

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2020-21

Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 14/4/2021

Ημερομηνία Παράδοσης : 26/4/2021, 23:59

Οι ασκήσεις με [*] είναι **bonus**, +10 μονάδες η καθεμία στο βαθμό αυτής της σειράς ασκήσεων (δηλ. μπορείτε να πάρετε μέχρι 110/80 σε αυτή τη σειρά.)

[*] Άσκηση 1 - Μετασχ. Fourier και Ιδιότητες - I

Βρείτε μια έκφραση για τα παρακάτω σήματα χωρίς να περιλαμβάνεται η πράξη της συνέλιξης:

$$x_1(t) = \text{rect}(t) * \cos(\pi t) \quad (1)$$

$$x_2(t) = \text{rect}(t) * \cos(2\pi t) \quad (2)$$

$$x_3(t) = \text{sinc}(t) * \text{sinc}(t/2) \quad (3)$$

$$\text{Απ: } x_1(t) = \frac{2}{\pi} \cos(\pi t), x_2(t) = 0, x_3(t) = \text{sinc}(t/2)$$

Άσκηση 2 - Συνέλιξη στο χρόνο και στη συχνότητα

Αν γνωρίζετε ότι

$$y(t) = x(t-2) * x(t+2) \quad (4)$$

και ότι $Y(f) = 3\text{sinc}^2(2f)$, βρείτε το $x(t)$.

$$\text{Απ: } x(t) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \text{rect}(t/2)$$

Άσκηση 3 - Μετασχ. Fourier και Ιδιότητες II

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt \quad (5)$$

για

$$g(t) = 100\text{sinc}\left(\frac{t-8}{30}\right) \quad (6)$$

Απ: 3000

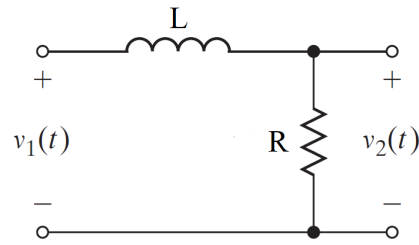
Άσκηση 4 - Έξοδος ΓΧΑ συστήματος για περιοδική είσοδο

Η διαφορική εξίσωση ενός RL κυκλώματος όπως στο Σχήμα 1 δίνεται ως

$$\frac{d}{dt}v_2(t) + \frac{R}{L}v_2(t) = \frac{R}{L}v_1(t) \quad (7)$$

με $v_1(t)$, $v_2(t)$ την είσοδο και την έξοδο αντίστοιχα.

(α) Βρείτε την απόκριση σε συχνότητα, $H(f)$.



Σχήμα 1: Σχήμα Άσκησης 4.

(β) Αν $R/L = 10$, υπολογίστε την έξοδο του συστήματος για είσοδο $v_1(t) = 5 \cos(20t)$.

(γ) Αν στην είσοδο εμφανιστεί ένα περιοδικό σήμα με συντελεστές εκθετικής Σειράς Fourier

$$X_k = \frac{1}{5} \text{sinc}(k/5)$$

και θεμελιώδη συχνότητα $f_0 = 20$ Hz, ποιά μορφή θα έχουν οι εκθετικοί συντελεστές Fourier στην έξοδο του συστήματος;

$$\text{Απ.: (α) } H(f) = \frac{\frac{R}{L}}{\frac{R}{L} + j2\pi f}, \text{ (β) } v_2(t) = \sqrt{5} \cos(20t - 63.43^\circ), \text{ (γ) } Y_k = \frac{\text{sinc}(k/5)}{j20\pi k + 5}$$

Άσκηση 5 - Αντίστροφος Μετασχ. Fourier

Έστω ο μετασχ. Fourier

$$X(f) = \frac{j2\pi f}{-4\pi^2 f^2 + 5j2\pi f + 6} \quad (8)$$

Χωρίς να βρείτε το σήμα $x(t)$ στο οποίο αντιστοιχεί, βρείτε το μετασχ. Fourier των

(α) $x(2t)$

(β) $x(3t - 6)$

(γ) $\frac{d}{dt}x(t)$

(δ) $x(-t)$

(ε) $e^{-j100t}x(t)$

(ς) $\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$

Άσκηση 6 - Αντίστροφος Μετασχ. Fourier II

Δείξτε ότι ο μετασχ. Fourier

$$X(f) = \begin{cases} 0.5 \cos(\pi f/20), & |f| < 10 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (9)$$

αντιστοιχεί στο σήμα

$$x(t) = 5\text{sinc}\left(20\left(t - \frac{1}{40}\right)\right) + 5\text{sinc}\left(20\left(t + \frac{1}{40}\right)\right) \quad (10)$$

Άσκηση 7 - Μετασχ. Fourier στο MATLAB/Octave

Συζητήσαμε αρκετά στις διαλέξεις για τον μετασχ. Fourier και βρήκαμε τη μαθηματική του έκφραση για αρκετά

γνωστά μας σήματα. Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα του μετασχ. Fourier στο MATLAB/Octave με αριθμητικό τρόπο θα πρέπει να πάρουμε δείγματα από τον άξονα του χρόνου και τον άξονα της συχνότητας, ώστε να κατασκευάσουμε το γινόμενο $x(t)e^{-j2\pi ft}$ και να το ολοκληρώσουμε.

Το MATLAB/Octave φυσικά έχει δική του συνάρτηση που υπολογίζει τον μετ. Fourier ενός σήματος, η οποία λέγεται `fft`. Παρ' όλα αυτά, εμείς θα φτιάξουμε τη δική μας, για να έχουμε απόλυτο έλεγχο και γιατί η `fft` απαιτεί κάποιες γνώσεις παραπάνω για να τη χρησιμοποιήσετε.

Θυμηθείτε, στο MATLAB/Octave, όλα είναι πίνακες, άρα έχουν διακριτές τιμές. Έχετε δει σε προηγούμενη σειρά ασκήσεων πώς υπολογίζουμε στο MATLAB/Octave ένα ολοκλήρωμα. Παρόμοια θα δουλέψουμε και εδώ, μόνο που το ολοκλήρωμά μας δε θα είναι τιμή, αλλά ένας πίνακας $[1 \times L]$, που θα περιέχει μερικές τιμές της συνάρτησης $X(f)$, δηλ. του μετασχ. Fourier που ψάχνουμε.

(α) Έστω ότι θέλουμε να δημιουργήσουμε ένα σήμα διάρκειας 10 δευτερολέπτων. Όπως γνωρίζετε ήδη, ο χρόνος των 10 δευτερολέπτων έχει άπειρες χρονικές στιγμές, οπότε θα πρέπει να διαλέξουμε κάποιες τιμές του σήματος. Έστω ότι θέλουμε να παίρνουμε τιμές ανά 0.01 δευτερόλεπτα. Ας δημιουργήσουμε πρώτα τον άξονα του χρόνου που θα χρησιμοποιηθεί για να πάρουμε τιμές από το σήμα μας. Θα είναι:

```
Dt = 1/100;      % Sampling step in time
D = 10;          % Signal duration in time
t = 0:Dt:D;      % Time axis (you've seen this before)
```

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε το συχνοτικό περιεχόμενο ενός σήματος στο διάστημα $[-10, 10]$, με ίδια "ανάλυση" όπως και στο πεδίο του χρόνου, δηλ. 0.01 Hz. Κατασκευάζουμε τον άξονα των συχνοτήτων ως:

```
Df = 0.01;      % Sampling step in frequency
f = -10:Df:10;  % Frequency axis = [-10, ..., 10]
```

Θεωρούμε λοιπόν ότι μας ενδιαφέρουν μόνο οι παραπάνω συχνότητες $[-10, 10]$, με ανάλυση Df , και ότι σε αυτό το διάστημα θα υπολογίσουμε τον μετασχ. Fourier. Άρα ουσιαστικά θα βλέπουμε τον μετασχ. Fourier μόνο στο διάστημα $[-10, 10]$. Γνωρίζοντας τα δείγματα του χρόνου και της συχνότητας μπορούμε να κατασκευάσουμε το λεγόμενο *πίνακα ανάλυσης* του μετασχ. Fourier:

```
M = exp(-j*2*pi*f'*t);
```

Δείτε τη διάστασή του στο MATLAB/Octave και προσπαθήστε να καταλάβετε τι περιέχει σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη του. Αναφέρετε τα συμπεράσματά σας.

(β) Έστω ότι θέλουμε να βρούμε το φάσμα πλάτους του γνωστού σήματος

$$x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0 \quad (11)$$

του οποίου γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι είναι

$$|X(f)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4\pi^2 f^2}} \quad (12)$$

Ας δημιουργήσουμε και σχεδιάσουμε το σήμα μας, για $a = 1$:

```
a = 1;
x = exp(-a*t);
figure; plot(t,x);
xlabel('Time (s)');
title('Signal x(t) = exp(-at)');
```

Εδώ παραλείψαμε τη χρήση της βηματικής, αφού ο άξονας του χρόνου που δημιουργήσαμε πριν έχει θετικές τιμές.

Για να υπολογίσουμε τον μετασχ. Fourier, θα δουλέψουμε όπως για το ολοκλήρωμα Riemann σε προηγούμενη σειρά ασκήσεων, δηλ. θα δημιουργήσουμε την προσέγγιση του μετασχ. Fourier ως

$$X(f) = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \Delta t_i \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \left(x(\Delta t_i) e^{-j2\pi f \Delta t_i} \right) \quad (13)$$

και όπως έχουμε δει σε προηγούμενες σειρές ασκήσεων, αυτό στο MATLAB/Octave υλοποιείται ως

```
X = Dt*x*M.'; % Prosoxh sto .' !
```

Ο τελεστής `.'` υπολογίζει τον *ανάστροφο* ενός πίνακα (ενώ ο τελεστής `'` υπολογίζει τον *συζυγή ανάστροφο* ή *ερμητιανό* ενός πίνακα, και καλό θα ήταν να το αποφεύγετε). Πολλές φορές χρειάζεται αυτός ο τελεστής για να συμφωνούν οι διαστάσεις των πινάκων που εμπλέκονται ως γινόμενα.

(γ) Ας συγκρίνουμε το φάσμα πλάτους του παραπάνω με το θεωρητικό φάσμα πλάτους που ξέρουμε.

```
Xtheoretic = 1./(a + j*2*pi*f);
plot(f, abs(X)); grid;
hold on; plot(f, abs(Xtheoretic), 'r--');
hold off;
```

Μοιάζουν τα δυο φάσματα;

(δ) Ας προσπαθήσουμε τώρα να συνθέσουμε το σήμα στο χρόνο μέσω του αντίστροφου μετασχ. Fourier, δηλ. ας προσπαθήσουμε να βρούμε το σήμα στο χρόνο, $x(t)$! Ο μετασχ. Fourier που έχουμε βρει ορίζεται μόνο στο διάστημα $[-10, 10]$, αρα σίγουρα θα έχουμε κάποιο σφάλμα στον υπολογισμό του $x(t)$. Για να δούμε όμως...

Γνωρίζοντας τα δείγματα του χρόνου και της συχνότητας μπορούμε να κατασκευάσουμε το λεγόμενο *πίνακα σύνθεσης* του μετασχ. Fourier:

```
Minv = exp(j*2*pi*t'*f);
```

Δείτε τη διάστασή του στο MATLAB/Octave και προσπαθήστε να καταλάβετε τι περιέχει σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη του. Αναφέρετε τα συμπεράσματά σας.

(ε) Για να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier, θα δουλέψουμε όπως για το ολοκλήρωμα Riemann προηγουμένως, με μικρές διαφοροποιήσεις, δηλ. θα δημιουργήσουμε την προσέγγιση του αντίστροφου μετασχ. Fourier ως

$$x(t) = \lim_{\Delta f_i \rightarrow 0} \Delta f_i \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \left(X(\Delta f_i) e^{j2\pi \Delta f_i t} \right) \quad (14)$$

Η σύνθεση του σήματος στο χρόνο γίνεται ως

```
x_est = Df*Xtheoretic*Minv.';
```

Τυπώστε στον ίδιο άξονα το γράφημα του πραγματικού μέρους (συνάρτηση real) και το αρχικό $x(t)$. Είναι τα ίδια; Αν όχι, γιατί;

Παραδώστε κώδικα και γραφήματα για όλα τα παραπάνω ερωτήματα, και απαντήστε και σε όσα θεωρητικά ερωτήματα έχουν επισημανθεί παραπάνω.

Πραγματικές Εφαρμογές του Μετασχηματισμού Fourier

Άσκηση 8 - Μετασχηματισμός Fourier και Παθολογία Φωνής

Ο Μετασχ. Fourier είναι ένα εξαιρετικά χρήσιμο εργαλείο σε πολλούς τομείς της Επεξεργασίας Σήματος. Ένας τομέας είναι η ανίχνευση παθολογίας φωνής.

- (α) Ηχογραφήστε τη φωνή σας όταν εκφέρετε το φώνημα /α/, σταθερά, για περίπου 3 δευτερόλεπτα. Φροντίστε να βρίσκεστε σε ήσυχο περιβάλλον, και προσπαθήστε (αν γίνεται) να χρησιμοποιήσετε κανονικό μικρόφωνο (αλλιώς, χρησιμοποιήστε τα ενσωματωμένα των laptops σας). Χρησιμοποιήστε ένα πρόγραμμα ηχογράφησης της επιλογής σας (π.χ. το δωρεάν πρόγραμμα Wavesurfer ή το Audacity) και φροντίστε η ηχογράφηση να είναι μονοφωνική (δηλ. όχι στέρεο - δικαναλική) και να γίνει σε συχνότητα δειγματοληψίας 16000 Hz, και ακρίβεια αποθήκευσης 16 bits σε μορφή .WAV. Σας δίνεται και ένα ενδεικτικό σήμα στο site του μαθήματος, αν δεν μπορείτε να πραγματοποιήσετε τα παραπάνω.
- (β) Χρησιμοποιήστε τον κώδικα ανάλυσης μετασχ. Fourier που σας δόθηκε στην προηγούμενη - 7η - άσκηση (και για ευκολία, σας δίνεται στο αρχείο CTFT.m στο site του μαθήματος) για να αναλύσετε το σήμα όπως περιγράφεται παρακάτω:

- Επιλέξτε ένα τμήμα (ή, όπως λέμε στην ορολογία της Επεξεργασίας Σήματος, ένα *παράθυρο*) φωνής, με διάρκεια περίπου 50 ms, κατά προτίμηση από τη μέση περίπου της ηχογράφησης. Στο MATLAB, αυτό μπορεί να γίνει ως¹:

```
[s, fs] = audioread('myvoice.wav'); % Load the recorded speech signal
start = 1 % Assume our speech segment starts
% from time = 1 sec...
finish = 1.05 ; % ...and ends after 50 ms
start_s = round(start*fs); % Convert time in samples
finish_s = round(finish*fs); % ----- " -----
segment = s(start_s:finish_s); % Chop the desired speech segment
plot([start_s:finish_s]./fs, segment); % Visualization!
```

- Στη μεταβλητή *segment* έχετε ένα τμήμα φωνής σας διάρκειας 50 ms. Χρησιμοποιήστε κώδικα ανάλυσης Fourier για να αναλύσετε το σήμα σας στην περιοχή συχνοτήτων από 2000 ως 4000 Hz. Βρείτε το μετασχ. Fourier και απεικονίστε γραφικά το φάσμα πλάτους, με χρήση των εντολών *abs*, *plot*, όπως στην προηγούμενη σειρά ασκήσεων. Στον κώδικα της ανάλυσης, χρησιμοποιήστε μικρό βήμα στη συχνότητα, της τάξης του 1 Hz, δηλ.

```
Df = 1;
f = 2000:Df:4000;
```

- Αν το φάσμα πλάτους που θα δείτε, παρουσιάσει μια συμμετρία ως προς τη συχνότητα 3000 Hz, τότε υπάρχει μια πιθανότητα 20% να αναπτύξετε ασθένεια στο φάρυγγά σας τα επόμενα 5 χρόνια. Προσέξτε λοιπόν να κάνετε σωστά την ανάλυση! ☺

Παραδώστε κώδικα που υπολογίζει το μετασχ. Fourier ενός τυχαίου παραθύρου φωνής, και εμφανίζει το φάσμα πλάτους του. Παραδώστε ένα γράφημα αυτού του φάσματος πλάτους. Γράψτε αν παρατηρείτε κάτι.

¹Παλιότερες εκδόσεις MATLAB/Octave μπορεί να έχουν τη συνάρτηση *waverad* αντί της *audioread*.

[*] Άσκηση 9 - Επέκταση της προηγούμενης άσκησης

Ίσως να σκεφτήκατε ότι το να πάρουμε ένα τυχαίο κομμάτι απ' το σήμα φωνής μας και αφού το αναλύσουμε, να βγάλουμε απόφαση για κάτι τόσο σοβαρό όπως μια πιθανή παθολογία, είναι λίγο ριψοκίνδυνο και επιπόλαιο. Κάτι πιο ασφαλές θα ήταν το εξής:

- (α) Χωρίστε όλο το σήμα σε παράθυρα διάρκειας 50 ms, με μια επικάλυψη γειτονικών παραθύρων της τάξης του 50%, δηλ. “προχωράτε” το παράθυρό σας πάνω στο σήμα της φωνής κάθε 25 ms, ώστε τα παράθυρά σας να επικαλύπτονται κατά μισό παράθυρο. Αν σας φαίνεται δύσκολο, μπορείτε να μη χρησιμοποιήσετε επικάλυψη. Αυτό μπορείτε να το κάνετε με χρήση βρόχων επανάληψης όπως τους γνωρίζετε από τη C (for, while) - δε διαφέρουν πολύ. Γράψτε help for, help while για να δείτε πως συντάσσονται. Σκεφτείτε ότι απλά πρέπει να διατρέχετε ένα πίνακα-γραμμή (που είναι το σήμα σας) ανά κάποιο αριθμό στοιχείων.
- (β) Υπολογίστε το μετασχ. Fourier για τις συχνότητες 2000 – 4000 Hz και βρείτε το φάσμα πλάτους του κάθε παραθύρου. Αποθηκεύστε το φάσμα πλάτους κάθε παραθύρου σε μια γραμμή ενός πίνακα X . Αυτό μπορεί να γίνει ως εξής:

```
% Let N be the whole signal duration in samples
for i = 1:N
    % Let seg be the variable holding
    % our current speech segment
    MF = dt*seg*M.';           % Compute Fourier Transform
    Fasma_platous = abs(MF);   % Compute Magnitude Spectrum
    Y(i, :) = Fasma_platous;   % Store it into the i-th row
                                % of matrix Y
end
```

- (γ) Να υπολογίσετε το “μέσο φάσμα πλάτους”, δηλ. μια μέση τιμή όλων των φασμάτων πλάτους που έχετε βρει, έτσι ώστε στο τέλος να έχουμε μόνο ένα φάσμα πλάτους, και να αποφασίσετε για την παθολογία βάσει αυτού. Χρήσιμη θα σας φανεί η εντολή mean του MATLAB.
- (δ) Ακολουθώντας μια τέτοια διαδικασία έχουμε πιο εύρωστα, με τη στατιστική έννοια, συμπεράσματα.

Παραδώστε κώδικα που υπολογίζει και εμφανίζει το μέσο φάσμα πλάτους του μετασχ. Fourier. Παραδώστε αυτό το μέσο φάσμα πλάτους σε γράφημα. Γράψτε αν παρατηρείτε κάτι.

[*] Άσκηση 10 - Μετασχηματισμός Fourier κι Αφαίρεση Θορύβου

Σας δίνεται στο site του μαθήματος ένα σήμα μουσικής sample-noise.wav. Πρόκειται για ένα γνωστό τραγούδι “μολυσμένο” με ένα ισχυρό σήμα ημιτόνου σε κάποια υψηλή, σταθερή, συχνότητα μεταξύ 1000 και 3000 Hz. Σκοπός της άσκησης είναι να αναλύσετε το σήμα και να αφαιρέσετε το θόρυβο. Ακολουθήστε τα παρακάτω βήματα.

- (α) Αρχικά, ακούστε το σήμα².

```
[s, fs] = audioread('sample-noise.wav'); % Load the speech signal
soundsc(s, fs);                         % Listen to it!
t = 0:1/fs:(length(s)-1)/fs;           % Time axis in seconds
plot(t, s);                              % Visualize!
```

- (β) Παρατηρήστε - και ακούστε - ότι η συνιστώσα του ημιτόνου είναι ισχυρή, και εύκολα διακρίνεται μέσα στον ήχο της ηχογράφησης. Γνωρίζετε όμως ότι λόγω της ισχύος της, θα πρέπει να “ξεχωρίζει” σχετικά στο φάσμα πλάτους του σήματος από το υπόλοιπο σήμα. Επίσης, επειδή είναι σταθερής συχνότητας, μπορούμε να την εντοπίσουμε σε οποιοδήποτε σημείο (παράθυρο) του σήματος κι αν επιλέξουμε.

²Παλιότερες εκδόσεις MATLAB/Octave μπορεί να έχουν τη συνάρτηση waverad αντί της audioread.

(γ) Διαλέξτε ένα τυχαίο παραθύρο σήματος, διάρκειας 30 ms και αναλύστε το στις παραπάνω συχνότητες (1000 – 3000 Hz) με τον μετασχ. Fourier, χρησιμοποιώντας φυσικά το φάσμα πλάτους³. Προσπαθήστε να εντοπίσετε το ημίτονο. Σκεφτείτε ότι ο μετασχ. Fourier του ημιτόνου πλησιάζει τη συνάρτηση Δέλτα που έχει γίνει συνέλιξη με το μετασχ. Fourier του παραθύρου σας. Πρακτικά, θα περιμένετε να δείτε κάποιο ισχυρό peak (κορυφή) στο φάσμα πλάτους. Όμως επειδή το περιεχόμενο του σήματος είναι μουσική και φωνή, το φάσμα πλάτους θα περιέχει και άλλες συχνότητες. Οπότε η αναγνώριση του peak από ένα και μόνο παράθυρο δε θα είναι εύκολη, εκτός αν είστε τυχεροί/ες. ©Στην ανάλυσή σας, χρησιμοποιήστε ενδεικτικά τον παρακάτω κώδικα :

```
T = 30; % Window duration of 30ms
Ts = T*10^(-3)*fs; % Window duration of 30ms in samples
x = s(45213:45213 + Ts); % Choose randomly a 30 ms segment
% from the speech signal that starts
% from the sample number 45213
% (also randomly chosen)
plot(x); % Visualize!
Dt = 1/fs; % Analysis step in time
Df = 1; % Analysis step in frequency
f = 1000:Df:3000; % Frequency axis that is of our
% interest
t = 0:(1/fs):(Ts/fs); % Time axis of 30ms duration
M = exp(-j*2*pi*f'*t); % Matrix M
x = reshape(x, 1, length(x)); % Make sure x is a row vector

X = Dt*x*M.'; % Fourier Transform
figure; plot(f, abs(X)); % Search for a strong peak in
% [1000, 3000]
```

(δ) Επιλέξτε διάφορα παράθυρα μέσα στο σήμα (4 – 5), όλα ίδιας διάρκειας, μέχρι να εντοπίσετε τη συχνότητα του ημιτόνου με κάποια βεβαιότητα. Προς διευκόλυνσή σας, δίνεται ότι η συχνότητα είναι *ακέραιος αριθμός*, πολλαπλάσιος του 100, στο διάστημα [1000, 3000] Hz. Σε κάθε plot που κάνετε, στο πάνω μέρος υπάρχουν κάποια εικονίδια. Ένα από αυτά, ο Data Cursor, σας δίνει τις συντεταγμένες του σημείου του σήματος που θα κάνετε κλικ. Έτσι, μπορείτε να βρίσκετε εύκολα τη συχνότητα ενός σημείου στο φάσμα σας. Παραδώστε μερικά plots από τα παράθυρα που διαλέξατε, τόσο στο χρόνο όσο και στο φάσμα πλάτους.

(ε) Σας δίνουμε επιπλέον ότι το ισχυρό αυτό ημίτονο έχει πλάτος $A = 0.01$ και αρχική φάση $\phi = 0$, δηλ. είναι της μορφής

$$n(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$$

Σε προηγούμενες ασκήσεις, έχετε δει πώς δημιουργούμε ένα απλό ημίτονο. Δημιουργήστε ένα ημίτονο στο MATLAB με πλάτος και φάση που σας δίνεται παραπάνω, και με συχνότητα αυτήν που βρήκατε από την ανάλυσή σας στο προηγούμενο ερώτημα. Φροντίστε να έχει ίδια διάρκεια με ολόκληρο το σήμα s του τραγουδιού. Για να βρείτε τη διάρκεια αυτή, χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση `length` του MATLAB. Για παραδειγμα, αν θέλετε να φτιάξετε ένα ημίτονο διάρκειας 100 δειγμάτων, δηλ. $1/160 = 0.00625$ s (με συχνότητα δειγματοληψίας 16000 Hz), πλάτους 1 και συχνότητας 200 Hz, θα κάνετε το εξής:

```
A = 1;
f0 = 200;
fs = 16000;
n = A*cos(2*pi*f0*[0:99]/fs); % Example
```

³Σε σχέση με τις προηγούμενες δυο ασκήσεις, στην πραγματική ρεύουσα ομιλία και στον ήχο, το σήμα αλλάζει πιο γρηγορά απ' ότι όταν λέμε ένα απλό /a/. Έτσι, χρησιμοποιούμε μικρότερο παράθυρο ανάλυσης για να είμαστε σχετικά ασφαλείς ότι το περιεχόμενό του δεν αλλάζει σημαντικά.

(ζ) Αφαιρέστε το σήμα ημιτόνου που φτιάξατε παραπάνω από το σήμα της ηχογράφησης s , απλώς αφαιρώντας μεταξύ τους το διάνυσμα s και το διάνυσμα ημιτόνου που μόλις φτιάξατε, όπως παρακάτω. Ακούστε το αποτέλεσμα. Θα πρέπει να ακούγεται πλέον καθαρό το σήμα. ☺

```
clean_sig = s - n.';           % s = signal, n = cosine
soundsc(clean_sig, fs);      % Listen!
```

Αν η πράξη σας βγάλει σφάλμα, αφαιρέστε το `.'`.

Σημείωση: Το παραπάνω παράδειγμα ήταν πολύ “εκπαιδευτικό” ☺. Στην πράξη, το ημίτονο μπορεί να μην έχει σταθερό πλάτος ή μηδενική φάση, ή ακόμα κι αν έχει, δεν μπορούμε να γνωρίζουμε εκ των προτέρων τις τιμές τους. Έτσι, μια μέθοδος όπως η παραπάνω, στο πεδίο του χρόνου δηλαδή, δε θα δουλέψει. Συνήθως χρησιμοποιούμε μεθόδους στο χώρο της συχνότητας για να αφαιρέσουμε τον ενοχλητικό θόρυβο, εφαρμόζοντας τα λεγόμενα *notch* φίλτρα, τα οποία είναι συστήματα που μηδενίζουν το πλάτος μιας συγκεκριμένης συχνότητας από ένα σήμα που δέχονται ως είσοδο. Η εφαρμογή μιας τέτοιας τεχνικής ξεφεύγει από τα πλαίσια του μαθήματος⁴, αν και ίσως προς το τέλος του μαθήματος να μπορέσετε να υλοποιήσετε ένα τέτοιο απλό φίλτρο! ☺

Παραδώστε όσα plots ζητούνται στη διάρκεια της εκφώνησης, και κώδικα MATLAB που καθαρίζει το ηχητικό σήμα από το θόρυβο.

Άσκηση 11 - Μετασχ. Fourier και Ανάλυση Ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος

Τοποθετώντας ηλεκτρόδια σε διάφορες περιοχές της κεφαλής ανιχνεύουμε ηλεκτρικές δραστηριότητες (διαφορές δυναμικού) οι οποίες θεωρείται ότι αποτελούν μια έκφραση της εγκεφαλικής δραστηριότητας. Τέτοιες καταγραφές έχουν γίνει τόσο κατά το στάδιο του ύπνου όσο και κατά τη διάρκεια κάποιας δραστηριότητας (π.χ. όταν προσπαθείτε να λύσετε τις ασκήσεις στο HY215 ☺). Από κάθε ηλεκτρόδιο (σε συνδυασμό με ένα ηλεκτρόδιο αναφοράς) συλλέγουμε ένα σήμα όπου παρατηρούμε διαφορές δυναμικού.

Ένα σοβαρό πρόβλημα είναι η ανίχνευση των συχνοτήτων που υπάρχουν σε αυτές τις καταγραφές. Σε ορισμένες συχνότητες έχουμε αντιστοιχίσει κάποιους *ρυθμούς*, όπως ονομάζονται, και οι οποίοι σηματοδοτούν κάτι ενδιαφέρον για την εγκεφαλική μας δραστηριότητα. Για παράδειγμα, η συχνότητα των 10 Hz αντιστοιχεί στο ρυθμό Άλφα.

Σας δίνουμε δυο καταγραφές διάρκειας ενός δευτερολέπτου η καθεμία. Η καταγραφή των δεδομένων έγινε λαμβάνοντας ένα δείγμα του σήματος συνεχούς χρόνου ανά 0.01 δευτερόλεπτα. Ζητάμε να ελέγξετε αν αυτά τα σήματα έχουν ρυθμό Άλφα στο συχνοτικό τους περιεχόμενο (δηλ. αν έχουν ισχυρή φασματική συνιστώσα στα 10 Hz). Οι ρυθμοί εμφανίζονται συνήθως στο εύρος συχνοτήτων [3, 20] Hz, άρα θα στοχεύσουμε σε αυτό το διάστημα.

Με βάση τα παραπάνω, ο άξονας του χρόνου στο MATLAB θα είναι:

```
dt = 0.01;           % Time sampling
t = 0:dt:1;         % Time axis
```

ενώ για τη συχνότητα θα είναι

```
df = 0.01;           % Frequency sampling
f = 3:df:20;         % Frequency axis
```

Για να εισάγετε τα δυο σήματα στο MATLAB χρησιμοποιήστε την εντολή

```
load 'EEG-new.mat'
```

και θα σας εμφανιστούν δυο σήματα x_1 , x_2 στο workspace σας.

⁴Είναι αντικείμενο του μαθήματος HY370-Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος.

- (α) Απεικονίστε τα δυο σήματα στο χρόνο σε δυο γραφήματα με χρήση της εντολής `plot` και του άξονα `t` που δημιουργήσαμε παραπάνω. Παραδώστε τα γραφήματα που προκύπτουν.
- (β) Θέλουμε να δούμε το φάσμα πλάτους (το μέτρο του μετασχ. Fourier δηλαδή) των σημάτων αυτών για να αναγνωρίσουμε αν υπάρχει κάποια ισχυρή συνιστώσα στα 10 Hz - δηλ. ο ρυθμός Άλφα. Χρησιμοποιήστε τον πίνακα ανάλυσης $M = \exp(-j*2*\pi*f'*t)$ όπως στην 7η Άσκηση για να αναλύσετε τα δυο σήματα στο διάστημα [3, 20] Hz. Παραδώστε τα δυο φάσματα πλάτους σχεδιασμένα το ένα πάνω στο άλλο (εντολή `hold on` ανάμεσα στα δυο `plot`) και αναφέρετε αν βρίσκετε ρυθμό Άλφα σε κάποιο από τα δυο σήματα.

Παραδώστε κώδικα MATLAB που εκτελεί την απεικόνιση των φασμάτων πλατών καθώς και όποια γραφήματα σας ζητούνται στα παραπάνω ερωτήματα.