plot(W, abs(H)); xlabel('Frequency (Hz)');
title('Magnitude Spectrum'); grid;
subplot(212); plot(W, angle(H)); xlabel('Frequency (Hz)');
title('Phase Spectrum'); grid;
```

Είναι το φάσμα πλάτους όπως περιμένατε να είναι;

(ια') Όμως ο υπολογιστής μας είναι ψηφιακός, και το σήμα military.wav που έχουμε είναι ψηφιακό. Πρέπει λοιπόν να μετατρέψουμε το φίλτρο $H(s)$ που έχουμε σε μορφή συντελεστών s-πολυωνύμου αριθμητή και παρονομαστή σε ένα *ψηφιακό* αντίστοιχό του, και να το χρησιμοποιήσουμε επάνω στο σήμα μας. Ευτυχώς για μας, κάθε αναλογικό φίλτρο μπορεί να μετατραπεί σε ψηφιακό (και ακριβέστερα, σε *διακριτού χρόνου*), με πολύ απλές τεχνικές, εκ των οποίων η απλούστερη ονομάζεται impulse invariance[2], και την οποία το MATLAB/Octave έχει έτοιμη.

```
[digital_num, digital_den] = impinvar(B, A, fs);
```

Πλέον στις μεταβλητές `digital_num` και `digital_den` έχουμε τους συντελεστές ενός ψηφιακού φίλτρου Butterworth $H_d(s)$ (που δεν περιγράφεται πλέον στο χώρο του s, δηλ. του Laplace, αλλά χάριν ευκολίας ας διατηρήσουμε το συμβολισμό).

(ιβ') Ας χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση `filter`, η οποία συντάσσεται ως

```
y = filter(Num, Den, x);
```

[2] Λεπτομέρειες στο ΗΥ370... :-)

με x το σήμα εισόδου, και Num, Den τον αριθμητή και τον παρονομαστή του φίλτρου $H_d(s)$, αντίστοιχα, στη μορφή συντελεστών πολυωνύμου όπως σας επιστρέφονται από την impinvar. Εκτελέστε την εντολή, ακούστε το αποτέλεσμα με την εντολή soundsc(y, fs); και σχολιάστε το αποτέλεσμα σε σχέση με το αρχικό σήμα. Πώς θα χαρακτηρίζατε την ποιότητα του σήματος εξόδου σε σχέση με το αρχικό;

(ιγ΄) Παραδώστε ένα plot του τελικού σήματος, παρέα με το αρχικό σήμα.

Παραδώστε κώδικα MATLAB/Octave που εκτελεί το φιλτράρισμα επάνω στο σήμα που σας δίνεται, όποια plots και κώδικα σας ζητούνται στα υποερωτήματα, καθώς και τις απαντήσεις στις θεωρητικές ερωτήσεις σε ξεχωριστό χαρτί.

Άσκηση 10 - Συμβολικός Μετασχηματισμός Laplace στο MATLAB/Octave[3]

Στην προηγούμενη σειρά ασκήσεων είδατε πως μπορεί κανείς να υπολογίσει και να χρησιμοποιήσει το μετασχ. Fourier αριθμητικά στο MATLAB/Octave. Ας δούμε εδώ πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το συμβολικό υπολογισμό για να βρούμε μετασχηματισμούς Laplace. Το MATLAB/Octave παρέχει τις συναρτήσεις laplace, ilaplace οι οποίες μπορούν να σας δώσουν τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς σε κλειστή μορφή.

Γνωρίζουμε ότι

$$e^{-at}u(t) \longleftrightarrow X(s) = \frac{1}{a+s}, \ \Re\{s\} > -a \tag{13}$$

για $a \in \Re$. Ο παρακάτω κώδικας βρίσκει το μετασχ. Laplace του παραπάνω σήματος.

```
syms t a;                       % Symbolic variables
a = 2;                          % A value for a
x = exp(-a*t)*heaviside(t);     % Our signal in time
X = laplace(x)                  % Laplace Transform
```

Το MATLAB/Octave μας απαντά ότι

```
X =

1/(s + 2)
```

που είναι και το σωστό αποτέλεσμα.

Σημειώστε ότι οι συναρτήσεις laplace, ilaplace υπολογίζουν το μετασχ. Laplace για *αιτιατά* σήματα μόνο. Άρα για σήματα του τύπου $x(t) = e^{2t}u(-t)$, η απάντηση που θα πάρετε θα είναι μηδέν.

Παραδώστε κώδικα MATLAB/Octave που υπολογίζει τους μετασχηματισμούς Laplace των παρακάτω σημάτων:

i. $x(t) = u(t-2)$

ii. $x(t) = e^{-t}u(t-2)$

iii. $x(t) = e^{-3t}\cos(2\pi t)u(t)$

iv. $x(t) = \delta(t-2)$ (χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση dirac)

v. $x(t) = (e^{-t} + e^{-3t})u(t)$

Παραδώστε κωδικά MATLAB/Octave που εκτελεί τους παραπάνω μετασχηματισμούς. Χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση simplify για να απλοποιήσετε τις απαντήσεις που παίρνετε, αν δε συμφωνούν με τις θεωρητικές γνώσεις σας. Γράψτε τις παρατηρήσεις σας.

[3] Οι χρήστες Octave θα χρειαστεί να φορτώσουν το πακέτο symbolic σε αυτήν την άσκηση.