ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2020-21
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1 - Διαφορικές Εξισώσεις

(α') Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο δίνεται ως

$$\lambda^2 + 7\lambda + 10 \tag{1}$$

και οι ρίζες του είναι $\lambda_1 = -2$, $\lambda = -5$. Η απόκριση θα είναι

$$y_{zi}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-5t},\ \ t > 0 \tag{2}$$

Από τις αρχικές συνθήκες παίρνουμε το σύστημα

$$y_{zi}(0^-) = c_1 + c_2 = 0 \tag{3}$$
$$y'_{zi}(0^-) = -2c_1 - 5c_2 = -1 \tag{4}$$

και λύνοντας καταλήγουμε ότι $c_1 = -1/3$, $c_2 = 1/3$, και άρα στη σχέση

$$y_{zi}(t) = \Big(-\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-5t}\Big)u(t) \tag{5}$$

(β') Έστω το σύστημα S_0

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 7\frac{d}{dt}y(t) + 10y(t) = x(t) \tag{6}$$

Η κρουστική του απόκριση θα είναι της μορφής

$$h_o(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-5t} \tag{7}$$

και από τις αρχικές συνθήκες $h(0^+) = 0$, $h'(0^+) = 1$ έχουμε το σύστημα

$$h_o(0^+) = c_1 + c_2 = 0 \tag{8}$$
$$h'_o(0^+) = -2c_1 - 5c_2 = 1 \tag{9}$$

Λύνοντας καταλήγουμε ότι $c_1 = 1/3$, $c_2 = -1/3$, και άρα

$$h_o(t) = \frac{1}{3}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-5t},\ \ t > 0 = \Big(\frac{1}{3}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-5t}\Big)u(t) \tag{10}$$

Για το σύστημα που έχουμε θα είναι

$$h(t) = h_o(t) - \frac{d}{dt}h_o(t) = (e^{-2t} - 2e^{-5t})u(t) \tag{11}$$

μετά από πράξεις.

(γ') Η απόκριση μηδενικής κατάστασης δίνεται από τη συνέλιξη της εισόδου με την κρουστική απόκριση, δηλ.

$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-2\tau} - 2e^{-5\tau})u(\tau)e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau \tag{12}$$

$$= \int_0^t (e^{-2\tau} - 2e^{-5\tau})e^{-(t-\tau)}d\tau = \int_0^t e^{-2\tau}e^{-(t-\tau)}d\tau - \int_0^t 2e^{-5\tau}e^{-(t-\tau)}d\tau \tag{13}$$

$$= e^{-t}\int_0^t e^{-\tau}d\tau - 2e^{-t}\int_0^t e^{-4\tau}d\tau = e^{-t}(-e^{-\tau})\Big|_0^t + \frac{1}{2}e^{-t}e^{-4\tau}\Big|_0^t \tag{14}$$

$$= e^{-t}(-e^{-t}+1) + \frac{1}{2}e^{-t}(e^{-4t}-1) = e^{-t} - e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-5t} - \frac{1}{2}e^{-t} \tag{15}$$

$$= \frac{1}{2}e^{-t} - e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-5t} \tag{16}$$

για $t > 0$, δηλ.

$$y_{zs}(t) = \Big(\frac{1}{2}e^{-t} - e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-5t}\Big)u(t) \tag{17}$$

(δ΄) Είναι

$$y_{tot}(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) \tag{18}$$

$$= \Big(-\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-5t}\Big)u(t) + \Big(\frac{1}{2}e^{-t} - e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-5t}\Big)u(t) \tag{19}$$

$$= \Big(\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{4}{3}e^{-2t} + \frac{5}{6}e^{-5t}\Big)u(t) \tag{20}$$

Άσκηση 2 - Συνέλιξη

(α΄) Είναι

$$c_{xy}(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \tag{21}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} u(1-\tau)e^{-(t-\tau)}u(t-\tau-1)d\tau \tag{22}$$

$$= e^{-t}\int_{-\infty}^{+\infty} u(1-\tau)e^{\tau}u(t-\tau-1)d\tau \tag{23}$$

$$= e^{-t}\int_{-\infty}^{+\infty} u(1-\tau)e^{\tau}u(t-\tau-1)d\tau \tag{24}$$

Όμως

$$u(1-\tau) = 1,\ \tau < 1 \text{ και } u(t-\tau-1) = 1,\ \tau < t-1 \tag{25}$$

Οπότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $t - 1 < 1 \Longrightarrow t < 2$, τότε

$$c_{xy}(t) = e^{-t}\int_{-\infty}^{t-1} e^{\tau}d\tau = e^{-t}(e^{(t-1)} - 0) = e^{-1} \tag{26}$$

  άρα

$$c_{xy}(t) = e^{-1}u(2-t) \tag{27}$$

- Αν $t - 1 > 1 \Longrightarrow t > 2$, τότε

$$c_{xy}(t) = e^{-t}\int_{-\infty}^{1} e^{\tau}d\tau = e^{-t}(e^{1} - 0) = e^{1-t} \tag{28}$$

  άρα

$$c_{xy}(t) = e^{-(t-1)}u(t-2) \tag{29}$$

  Οπότε τελικά

$$c_{xy}(t) = \frac{1}{e}u(2-t) + e^{-(t-1)}u(t-2) \tag{30}$$

(β΄) Είναι

$$c_{xy}(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \tag{31}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} 2u(\tau-1)e^{-(t-\tau)}u(t-\tau-1)d\tau \tag{32}$$

$$= 2e^{-t}\int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau-1)e^{\tau}u(t-\tau-1)d\tau \tag{33}$$

Όμως

$$u(\tau-1) = 1,\ \tau > 1 \text{ και } u(t-\tau-1) = 1,\ \tau < t-1 \tag{34}$$

δηλ.

$$u(\tau-1)u(t-\tau-1) = 1,\ 1 < \tau < t-1 \tag{35}$$

Οπότε

$$c_{xy}(t) = 2e^{-t}\int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau-1)e^{\tau}u(t-\tau-1)d\tau \tag{36}$$

$$= 2e^{-t}\int_{1}^{t-1} e^{\tau}d\tau = 2e^{-t}\Big(e^{\tau}\Big|_{1}^{t-1}\Big) \tag{37}$$

$$= 2e^{-t}(e^{t-1} - e^{1}) = 2\Big(\frac{1}{e} - e^{-(t-1)}\Big) \tag{38}$$

για $t > 2$. Άρα

$$c_{xy}(t) = 2\Big(\frac{1}{e} - e^{-(t-1)}\Big)u(t-2) \tag{39}$$

Άσκηση 3 - Σειρές Fourier - I

Είναι

$$x(t) = 2\sin^2(2\pi t) - \cos(4\pi t) = 2\Big(\frac{e^{j2\pi t} - e^{-j2\pi t}}{2j}\Big)^2 - \frac{1}{2}e^{j4\pi t} - \frac{1}{2}e^{-j4\pi t} \tag{40}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}e^{j4\pi t} - \frac{1}{2}e^{-j4\pi t} - \frac{1}{2}e^{j4\pi t} - \frac{1}{2}e^{-j4\pi t} \tag{41}$$

$$= 1 - e^{j4\pi t} - e^{-j4\pi t} = 1 + e^{j\pi}e^{j4\pi t} + e^{-j\pi}e^{-j4\pi t} \tag{42}$$

$$= 1 + e^{j\pi}e^{j2\pi 2t} + e^{-j\pi}e^{-j2\pi 2t} \tag{43}$$

Η θεμελιώδης συχνότητα ισούται με $f_0 = 2$ Hz και η περίοδος είναι $T_0 = 1/f_0 = 0.5$ Hz. Τα φάσματα φαίνονται στο Σχήμα 1.

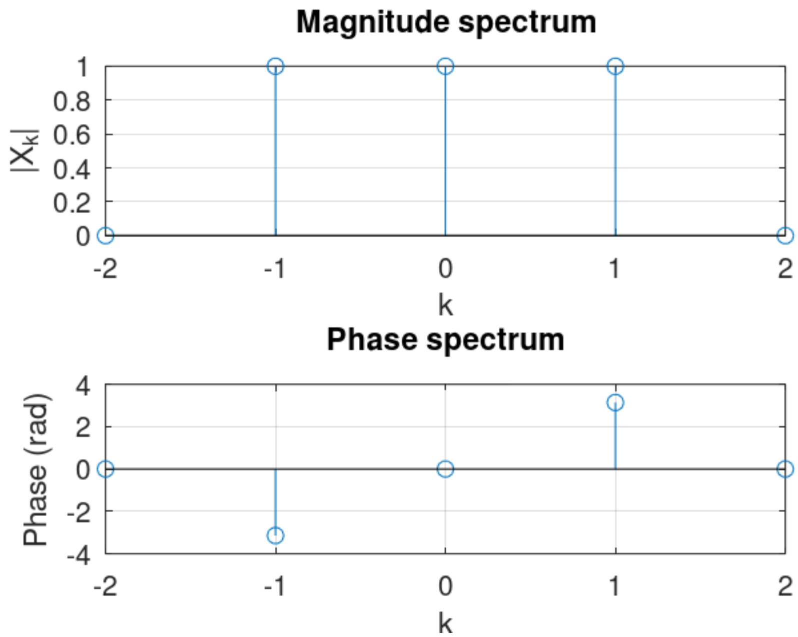
Άσκηση 4 - Σειρές Fourier - II

(α΄) Το σήμα είναι πραγματικό γιατί τα φάσματα πλάτους και φάσης έχουν άρτια και περιττή συμμετρία, αντίστοιχα.

(β΄) Θα είναι

$$x(t) = e^{j2\pi 2/0.005t} + e^{-j2\pi 2/0.005t} + e^{j\pi/3}e^{j2\pi 4/0.005t} + e^{-j\pi/3}e^{-j2\pi 4/0.005t} + e^{j\pi/4}e^{j2\pi 8/0.005t} + e^{-j\pi/4}e^{-j2\pi 8/0.005t} \tag{44}$$

$$= 2 + 2\cos(2\pi 400t) + 3\cos(2\pi 800t + \pi/3) + 2\cos(2\pi 1600t + \pi/4) \tag{45}$$



Σχήμα 1: *Φάσματα Άσκησης 3.*

Άσκηση 5 - Σειρές Fourier - III

(α΄) Το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο $T_0 = 2$ s και θεμελιώδη συχνότητα $f_0 = 0.5$ Hz. Είναι

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^1 2tdt = \frac{1}{2}t^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2} \tag{46}$$

και

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{2}\int_0^1 2te^{-j\pi kt}dt & (47)\\ &= \frac{e^{-j\pi kt}}{(-j\pi k)^2}(-j\pi kt - 1)\Big|_0^1 = \frac{e^{-j\pi kt}}{\pi^2k^2}(1 + j\pi kt)\Big|_0^1 & (48)\\ &= \frac{1}{\pi^2k^2}\Big(e^{-j\pi k} + j\pi k e^{-j\pi k} - 1) & (49)\end{aligned}$$

Όμως

$$e^{-j\pi k} = (-1)^k \tag{50}$$

οπότε

$$X_k = \frac{1}{2\pi^2k^2}\Big((-1)^k + j\pi k(-1)^k - 1) \tag{51}$$

Άρα

$$x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi^2k^2}\Big((-1)^k + j\pi k(-1)^k - 1)e^{j\pi kt} \tag{52}$$

(β΄) Αν παραγωγίσουμε το σήμα στο χρόνο μπορούμε να το περιγράψουμε σε μια περίοδό του ως

$$\frac{d}{dt}x(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t < 1 \\ -2, & t = 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = 2\text{rect}(t - 1/2) - 2\delta(t-1) \tag{53}$$

Άρα μπορεί να χωριστεί σε δυο σήματα, τα

$$x_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\text{rect}\Big(t - \frac{4k+1}{2}\Big) \tag{54}$$

και

$$x_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} -2\delta(t - (2k+1)) \tag{55}$$

τα οποία αναπτύσσονται σε σειρά Fourier με συντελεστές

$$X_{k_1} = \frac{1}{j\pi k}(1 - (-1)^k) \tag{56}$$

$$X_{k_2} = -\frac{2}{T_0}e^{-j\pi k} = -(-1)^k \tag{57}$$

Οπότε οι συντελεστές Fourier της παραγώγου θα είναι

$$X_k^d = X_{k_1} + X_{k_2} = \frac{1}{j\pi k}(1 - (-1)^k) - (-1)^k \tag{58}$$

Από την ιδιότητα της παραγώγισης θα έχουμε

$$X_k^d = j2\pi k f_0 X_k = j\pi k X_k \Longrightarrow X_k = \frac{X_k^d}{j\pi k} = \frac{1}{j\pi k}\Big(\frac{1}{j\pi k}(1 - (-1)^k) - (-1)^k\Big) \tag{59}$$

Άσκηση 6 - Σειρές Fourier στο MATLAB/Octave
Κώδικας MATLAB/Octave

[$\star$] **Άσκηση 7 - Σύνθεση Μουσικής στο MATLAB/Octave**
Κώδικας MATLAB/Octave

[$\star$] **Άσκηση 8 - Βελτίωση της προηγούμενης άσκησης**
Κώδικας MATLAB/Octave

Άσκηση 9 - ΓΧΑ Συστήματα και Παραγωγή Ηχούς

(α') Θέτοντας $x(t) = \delta(t)$ παίρνουμε

$$h(t) = \delta(t) + a\delta(t - t_d) \tag{60}$$

(β') Θέτοντας $x(t) = \delta(t)$ παίρνουμε

$$h(t) = \delta(t) + \sum_{i=1}^{N} a_i\delta(t - t_i) \tag{61}$$

(γ') Κώδικας MATLAB/Octave