ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2020-21
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 2/3/2021 Ημερομηνία Παράδοσης: 14/3/2021, 23:59

Οι ασκήσεις με [⋆] είναι **bonus**, $+10$ μονάδες η καθεμία στο βαθμό αυτής της σειράς ασκήσεων (δηλ. μπορείτε να πάρετε μέχρι $90/70$ σε αυτή τη σειρά.)

Άσκηση 1 - Σήματα

(α') Ένα σήμα λέγεται *άρτιο* αν ισχύει ότι

$$x(t) = x(-t) \tag{1}$$

ενώ λέγεται *περιττό* αν

$$x(t) = -x(-t) \tag{2}$$

Ελέγξτε αν τα παρακάτω σήματα είναι άρτια, περιττά, ή τίποτε από τα δυο.

i. $x(t) = -4t$
ii. $x(t) = e^{-|t|}$
iii. $x(t) = 5\cos(3t)$
iv. $x(t) = \sin(3t - \pi/2)$
v. $x(t) = u(t)$

(β') Οποιοδήποτε σήμα όμως μπορεί να διασπασθεί μοναδικά σε ένα *άρτιο μέρος* και ένα *περιττό μέρος*, ως

$$x_{\text{άρτιο}}(t) = \frac{1}{2}\Big(x(t) + x(-t)\Big) \quad , \quad x_{\text{περιττό}}(t) = \frac{1}{2}\Big(x(t) - x(-t)\Big) \tag{3}$$

Η μέση τιμή ενός σήματος $x(t)$ δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$M_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)dt \tag{4}$$

με T μια τυχαία χρονική ποσότητα. Δείξτε ότι

i.
$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x_{\text{περιττό}}(t)dt = 0$$

ii.
$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x_{\text{άρτιο}}(t)dt = M_x$$

iii.
$$x_{\text{περιττό}}(0) = 0$$

και

$$x_{\text{άρτιο}}(0) = x(0)$$

Απ.: (α) i. περιττό, ii. άρτιο, iii. άρτιο, iv. άρτιο, v. τίποτα

Άσκηση 2 - Ενέργεια και Ισχύς

Ελέγξτε τα παρακάτω σήματα ως προς το αν είναι σήματα ενέργειας ή ισχύος (ή τίποτε από τα δυο), υπολογίζοντας την πιο πιθανή από τις δυο μετρικές, σύμφωνα με όσα γνωρίζετε από τις διαλέξεις. Δικαιολογήστε την επιλογή της μετρικής πριν κάνετε τις πράξεις.

(α') $x(t) = 2\text{rect}(t)$

(β') $x(t) = \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(10\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$

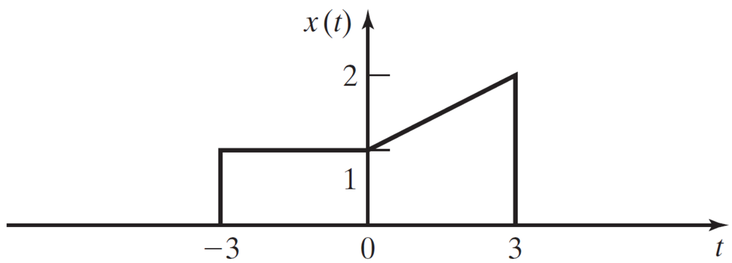
(γ') $x(t) = u(t) - u(10 - t)$

(δ') $x(t) = 3,\ \forall t$

Απ.: (α) 4, (β) 1, (γ) 1, (δ) 9

Άσκηση 3 - Μετασχηματισμοί Σημάτων

Έστω το σήμα του σχήματος 1. Σχεδιάστε τα παρακάτω σήματα:



Σχήμα 1: *Σχήμα Άσκησης 3.*

(α') $x(-t/3)$

(β') $x(-t)$

(γ') $x(3 + t)$

(δ') $x(2 - t)$

Άσκηση 4 - Συναρτήσεις Δέλτα

Υπολογίστε τις εκφράσεις

(α') $(\sqrt{t} - 2)\delta(t - 8)$

(β') $\cos(\pi t)\delta(t - 1)$

(γ') $(x - t)\delta(t - 1)$

(δ') $\left(\frac{d}{dt}\frac{t^2}{2}\right)\delta(t + 1)$

(ε') $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi t)\delta(t - 1)dt$

(ϛ') $\displaystyle\int_{10}^{+\infty} \sin((t - 1)\pi)\delta(t - 2)dt$

(ζ') $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\pi t)\delta(t - 6)dt$

(η') $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} (t - 12)^2\delta(t - 12)dt$

Άσκηση 5 - Συναρτήσεις Δέλτα και Βηματικές

Υπολογίστε και σχεδιάστε τη γενικευμένη παράγωγο του σήματος

$$g(t) = 3\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\text{rect}(t) \tag{5}$$

Αξιοποιήστε τη γραφή του τετραγωνικού παλμού με χρήση δυο βηματικών συναρτήσεων

Απ.: $g'(t) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}\left[\delta\left(t+\frac{1}{2}\right)+\delta\left(t-\frac{1}{2}\right)\right]+\frac{3\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\mathrm{rect}(t)$

Άσκηση 6 - Συστήματα

Ελέγξτε αν τα παρακάτω συστήματα είναι γραμμικά, χρονικά αμετάβλητα, ευσταθή, αιτιατά, και δυναμικά.

(α') $y(t) = 3x(3t+3)$ (β') $y(t) = 7x(t)+6$ (γ') $y(t) = e^{tx(t)}$

Απ:

	Γρ.	Χ.Α.	Ευστ.	Αιτ.	Δυν.
(α)	✓	✗	✓	✗	✓
(β)	✗	✓	✓	✓	✗
(γ)	✗	✗	✗	✓	✗

Άσκηση 7 - Ολοκλήρωση στο MATLAB/Octave

Στην προσπάθειά σας να προσομοιώσετε (και φυσικά να κατανοήσετε) τα σήματα και τις έννοιες που θα δείτε στο μάθημα αυτό, θα χρειαστείτε να υπολογίζετε ολοκληρώματα στο MATLAB/Octave. Ευτυχώς η διαδικασία είναι πολύ απλή μέσω του ολοκληρώματος Riemann που (ελπίζουμε να ☺) γνωρίζετε από τον Απειροστικό Λογισμό. Ας δούμε πως μπορούμε να υπολογίσουμε ένα ολοκλήρωμα στο MATLAB/Octave.

Ολοκλήρωμα Riemann

Ο B. Riemann πρότεινε την προσέγγιση ενός ολοκληρώματος από τμηματικά σταθερές συναρτήσεις, των οποίων το αθροιστικό εμβαδό δίνει μια τιμή για το ολοκλήρωμα, δηλ.

$$\int_a^b x(t)dt = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{N} x(\Delta t_i)\Delta t \tag{6}$$

Τι μας λέει η παραπάνω σχέση; Μας λέει ότι η τιμή ενός ορισμένου ολοκληρώματος μπορεί να βρεθεί αν κάνουμε τα εξής:

(α') Χωρίζουμε το διάστημα $[a, b]$ σε N ίσα μέρη μήκους Δt το καθένα. Αυτή η διαμέριση του διαστήματος λέγεται *ομοιόμορφη*.

(β') Παίρνουμε ένα σημείο Δt_i σε κάθε ένα από αυτά τα διαστήματα. Για παράδειγμα, το μέσο του διαστήματος Δt ή όποιο άλλο θέλουμε.

(γ') Υπολογίζουμε την τιμή της συνάρτησης $x(t)$ στα σημεία Δt_i.

(δ') Έχουμε τώρα N τιμές της συνάρτησης $x(t)$ και N τμήματα μήκους Δt.

(ε') Πολλαπλασιάζουμε τις N τιμές της συνάρτησης $x(t)$, δηλ. τις τιμές $x(\Delta t_i)$, με τα N το πλήθος Δt, και τις προσθέτουμε όλες μαζί, για να πάρουμε το αποτέλεσμα.

Για να είναι ακριβές το αποτέλεσμα, πρέπει το Δt να είναι όσο μικρότερο γίνεται, δηλ. ιδανικά να ισχύει $\Delta t \to 0$, ώστε να υπάρχει ισότητα μεταξύ ολοκληρώματος και αθροίσματος.

Θυμηθείτε από την προηγούμενη σειρά ασκήσεων ότι ο συνεχής χρόνος δεν μπορεί να αναπαρασταθεί ακριβώς στο MATLAB/Octave, οπότε χρειάζεται να πάρουμε *δείγματα* αυτού και να κάνουμε τις πράξεις μας. Όσο πιο πολλά τα δείγματα, τόσο πιο κοντά θα είναι η προσέγγισή μας στην πραγματική τιμή του ολοκληρώματος.

Ας υπολογίσουμε τώρα το (διάσημο) ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi/2} \left(\frac{t}{\sin(t)}\right)^2 dt = \pi \ln(2) \tag{7}$$

μέσω της προσέγγισης του Riemann.

Αρχικά πρέπει να προσέξουμε ότι η συνάρτηση μέσα στο ολοκλήρωμα δεν ορίζεται για $t = 0$. Οπότε:

```
% 8a orisoume ton a3ona apo th xronikh stigmh Dt ws to pi/2, oxi apo to t=0 giati
% ekei o paronomasths den orizetai
% O a3onas tmhmatopoieitai ana Dt arketa mikro alla ths epiloghs mas
Dt = 0.001;
t = Dt:Dt:pi/2;

% Orizoume th synarthsh mas
x = (t./sin(t)).^2;

% Ypologizoume to a8roisma Riemann
Result = Dt * sum(x)
```

και το MATLAB/Octave αποκρίνεται ως

```
Result =

    2.1764
```

Ας το επιβεβαιώσουμε:

```
% Epibebaiwsh
pi*log(2)

ans =

    2.1776
```

Η διαφορά οφείλεται στη δειγματοληψία του άξονα t. Αν μειώσουμε το βήμα μας $Dt = 0.001$ σε (π.χ.) $Dt = 0.00001$, θα πλησιάσουμε ακόμα περισσότερο στο ακριβές αποτέλεσμα.

Μια πολύ σπουδαία ιδιότητα που έχει το MATLAB/Octave είναι η ικανότητά του να εκτελεί (μερικώς) *συμβολικούς* υπολογισμούς, δηλ. υπολογισμούς χωρίς αριθμητικές τιμές! Ας δούμε πως θα υλοποιούσαμε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\frac{5}{4} - \cos(t)} = \frac{8\pi}{3} \tag{8}$$

όχι αριθμητικά αυτή τη φορά, αλλά συμβολικά[1].

```
% Orizoume mia symbolikh metablhth t
syms t;

% Orizoume th synarthsh mas
x = 1./(5/4 - cos(t));
```

[1]Οι χρήστες Octave θα χρειαστούν το πακέτο symbolic, όπως στην 1η Σειρά Ασκήσεων.

```
% Zhtame apo th symbolikh synarthsh "int" na ypologisei gia mas
% to oloklhrwma!!
Result = int(x, t, 0, 2*pi)
```

και το MATLAB/Octave μας δίνει

```
Result =

(8*pi)/3
```

Βλέπετε ότι όχι μόνο μας υπολογίζει το σωστό αποτέλεσμα αλλά μας το δίνει και σε κλειστή μορφή!!

Με βάση τα παραπάνω, επιβεβαιώστε στο MATLAB/Octave τα ολοκληρώματα **τόσο αριθμητικά όσο και συμβολικά**:

I. $\int_0^{\pi} \sin(4\theta)\cos(5\theta)d\theta = -\frac{8}{9}$

II. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\frac{5}{4}-\cos(t)} = \frac{8\pi}{3}$

III. $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t}dt = -\frac{\pi^2}{12}$ (Σημείωση[2])

IV. $\int_1^2 \frac{(t+2)(t-2)}{t^2}dt = -1$

Παραδώστε τον κώδικα που εκτελεί τους υπολογισμούς.

[$\star$] Άσκηση 8 - Ανίχνευση Δραστηριότητας Ομιλίας στο πρότυπο GSM - MATLAB/Octave

Όπως είπαμε και στην τάξη, μόνο και μόνο με τις έννοιες της *ενέργειας* και των απλών πρότυπων σημάτων, όπως ο *τετραγωνικός παλμός*, μπορείτε να δείτε μερικές εφαρμογές όπως η *ανίχνευση δραστηριότητας ομιλίας - voice activity detection*. Αλγόριθμοι που υλοποιούν τέτοιες εφαρμογές υπάρχουν σε κάθε κινητό τηλέφωνο. Μια ιδιαίτερα απλοϊκή υλοποίηση ενός τέτοιου είναι η εξής:

- Διαβάζετε ένα αρχείο ομιλίας στο MATLAB/Octave που σας δίνεται.
- Παραθυροποιείτε με χρήση τετραγωνικού παλμού το σήμα σας, "κόβοντας" έτσι ένα τμήμα του.
- Για κάθε παραθυροποιημένο σήμα, υπολογίζετε την ενέργεια του από τη γνωστή σχέση.
- Ανάλογα με την τιμή της ενέργειας, αποφασίζετε αν το παραθυροποιημένο σήμα περιέχει ομιλία ή όχι.
- Προχωράτε στο επόμενο παραθυροποιημένο σήμα και επαναλαμβάνετε, ως το τέλος του σήματος.

Ερωτήματα που προκύπτουν από την ανάγνωση του παραπάνω αλγορίθμου:

(α΄) **Πόση είναι η διάρκεια του τετραγωνικού παλμού;** Μια τιμή κοντά στα 30 ms είναι καλή. Δεν υπάρχει βέλτιστη διάρκεια, υπάρχουν trade-offs είτε έχει μεγάλη είτε μικρή διάρκεια.

(β΄) **Πόση απόσταση θα έχουν τα διαδοχικά παραθυροποιημένα σήματα μεταξύ τους;** Στην πράξη θα πρέπει όχι απλά να είναι διαδοχικά, αλλά να έχουν και κάποιο ποσοστό *επικάλυψης*. Για τους δικούς μας σκοπούς, θα χρησιμοποιήσουμε 0% επικάλυψη, δηλ. τα παραθυροποιημένα σήματα θα είναι ακριβώς διαδοχικά, χωρίς "κενά" μεταξύ τους (αφού κάτι τέτοιο θα σήμαινε απώλεια εκτίμησης δραστηριότητας ομιλίας).

[2] Οι χρήστες Octave ας αγνοήσουν τον επιπλέον όρο που θα τους προκύψει.

(γ΄) **Πως αποφασίζω με βάση την ενέργεια αν το εκάστοτε παραθυροποιημένο σήμα είναι τμήμα ομιλίας;** Αυτή είναι μια ερώτηση που δέχεται αρκετές απαντήσεις - προσεγγίσεις. Ξανά μια απλή προσέγγιση είναι ότι στην αρχή του σήματος, υπάρχουν μερικά δευτερόλεπτα σιωπής - μπορείτε να εκτιμήσετε την ενέργεια σε αυτά τα παραθυροποιημένα σήματα και να αποφασίζετε βάσει αυτής (με κάποιο στατιστικό) για τα επόμενα τμήματα ομιλίας.

Θα χρησιμοποιήσουμε το ολοκλήρωμα Riemann για να υπολογίσουμε την ενέργεια - δείτε ξανά την Άσκηση 7 σε αυτή τη σειρά. Το σήμα ομιλίας που έχουμε ηχογραφήσει και σας δίνουμε είναι *ψηφιακό* και όταν το διαβάζετε στο MATLAB/Octave, το μετατρέπετε σε *διακριτού χρόνου*. Έστω ότι το σήμα ομιλίας είναι το σήμα

```
x = [1, 0.5, 1.2, -1.7, 2.4, -0.3, -1.1, 0.6, -0.9];
```

Οι τιμές που βλέπετε αποτελούν *δείγματα* του σήματος ομιλίας συνεχούς χρόνου που καταγράφηκε. Τα δείγματα αυτά απέχουν μεταξύ τους $1/F_s$ δευτερόλεπτα πραγματικού χρόνου, με F_s να είναι η *συχνότητα δειγματοληψίας*, που σας δίνεται έτοιμη κάθε φορά που ανοίγετε ένα αρχείο ήχου στο MATLAB/Octave. Αν, για παράδειγμα, η συχνότητα δειγματοληψίας είναι 16000 Hz, τότε το παραπάνω σήμα 9 δειγμάτων προέρχεται από ένα σήμα συνεχούς χρόνου διάρκειας $9/16000 = 562.5\ \mu s = 0.5625$ ms - πολύ μικρό. Για να φτάσουμε στα 30 ms που αναφέρει παραπάνω η άσκηση, χρειαζόμαστε 480 δείματα - αφού $480/16000 = 0.03$ s $= 30$ ms. Ας συνεχίσουμε όμως σε αυτό το toy example κι ας υποθέσουμε όμως ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την ενέργεια ανά 187.5 μs, δηλ. ανά 3 δείγματα, κλπ. Τότε θα χωρίσουμε το σήμα σε τριάδες, που ουσιαστικά αυτό αντιστοιχεί σε διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς με μη επικαλυπτόμενους τετραγωνικούς παλμούς μοναδιαίου πλάτους και διάρκειας 187.5 μs: προκύπτουν τρεις τριάδες, $(1, 0.5, 1.2), (-1.7, 2.4, -0.3), (-1.1, 0.6, -0.9)$ - και θα υπολογίσουμε την ενέργεια όπως στην Άσκηση 7, δηλ.

```
E1 = (1/Fs)*sum([1, 0.5, 1.2].^2);
E2 = (1/Fs)*sum([-1.7, 2.4, -0.3].^2);
E3 = (1/Fs)*sum([-1.1, 0.6, -0.9].^2);
```

Γνωρίζετε ότι τα πρώτα 2 δευτερόλεπτα του σήματος περιέχουν σιωπή. Ακολουθώντας τον παρακάτω σκελετό, υλοποιήστε έναν απλό ενεργειακό ανιχνευτή δραστηριότητας ομιλίας.

```
% Fortwsh arxeiou sto MATLAB
[s, Fs] = audioread('speech.wav');

% 8eloume 30 ms tmhmata, se posa deigmata antistoixoun?
T = % INSERT CODE;

% Synolikh diarkeia shmatos
L = length(s);

% Posoi palmoi xwrane sth diarkeia L tou shmatos?
N = % INSERT CODE;

% Diatre3e to shma
for i = 1:N-1
    % Kopse to katallhlo tmhma (kane xrhsh tou i kai tou T)
    windowed_speech = % INSERT CODE;

    % Ypologise thn energeia tou tmhmatos
    Energy(i) = % INSERT CODE;

    % Kentro tou para8yropoihmenou shmatos
    Time(i) = round(% INSERT CODE);
```

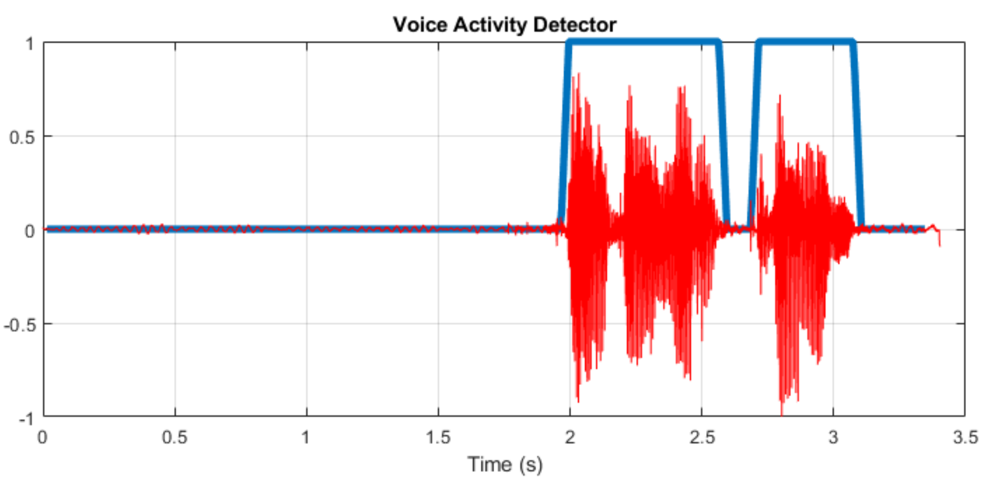
```
end

% Katwfli apofashs (p.x.)
Number_of_Silence_Frames = round(2*Fs/T);
Threshold = mean(Energy(1:Number_of_Silence_Frames));

% Apofash
for i = 1:N-1
    if Energy(i) > Threshold
        D(i) = 1; % Voice detected
    else
        D(i) = 0; % Voice not detected
    end
end

% Grafhma
t = 0:1/Fs:(L-1)/Fs;
n = 0:L-1;
Din = interp1(Time, D, n, "linear");
plot(t, Din, "LineWidth", 4); hold on; plot(t, s/max(abs(s)), 'r');
hold off; grid;
title('Voice Activity Detector'); xlabel('Time (s)');
```

Για ευκολία, ο παραπάνω κώδικας σας δίνεται και στο αρχείο `vad.m`, ενώ το αρχείο `speech.wav` θα το βρείτε επίσης στο site του μαθήματος. Αν τα κάνετε όλα σωστά, ο κώδικας θα σας επιστρέψει το παρακάτω Σχήμα 2.



Σχήμα 2: *Αποτέλεσμα Ανιχνευτή Δραστηριότητας Ομιλίας.*

Παραδώστε τον συμπληρωμένο κώδικα.

[⋆] **Άσκηση 9 - Αλληλούια: φαινόμενα πολλαπλής διάδοσης τις τηλεπικοινωνίες**

Στις ασύρματες επικοινωνίες, τα φαινόμενα της *πολλαπλής διάδοσης* επηρεάζουν σημαντικά την ποιότητα του λαμβανόμενου σήματος. Λόγω της παρουσίας κτηρίων, αυτοκινήτων, εμποδίων κλπ, ανάμεσα στον πομπό και το δέκτη, το εκπεμφθέν σήμα δεν ταξιδεύει σε ευθεία γραμμή προς το δέκτη - λαμβάνονται επίσης αντίγραφα του σήματος που έχουν υποστεί αλλοιώσεις: χρονικές και συχνοτικές μετατοπίσεις και μειώσεις πλάτους. Το άθροισμα όλων αυτών των φαινομένων που φτάνει στο δέκτη είναι αρκετά διαφορετικό από το εκπεμφθέν σήμα.

Στην άσκηση αυτή θα θεωρήσουμε τη χρονική μετατόπιση ενός πραγματικού σήματος για να παρουσιάσουμε τέτοια φαινόμενα αλλοίωσης. Φορτώστε στο MATLAB/Octave το αρχείο `halelujah.mat` που σας δίνεται στη σελίδα του μαθήματος με χρήση της εντολής

```
load halelujah.mat
```

Το σήμα που θα παρουσιαστεί στο workspace σας θα είναι το σήμα $x(t)$ που μεταδίδεται από έναν πομπό σε ένα δέκτη. Το λαμβανόμενο σήμα θα είναι το

$$y(t) = x(t) + 0.8x(t - t_0) + 0.5x(t - 2t_0) \tag{9}$$

με $t_0 = 0.5$ s.

(α΄) Το σήμα αυτό έχει δειγματοληπτηθεί με ρυθμό F_s (μεταβλητή που θα βρείτε στο workspace σας), που σημαίνει ότι σε 1 s σήματος συνεχούς χρόνου έχουμε πάρει F_s δείγματα του σήματος και τα έχουμε αποθηκεύσει στον υπολογιστή μας. Πόσα δείγματα αντιστοιχούν στην καθυστέρηση $t_0 = 0.5$ s, δηλ. πόσα δείγματα πρέπει να μετακινήσουμε προς τα δεξιά το σήμα μας έτσι ώστε να έχουμε προσομοιώσει καθυστέρηση μισού δευτερολέπτου;

(β΄) Υλοποιήστε το σήμα πολλαπλής διάδοσης $y(t)$. Μια καθυστέρηση στο MATLAB/Octave ενός σήματος `x` κατά `t0` δείγματα μπορεί να υλοποιηθεί ως

```
x_delayed = [zeros(1, t0) x(1:end-t0)];
```

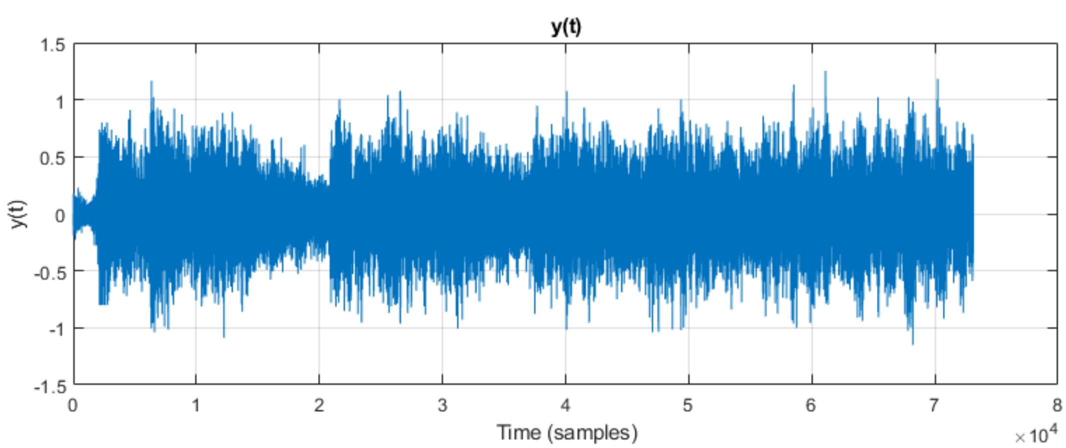
και η πρόσθεση των δυο σημάτων υλοποιείται ως

```
y = x + x_delayed;
```

(γ΄) Τυπώστε το σήμα $x(t)$ με την εντολή `plot`. Τυπώστε το σήμα $y(t)$, και παρατηρήστε τα φαινόμενα της πολλαπλής διάδοσης. Ακούστε δυο σήματα με τις εντολές

```
soundsc(x, Fs);
pause(2);
soundsc(y, Fs);
```

Αν τα κάνετε όλα σωστά θα πάρετε ένα $y(t)$ όπως στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3: *Λαμβανόμενο σήμα* $y(t)$.

Παραδώστε τον κώδικα MATLAB/Octave σε script. Καταγράψτε τις παρατηρήσεις/απαντήσεις σας σε σχόλιο στον κώδικα.