ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2020-21
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Λύσεις Πέμπτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1 - Ο μετασχηματισμός Laplace

(α΄) Γνωρίζουμε ότι

$$e^{\alpha t}\cos(bt)u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, \qquad \sigma > a \tag{1}$$

άρα

$$4e^{-5t}\cos(25\pi t)u(t) \xleftrightarrow{L} 4\frac{s+5}{(s+5)^2+(25\pi)^2}, \quad \sigma > -5 \tag{2}$$

$$= 4\frac{s+5}{s^2+10s+25+(25\pi)^2}, \quad \sigma > -5 \tag{3}$$

άρα $a = 4, \quad b = 5, \quad c = 10, \quad d = 25 + (25\pi)^2$.

(β΄) Γνωρίζουμε ότι

$$e^{\alpha t}\cos(bt)u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, \qquad \sigma > a \tag{4}$$

άρα

$$3e^{-2t}\cos(8t-24)u(t-3) = 3e^{-2(t-3)-6}\cos(8(t-3))u(t-3) = 3e^{-2(t-3)}e^{-6}\cos(8(t-3))u(t-3) \tag{5}$$

$$= \frac{3}{e^6}e^{-2(t-3)}\cos(8(t-3))u(t-3) \tag{6}$$

άρα

$$3e^{-2t}\cos(8t-24)u(t-3) \xleftrightarrow{L} \frac{3}{e^6}\frac{s+2}{(s+2)^2+8^2}e^{-3s}, \qquad \sigma > -2 \tag{7}$$

οπότε $a = 3e^{-6}, \quad b = 2, \quad c = 4, \quad d = 68, \quad f = -3$.

(γ΄) Ξεκινώντας από το δεύτερο όρο

$$3\frac{(s-1)(s-2)}{s^2} = 3\frac{s^2-2s-s+2}{s^2} = 3\frac{s^2-3s+2}{s^2}, \qquad \sigma > 0 \tag{8}$$

Είναι

$$3\frac{s^2}{s^2} - \frac{9s}{s^2} + \frac{6}{s^2} \xleftrightarrow{L^{-1}} 3\delta(t) - 9u(t) + 6tu(t) = 3\delta(t) + (6t-9)u(t) \tag{9}$$

οπότε $a = 3, \quad b = 6, \quad c = -9$.

(δ΄) Είναι

$$\frac{a(s+c)}{s^2(s+c)} + \frac{bs(s+c)}{s^2(s+c)} - \frac{bs^2}{s^2(s+c)} = \frac{as+ac+bs^2+bcs-bs^2}{s^2(s+c)} \tag{10}$$

και από εκφώνηση

$$\frac{as+bcs+ac}{s^2(s+c)} = \frac{s-1}{s^2(s+3)}, \qquad \sigma > -3 \tag{11}$$

οπότε $a = -\frac{1}{3}, \quad c = 3, \quad 3b - \frac{1}{3} = 1 \Longleftrightarrow b = \frac{4}{9}$.

Άσκηση 2 - Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

(α') Είναι

$$X(s) = \frac{s+5}{s^2(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2} \tag{12}$$

Αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα καταλήγουμε στο

$$X(s) = -\frac{3}{4}\frac{1}{s} + \frac{5}{2}\frac{1}{s^2} + \frac{3}{4}\frac{1}{s+2} \tag{13}$$

οπότε από πίνακες

$$x(t) = -\frac{3}{4}u(t) + \frac{5}{2}tu(t) + \frac{3}{4}e^{-2t}u(t) \tag{14}$$

(β') Είναι

$$X(s) = \frac{10s^2}{(s+1)(s+3)} = \frac{10s^2}{s^2+4s+3} \tag{15}$$

οπότε

$$X(s) = 10 - \frac{40s+30}{(s+1)(s+3)} \tag{16}$$

Αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα καταλήγουμε στο

$$X(s) = 10 + \frac{5}{s+1} - \frac{45}{s+3} \quad \overset{L^{-1}}{\longleftrightarrow} \quad x(t) = 10\delta(t) + 5e^{-t}tu(t) - 45e^{-3t}u(t) \tag{17}$$

από πίνακες.

(γ') Είναι

$$X(s) = \frac{s}{(s-3)(s^2-4s+5)} = \frac{s}{(s-3)(s-2+j)(s-2-j)}, \qquad \sigma < 2 \tag{18}$$

Αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα καταλήγουμε στο

$$X(s) = \frac{A}{(s-3)} + \frac{B}{(s-2+j)} + \frac{C}{(s-2-j)} \tag{19}$$

$$= \frac{3}{2}\frac{1}{(s-3)} - \frac{3+j}{4}\frac{1}{(s-2+j)} + \frac{3-j}{4}\frac{1}{(s-2-j)} \tag{20}$$

και γυρίζοντας στο πεδίο του χρόνου με πίνακες έχουμε

$$x(t) = -\frac{3}{2}e^{3t}u(-t) + e^{2t}\frac{3(e^{-jt}+e^{jt}) + j(e^{-jt}-e^{jt})}{4}u(-t) \tag{21}$$

$$= \frac{3}{2}(e^{2t}(\cos(t) + \frac{1}{3}\sin(t)) - e^{3t})u(-t) \tag{22}$$

Άσκηση 3 - Συνέλιξη

Είναι

$$C_{xy}(s) = X(s)Y(s) = \frac{8s}{s^2+(\frac{\pi}{2})^2} \cdot \frac{1-e^{-s}}{s} = \frac{16}{\pi}\frac{\frac{\pi}{2}}{s^2+(\frac{\pi}{2})^2} - \frac{16}{\pi}\frac{\frac{\pi}{2}}{s^2+(\frac{\pi}{2})^2}e^{-s} \tag{23}$$

Επειδή

$$e^{-at}\sin(bt)u(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{b}{(s+a)^2+b^2}, \qquad \sigma > -a \tag{24}$$

είναι

$$X(s) = \frac{8}{s^2+(\frac{\pi}{2})^2} - \frac{8}{s^2+(\frac{\pi}{2})^2}e^{-s}, \qquad \sigma > 0 \tag{25}$$

και από πίνακα έχουμε

$$x(t) = \frac{16}{\pi}\sin\Big(\frac{\pi t}{2}\Big)u(t) - \frac{16}{\pi}\sin\Big(\frac{\pi(t-1)}{2}\Big)u(t-1) \tag{26}$$

$$= \frac{16}{\pi}\Big[\sin\Big(\frac{\pi t}{2}\Big)u(t) - \sin\Big(\frac{\pi(t-1)}{2}\Big)u(t-1)\Big] \tag{27}$$

Άσκηση 4 - Μετασχ. Laplace και Συστήματα Ι

(α΄) Είναι

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{1}{(s-1)(s+2)}}{\frac{1}{(s+3)}} = \frac{(s+3)}{(s-1)(s+2)}, \qquad \sigma > 1 \tag{28}$$

(β΄) Είναι

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\} = L^{-1}\{\frac{A}{(s-1)} + \frac{B}{(s+2)}\} \tag{29}$$

Αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα έχουμε

$$H(s) = \frac{4}{3}\frac{1}{(s-1)} - \frac{1}{3}\frac{1}{(s+2)} \quad \overset{L^{-1}}{\longleftrightarrow} \quad h(t) = \frac{4}{3}e^t u(t) - \frac{1}{3}e^{-2t}\frac{1}{(s+2)}u(t) \tag{30}$$

λόγω αιτιατότητας.

(γ΄) Όχι, γιατί το πεδίο σύγκλισης δεν περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα ($\sigma > 1$).

(δ΄) Αφού

$$H(s) = \frac{s+3}{(s-1)(s+2)} = \frac{Y(s)}{X(s)} \Longleftrightarrow X(s)(s+3) = Y(s)(s-1)(s+2) \Longleftrightarrow X(s)s+3X(s) = s^2Y(s)+sY(s)-2Y(s) \tag{31}$$

οπότε

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \frac{d}{dt}y(t) - 2y(t) = 3x(t) + \frac{d}{dt}x(t) \tag{32}$$

Άσκηση 5 - Μετασχ. Laplace και Συστήματα ΙΙ

Μεταφέρουμε τη διαφορική εξίσωση στο χώρο του Laplace:

$$s^3Y(s) + 3s^2Y(s) + 4sY(s) + 2Y(s) = 6X(s) \Longleftrightarrow Y(s)(s^3 + 3s^2 + 4s + 2) = 6X(s) \tag{33}$$

και

$$H(s) = \frac{6}{s^3 + 3s^2 + 4s + 2} = \frac{6}{(s+1)(s+1+j)(s+1-j)} \tag{34}$$

Πόλοι του συστήματος είναι οι $s_1 = -1, \quad s_2 = -1-j, \quad s_3 = -1+j$ και λόγω αιτιατότητας θα πρέπει $\sigma > -1$. Άρα το σύστημα είναι ευσταθές, γιατί το πεδίο σύγκλισης περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα. Αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα έχουμε:

$$H(s) = \frac{6}{s+1} - \frac{3}{s+1+j} - \frac{3}{s+1-j} \tag{35}$$

$$= \frac{6}{s+1} - 3\Big(\frac{1}{s+1+j} + \frac{1}{s+1-j}\Big) \tag{36}$$

$$= \frac{6}{s+1} - 3\Big(\frac{2s+2}{s^2+2s+2}\Big) \tag{37}$$

$$= \frac{6}{s+1} - 6\Big(\frac{s+1}{s^2+2s+2}\Big) \tag{38}$$
$$= \frac{6}{s+1} - 6\Big(\frac{s+1}{s^2+2s+1+1}\Big) \tag{39}$$
$$= \frac{6}{s+1} - 6\Big(\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\Big) \tag{40}$$

και άρα

$$h(t) = 6e^{-t}u(t) - 6e^{-t}\cos(t)u(t) = 6e^{-t}(1-\cos(t))u(t) \tag{41}$$

Άσκηση 6 - Πόλοι και Μηδενικά

(α΄) (*a*) $\sigma > -1$, (*b*) $\sigma > -1$, (*c*) $-1 < \sigma < 1$, (*d*) $\sigma > -1$ γιατί θέλουμε σε όλα να περιλαμβάνεται ο φανταστικός άξονας.

(β΄) (*a*) $\sigma > -1$, (*b*) $\sigma > -1$, (*c*) $\sigma > 1$, (*d*) $\sigma > -1$ γιατί θέλουμε ¨δεξιόπλευρο¨ πεδίο σύγκλισης.

(γ΄) (*a*)$\sigma < -2$, (*b*) $\sigma < -1$, (*c*) $\sigma < -1$, (*d*) $\sigma < -1.5$ γιατί θέλουμε ¨αριστερόπλευρο¨ πεδίο σύγκλισης.

(δ΄) στην περίπτωση (*c*) για ROC: $-1 < \sigma < 1$, γιατί αποτελείται από μια λωρίδα του μιγαδικού επιπέδου και περιλαμβάνει το μιγαδικό άξονα.

[$\star$] Άσκηση 7 - Ηλεκτρικά κυκλώματα και μονόπλευρος μετασχ. Laplace

(α΄) Είναι $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$ και επειδή $\Delta V_{R1} = i(t)R_1$ θα έχουμε

$$\frac{y(t)}{R_1} = i_1(t) + i_2(t) \Longleftrightarrow y(t) = i_1(t)R_1 + i_2(t)R_2 \tag{42}$$

και στο χώρο του Laplace:

$$Y(s) = I_1(s)R_1 + I_2(s)R_2 \tag{43}$$

(β΄) Στο βρόχο abefa, $\sum \Delta V = 0$, δηλαδή

$$\Delta V_{fa} + \Delta V_{ab} + \Delta V_{be} + \Delta V_{ef} = 0 \tag{44}$$
$$x(t) + -i_1(t)R_1 + (-\frac{q(t)}{C} - V_c(0^-) + 0 = 0 \tag{45}$$
$$x(t) + (-y(t)) + (-\frac{q(t)}{C} - V_c(0^-) + 0 = 0 \tag{46}$$
$$x(t) = y(t) + \frac{q(t)}{C} + V_c(0^-) \tag{47}$$
$$x(t) = y(t) + \frac{1}{C}\int_{0^-}^{t} i(\tau)d(\tau) + V_c(0^-) \tag{48}$$

και στο χώρο του Laplace μέσω γνωστών ιδιοτήτων:

$$X(s) = Y(s)) + \frac{1}{sC}I_1(s) + \frac{1}{s}V_c(0^-) \tag{49}$$

(γ΄) Στο βρόχο abcdefa, $\sum \Delta V = 0$, δηλαδή

$$\Delta V_{ab} + \Delta V_{bc} + \Delta V_{cd} + \Delta V_{de} + \Delta V_{ef} + \Delta V_{fa} = 0 \tag{50}$$
$$-y(t) + 0 - i_2(t)R_2 + 0 + 0 + x(t) = 0 \tag{51}$$
$$x(t) = y(t) + i_2(t)R_2 \tag{52}$$

και στο χώρο του Laplace:

$$X(s) = Y(s) + I_2(s)R_2 \tag{53}$$

(δ΄) Έχουμε τις εξισώσεις:

$$Y(s) = I_1(s)R_1 + I_2(s)R_2 \tag{54}$$
$$X(s) = Y(s) + I_2(s)R_2 \tag{55}$$
$$X(s) = Y(s) + \frac{1}{sC}I_1(s) + \frac{1}{s}V_c(0^-) \tag{56}$$

οπότε

$$Y(s) - X(s) = I_1(s)R_1 - Y(s) \tag{57}$$
$$X(s) = Y(s) + I_2(s)R_2 \tag{58}$$
$$X(s) = Y(s) + \frac{1}{sC}I_1(s) + \frac{1}{s}V_c(0^-) \tag{59}$$

και

$$I_1(s) = \frac{2Y(s) - X(s)}{R_1} \tag{60}$$
$$X(s) = Y(s) + I_2(s)R_2 \tag{61}$$
$$X(s) = Y(s) + \frac{1}{sC}\frac{2Y(s) - X(s)}{R_1} + \frac{1}{s}V_c(0^-) \tag{62}$$

Οπότε καταλήγουμε στη σχέση

$$(1 + sCR_1)X(s) = (sCR_1 + 2)Y(s) + R_1CV_c(0^-) \tag{63}$$

Αρα

$$(1 + 1000 \cdot 100 \cdot 10^{-6}s)X(s) = (1000 \cdot 100 \cdot 10^{-6}s + 2)Y(s) + 1000 \cdot 100 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \tag{64}$$
$$(1 + 0.1s)X(s) = (0.1s + 2)Y(s) + 0.5 \tag{65}$$
$$(10 + s)X(s) = (s + 20)Y(s) + 5 \tag{66}$$
$$Y(s) = \frac{s+10}{s+20}X(s) - \frac{5}{s+20} \tag{67}$$

Με

$$X(s) = \frac{3}{s+10} \tag{68}$$

παίρνουμε

$$Y(s) = \frac{s+10}{s+20} \cdot \frac{3}{s+10} - \frac{5}{s+20} = \frac{3}{s+20} - \frac{5}{s+20} = -\frac{2}{s+20} \tag{69}$$

και από αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace παίρνουμε:

$$y(t) = -2e^{-20t}u(t) \tag{70}$$

[$\star$] Άσκηση 8 - Toy-φιλτράρισμα στο MATLAB/Octave

Κώδικας MATLAB/Octave

[$\star$] Άσκηση 9 - Σχεδίαση χαμηλοπερατού (lowpass) φίλτρου - MATLAB/Octave

(α΄) Το $H(f)$ είναι το $H(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right)$, και άρα το $h(t) = 2f_c\text{sinc}(2f_ct)$, που είναι μη-αιτιατό και άπειρης διάρκειας.

β') Είναι

$$|H(s)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{s}{j2\pi f_c}\right)^{2N}} \tag{71}$$

γ') Οι πόλοι δίνονται ως

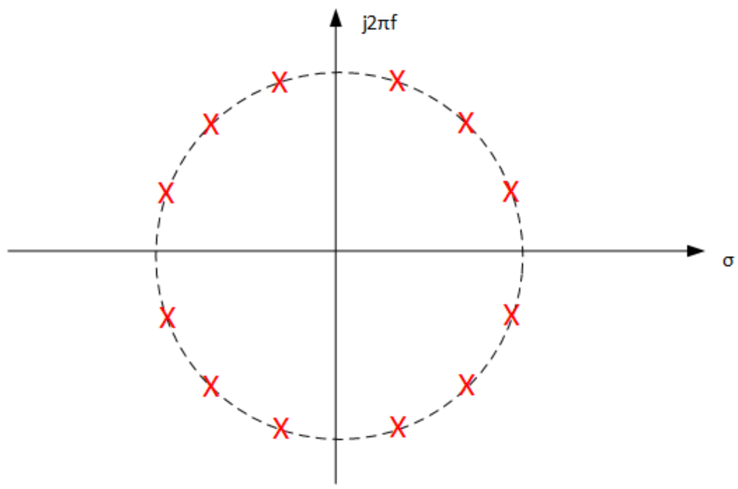
$$1+\left(\frac{s}{j2\pi f_c}\right)^{2N} = 0 \tag{72}$$

$$\left(\frac{s}{j2\pi f_c}\right)^{2N} = -1 \Longrightarrow s^{2N} = (j2\pi f_c)^{2N}(-1) \tag{73}$$

$$s_k = j2\pi f_c \cdot (-1)^{\frac{1}{2N}} = e^{j\frac{\pi}{2}} 2\pi f_c \cdot (-1)^{\frac{1}{2N}} \tag{74}$$

$$s_k = 2\pi f_c e^{j\pi \frac{2k+N-1}{2N}}, \quad k = 0, 1, ..., 2N-1 \tag{75}$$

αφού $-1 = e^{j(2k-1)\pi}, \quad k = 0, 1, 2, ..., 2N-1$. Άρα το διάγραμμα θα είναι:



δ') Επιλέγουμε όλους τους πόλους που βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο. Έτσι, το ROC θα είναι

$$R_H : \Re\{s\} > \max \Re\{s_k^{left}\} \tag{76}$$

ε') Είναι για $N = 1$

$$H(s) = \frac{1}{s + 2\pi f_c}$$

για $N = 2$

$$H(s) = \frac{1}{(s - 2\pi f_c e^{j3\pi/4})(s - 2\pi f_c e^{j5\pi/4})}$$

ϛ') Για $N = 3$,

$$H(s) = \frac{1}{(s^3 + 2s^2 + 2s + 1)}$$

άρα

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{(s^3+2s^2+2s+1)} \Longrightarrow Y(s)(s^3+2s^2+2s+1) = X(s) \xrightarrow{L^{-1}} \tag{77}$$

$$\xrightarrow{L^{-1}} \frac{d^3}{dt^3}y(t) + 2\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 2\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = x(t) \tag{78}$$

ζ') Κώδικας MATLAB.

Άσκηση 10 - Συμβολικός Μετασχηματισμός Laplace στο MATLAB/Octave
Κώδικας MATLAB/Octave