ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2020-21
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Λύσεις Τέταρτης Σειράς Ασκήσεων

[⋆] Άσκηση 1 - Μετασχ. Fourier και Ιδιότητες - Ι

(α΄) Είναι

$$x_1(t) = \mathrm{rect}(t) * \cos(\pi t) \longleftrightarrow X_1(f) = \mathrm{sinc}(f)\Big(\frac{1}{2}\delta(f-0.5) + \frac{1}{2}\delta(f+0.5)\Big) \tag{1}$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{sinc}(0.5)\delta(f-0.5) + \frac{1}{2}\mathrm{sinc}(-0.5)\delta(f+0.5) \tag{2}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2}\delta(f-0.5) + \frac{1}{2}\frac{\sin(-\pi/2)}{-\pi/2}\delta(f+0.5) \tag{3}$$
$$= \frac{1}{\pi}\delta(f-0.5) + \frac{1}{\pi}\delta(f+0.5) \tag{4}$$

Άρα

$$x_1(t) = \frac{2}{\pi}\cos(\pi t) \tag{5}$$

(β΄) Είναι

$$x_2(t) = \mathrm{rect}(t) * \cos(2\pi t) \longleftrightarrow X_2(f) = \mathrm{sinc}(f)\Big(\frac{1}{2}\delta(f-1) + \frac{1}{2}\delta(f+1)\Big) \tag{6}$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{sinc}(1)\delta(f-1) + \frac{1}{2}\mathrm{sinc}(-1)\delta(f+1) \tag{7}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\sin(\pi)}{\pi}\delta(f-1) + \frac{1}{2}\frac{\sin(-\pi)}{-\pi}\delta(f+1) \tag{8}$$
$$= 0\delta(f-1) + 0\delta(f+1) \tag{9}$$

Άρα

$$x_2(t) = 0 \tag{10}$$

(γ΄) Είναι

$$x_3(t) = \mathrm{sinc}(t) * \mathrm{sinc}(t/2) \longleftrightarrow X_3(f) = \mathrm{rect}(f)\cdot 2\mathrm{rect}(2f) = 2\mathrm{rect}(2f) \tag{11}$$

Άρα

$$x_3(t) = \mathrm{sinc}(t/2) \tag{12}$$

Άσκηση 2 - Συνέλιξη στο χρόνο και στη συχνότητα

Από τη σχέση

$$y(t) = x(t-2) * x(t+2) \tag{13}$$

παίρνουμε

$$Y(f) = e^{-j2\pi 2f}X(f)e^{j2\pi 2f}X(f) = X^2(f) \tag{14}$$

και αφού $Y(f) = 3\mathrm{sinc}^2(2f)$, θα είναι

$$X^2(f) = Y(f) = 3\mathrm{sinc}^2(2f) \tag{15}$$

$$(X(f) - \sqrt{3}\mathrm{sinc}(2f))(X(f) + \sqrt{3}\mathrm{sinc}(2f)) = 0 \tag{16}$$

Οπότε

$$X(f) = \pm\sqrt{3}\mathrm{sinc}(2f) \tag{17}$$

και άρα

$$x(t) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{rect}\Big(\frac{t}{2}\Big) \tag{18}$$

Άσκηση 3 - Μετασχ. Fourier και Ιδιότητες ΙΙ

Το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt \tag{19}$$

είναι το ίδιο με

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-j2\pi ft}dt\Big|_{f=0} = G(0) \tag{20}$$

με $G(f) = F\{g(t)\}$. Οπότε

$$g(t) = 100\mathrm{sinc}\Big(\frac{t-8}{30}\Big) \longleftrightarrow G(f) = 3000\mathrm{rect}(30f)e^{-j2\pi 8f} \tag{21}$$

Προφανώς

$$G(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = 3000 \tag{22}$$

Άσκηση 4 - Έξοδος ΓΧΑ συστήματος για περιοδική είσοδο

(α') Θα είναι

$$\frac{d}{dt}v_2(t) + \frac{R}{L}v_2(t) = \frac{R}{L}v_1(t) \longleftrightarrow (j2\pi f)V_2(f) + \frac{R}{L}V_2(f) = \frac{R}{L}V_1(f) \tag{23}$$

και

$$\frac{V_2(f)}{V_1(f)} = H(f) = \frac{\frac{R}{L}}{\frac{R}{L} + j2\pi f} \tag{24}$$

(β') Αν $R/L = 10$, τότε

$$H(f) = \frac{10}{10 + j2\pi f} \tag{25}$$

Η έξοδος θα είναι της μορφής

$$v_2(t) = 5|H(10/\pi)|\cos(20t + \phi_H(10/\pi)) \tag{26}$$

με

$$H(10/\pi) = \frac{10}{10+j20} = \frac{1}{1+2j} = \frac{1-2j}{|1+2j|^2} = \frac{1-2j}{5} = \frac{1}{5} + j\frac{-2}{5} \tag{27}$$

οπότε

$$|H(10/\pi)| = \sqrt{(1/5)^2 + (-2/5)^2} = \sqrt{1/5} = \frac{\sqrt{5}}{5} \tag{28}$$

$$\phi_H(10/\pi) = \tan^{-1}\frac{-2/5}{1/5} = -\tan^{-1}(2) = -63.43^\circ \tag{29}$$

Οπότε

$$v_2(t) = \sqrt{5}\cos(20t - 63.43^\circ) \tag{30}$$

(γʹ) Έστω η είσοδος στη μορφή

$$v_1(t) = \sum_k X_k e^{j2\pi f_0 t} = \sum_k X_k e^{j40\pi t} = \frac{1}{5}\sum_k \mathrm{sinc}\Big(\frac{k}{5}\Big)e^{j40\pi t} \tag{31}$$

τότε η έξοδος θα είναι της μορφής

$$v_2(t) = \frac{1}{5}\sum_k H(20k)\mathrm{sinc}\Big(\frac{k}{5}\Big)e^{j40\pi t} = \frac{1}{5}\sum_k \frac{10}{10+j40\pi k}\mathrm{sinc}\Big(\frac{k}{5}\Big)e^{j40\pi t} \tag{32}$$

και άρα

$$Y_k = \frac{1}{5}\frac{10}{10+j40\pi k}\mathrm{sinc}\Big(\frac{k}{5}\Big) = \frac{\mathrm{sinc}(k/5)}{j20\pi k+5} \tag{33}$$

Άσκηση 5 - Αντίστροφος Μετασχ. Fourier

(αʹ) Είναι

$$x(2t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}X(f/2) = \frac{1}{2}\frac{j\pi f}{-\pi^2 f^2 + 5j\pi f + 6} \tag{34}$$

(βʹ) Είναι

$$x(3t-6) \longleftrightarrow \frac{1}{3}X(f/3)e^{-j2\pi 6f/3} = \frac{1}{3}e^{-j2\pi 2f}\frac{j2\pi\frac{f}{3}}{-\frac{4}{9}\pi^2 f^2 + \frac{5}{3}j2\pi f + 6} \tag{35}$$

(γʹ) Είναι

$$fracddtx(t) \longleftrightarrow (j2\pi f)X(f) = \frac{(j2\pi f)^2}{-4\pi^2 f^2 + 5j2\pi f + 6} = \frac{-4\pi^2 f^2}{-4\pi^2 f^2 + 5j2\pi f + 6} \tag{36}$$

(δʹ) Είναι

$$x(-t) \longleftrightarrow X(-f) = \frac{-j2\pi f}{-4\pi^2 f^2 - 5j2\pi f + 6} \tag{37}$$

(εʹ) Είναι

$$e^{-j100t}x(t) \longleftrightarrow X\Big(f+\frac{50}{\pi}\Big) = \frac{j2\pi(f+50/\pi)}{-4\pi^2(f+50/\pi)^2 + 5j2\pi(f+50/\pi) + 6} \tag{38}$$

(ϛʹ) Είναι

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \longleftrightarrow \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{X(0)}{2}\delta(f) = \frac{1}{-4\pi^2 f^2 + 5j2\pi f + 6} + 0\delta(f) = \frac{1}{-4\pi^2 f^2 + 5j2\pi f + 6} \tag{39}$$

Άσκηση 6 - Αντίστροφος Μετασχ. Fourier II

Ο μετασχ. Fourier

$$X(f) = \begin{cases} 0.5\cos(\pi f/20), & |f| < 10 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{40}$$

μπορεί να γραφεί ως

$$X(f) = \frac{1}{2}\cos\Big(2\pi\frac{f}{40}\Big)\mathrm{rect}\Big(\frac{f}{20}\Big) \tag{41}$$

και στο πεδίο του χρόνου

$$x(t) = \Big[\frac{1}{4}\delta\Big(t-\frac{1}{40}\Big) + \frac{1}{4}\delta\Big(t+\frac{1}{40}\Big)\Big] * 20\mathrm{sinc}(20t) \tag{42}$$

και από την ιδιότητα της συνέλιξης σήματος με συνάρτηση Δέλτα, έχουμε

$$x(t) = 5\text{sinc}\Big(20\Big(t - \frac{1}{40}\Big)\Big) + 5\text{sinc}\Big(20\Big(t + \frac{1}{40}\Big)\Big) \tag{43}$$

Άσκηση 7 - Μετασχ. Fourier στο MATLAB/Octave

(α΄) Η διάσταση του πίνακα M είναι της μορφής $N \times K$, με N να είναι το πλήθος γραμμών και K το πλήθος στηλών, με κάθε γραμμή να αποτελεί τον υπολογισμό του εκθετικού $exp(-j2\pi f_i t_j)$ για κάποια συχνότητα f_i, για όλες τις χρονικές στιγμές t_j που έχουμε επιλέξει. Όμοια, σε κάθε στήλη έχουμε τον υπολογισμού του εκθετικού $exp(-j2\pi f_i t_j)$, για κάποια χρονική στιγμή t_j, για όλες τις συχνότητες f_i που έχουμε επιλέξει.

(β΄) -

(γ΄) Τα δυο φάσματα μοιάζουν πολύ (υπάρχει μικρό σφάλμα που αναδεικνύεται μέσω μεγέθυνσης).

(δ΄) Η διάσταση του πίνακα M_{inv} είναι της μορφής $K \times N$, με K να είναι το πλήθος γραμμών και N το πλήθος στηλών, με κάθε γραμμή να αποτελεί τον υπολογισμό του εκθετικού $exp(j2\pi f_i t_j)$ για κάποια χρονική στιγμή t_j, για όλες τις συχνότητες f_i που έχουμε επιλέξει. Όμοια, σε κάθε στήλη έχουμε τον υπολογισμού του εκθετικού $exp(j2\pi f_i t_j)$, για κάποια συχνότητα f_i, για όλες τις χρονικές στιγμές t_j που έχουμε επιλέξει.

(ε΄) Όχι, δεν είναι τα ίδια, γιατί τόσο ο άξονας του χρόνου όσο και της συχνότητας είναι πεπερασμένος, είναι δηλ. μια προσέγγιση του αρχικού σήματος.

Πραγματικές Εφαρμογές του Μετασχηματισμού Fourier

Άσκηση 8 - Μετασχηματισμός Fourier και Παθολογία Φωνής
Κώδικας MATLAB/Octave

[⋆] Άσκηση 9 - Επέκταση της προηγούμενης άσκησης
Κώδικας MATLAB/Octave

[⋆] Άσκηση 10 - Μετασχηματισμός Fourier κι Αφαίρεση Θορύβου
Κώδικας MATLAB/Octave

Άσκηση 11 - Μετασχ. Fourier και Ανάλυση Ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος
Κώδικας MATLAB/Octave