ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2020-21
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Λύσεις Δεύτερης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1 - Σήματα

(α΄) i. Το σήμα $x(t) = -4t$ είναι περιττό γιατί

$$-x(-t) = -(-4(-t)) = -4t = x(t) \tag{1}$$

ii. Το σήμα $x(t) = e^{-|t|}$ είναι άρτιο γιατί

$$x(-t) = e^{-|-t|} = e^{-|t|} = x(t) \tag{2}$$

iii. Το σήμα $x(t) = 5\cos(3t)$ είναι άρτιο γιατί

$$x(-t) = 5\cos(-3t) = 5\cos(3t) = x(t) \tag{3}$$

iv. Το σήμα $x(t) = \sin(3t - \pi/2)$ είναι άρτιο γιατί

$$x(-t) = \sin(-3t - \pi/2) = \sin(-(3t + \pi/2)) = -\sin(3t + \pi/2) = \cos(3t) = \sin(3t - \pi/2) \tag{4}$$

v. Το σήμα $x(t) = u(t)$ δεν είναι άρτιο γιατί

$$x(-t) = u(-t) \neq u(t) \tag{5}$$

και δεν είναι περιττό γιατί

$$-x(-t) = -u(-t) \neq u(t) \tag{6}$$

(β΄) i. Είναι

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x_{\text{περιττό}}(t)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \frac{1}{2}\Big(x(t) - x(-t)\Big)dt \tag{7}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \frac{1}{2}x(t)dt - \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \frac{1}{2}x(-t)dt \tag{8}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T}\int_{-T}^{T} x(t)dt - \lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T}\int_{-T}^{T} x(-t)dt \tag{9}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T}\int_{-T}^{T} x(t)dt + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T}\int_{T}^{-T} x(u)du \tag{10}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T}\int_{-T}^{T} x(t)dt - \lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T}\int_{-T}^{T} x(t)dt \tag{11}$$

$$= 0 \tag{12}$$

ii. Είναι

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x_{\text{άρτιο}}(t)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \frac{1}{2}\Big(x(t) + x(-t)\Big)dt \tag{13}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \frac{1}{2}x(t)dt + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \frac{1}{2}x(-t)dt \tag{14}$$
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T}\int_{-T}^{T} x(t)dt + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T}\int_{-T}^{T} x(-t)dt \tag{15}$$
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T}\int_{-T}^{T} x(t)dt - \lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T}\int_{T}^{-T} x(u)du \tag{16}$$
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T}\int_{-T}^{T} x(t)dt + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T}\int_{-T}^{T} x(u)du \tag{17}$$
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)dt \tag{18}$$
$$= M_x \tag{19}$$

iii. Είναι

$$x_{\text{περιττό}}(0) = \frac{1}{2}\Big(x(0) - x(0)\Big) = 0$$

και

$$x_{\text{άρτιο}}(0) = \frac{1}{2}\Big(x(0) + x(0)\Big) = x(0)$$

Άσκηση 2 - Ενέργεια και Ισχύς

(α') Για το σήμα $x(t) = 2\text{rect}(t)$, πιθανολογούμε ότι είναι σήμα ενέργειας, καθώς είναι φραγμένου πλάτους και πεπερασμένης διάρκειας. Άρα

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} 4\text{rect}^2(t)dt = 4\int_{-1/2}^{1/2} dt = 4t\Big|_{t=-1/2}^{1/2} \tag{20}$$
$$= 4(1/2 - (-1/2)) = 4 \tag{21}$$

(β') Το σήμα $x(t) = \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(10\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ είναι περιοδικό σήμα και ξέρουμε για περιοδικά σήματα ότι αυτά είναι σήματα ισχύος. Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι

$$P_x = \sum_{k=1}^{2} \frac{A_k^2}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \tag{22}$$

(γ') Το σήμα $x(t) = u(t) - u(10-t)$ είναι άπειρης διάρκειας αλλά φραγμένου πλάτους που δεν τείνει στο μηδέν, άρα πιθανότατα είναι σήμα ισχύος. Άρα

$$P_x = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)dt = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(u(t) - u(10-t))^2 dt \tag{23}$$

Όμως

$$u(t) - u(10-t) = \begin{cases} 1, & t > 10 \\ -1, & t < 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{24}$$

Άρα

$$P_x = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{10}^{T} 1^2 dt + \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{0}(-1)^2 dt \tag{25}$$
$$= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} t\Big|_{10}^{T} + \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} t\Big|_{-T}^{0} \tag{26}$$

$$= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}(T-10) + \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}(0-(-T)) \tag{27}$$

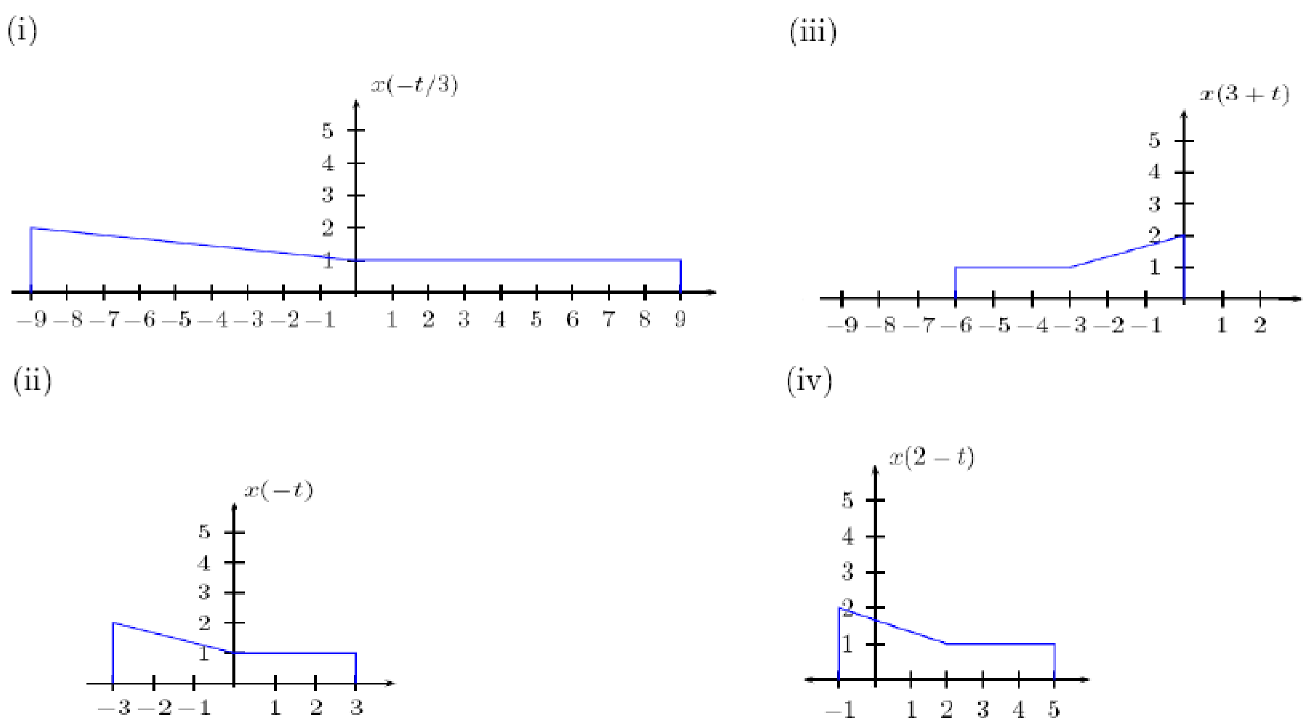
$$= \lim_{T\to+\infty} \frac{T}{2T} - 10 \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} + \lim_{T\to+\infty} \frac{T}{2T} \tag{28}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \tag{29}$$

(δ') Το σήμα $x(t) = 3,\ \forall t$ είναι φραγμένου πλάτους και άπειρης διάρκειας, πιθανολογούμε ότι είναι σήμα ισχύος. Άρα

$$P_x = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} 3^2 dt = 9 \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} t\Big|_{-T}^{T} = 9 \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} 2T = 9 \tag{30}$$

Άσκηση 3 - Μετασχηματισμοί Σημάτων



Σχήμα 1: *Σχήμα Άσκησης 3.*

Άσκηση 4 - Συναρτήσεις Δέλτα

(α') $(\sqrt{t}-2)\delta(t-8) = (\sqrt{t}-2)\Big|_{t=8}\delta(t-8) = (\sqrt{8}-2)\delta(t-8)$

(β') $\cos(\pi t)\delta(t-1) = \cos(\pi t)\Big|_{t=1}\delta(t-1) = -\delta(t-1)$

(γ') $(x-t)\delta(t-1) = (x-t)\Big|_{t=1}\delta(t-1) = (x-1)\delta(t-1)$

(δ') $\left(\frac{d}{dt}\frac{t^2}{2}\right)\delta(t+1) = t\Big|_{t=-1}\delta(t+1) = -\delta(t+1)$

(ε') $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi t)\delta(t-1)dt = \cos(2\pi t)\Big|_{t=1} = \cos(2\pi) = 1$

(ϛ') $\int_{10}^{+\infty} \sin((t-1)\pi)\delta(t-2)dt = 0$

(ζ') $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\pi t)\delta(t-6)dt = \sin(\pi t)\Big|_{t=6} = \sin(6\pi) = 0$

(η') $\int_{-\infty}^{0} (t-12)^2\delta(t-12)dt = 0$

Άσκηση 5 - Συναρτήσεις Δέλτα και Βηματικές

Είναι

$$\frac{d}{dt}g(t) = 3\frac{d}{dt}\Big[\sin\Big(\frac{\pi t}{2}\Big)\mathrm{rect}(t)\Big] = 3\Big[\Big(\sin\Big(\frac{\pi t}{2}\Big)\Big)'\mathrm{rect}(t) + (\mathrm{rect}(t))'\sin\Big(\frac{\pi t}{2}\Big)\Big] \tag{31}$$

$$= 3\Big[\frac{\pi}{2}\cos\Big(\frac{\pi t}{2}\Big)\mathrm{rect}(t) + \Big(\delta\Big(t+\frac{1}{2}\Big) - \delta\Big(t-\frac{1}{2}\Big)\Big)\sin\Big(\frac{\pi t}{2}\Big)\Big] \tag{32}$$

αφού

$$\mathrm{rect}(t) = u\Big(t+\frac{1}{2}\Big) - u\Big(t-\frac{1}{2}\Big) \tag{33}$$

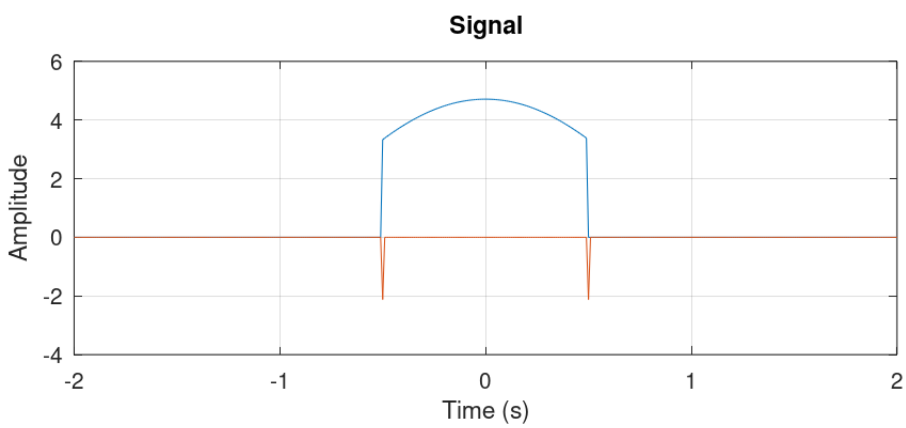
Οπότε

$$\frac{d}{dt}g(t) = \frac{3\pi}{2}\cos\Big(\frac{\pi t}{2}\Big)\mathrm{rect}(t) + \sin\Big(\frac{\pi t}{2}\Big)\delta\Big(t+\frac{1}{2}\Big) - \sin\Big(\frac{\pi t}{2}\Big)\delta\Big(t-\frac{1}{2}\Big) \tag{34}$$

$$= \frac{3\pi}{2}\cos\Big(\frac{\pi t}{2}\Big)\mathrm{rect}(t) + \sin\Big(\frac{\pi t}{2}\Big)\Big|_{t=-1/2}\delta\Big(t+\frac{1}{2}\Big) - \sin\Big(\frac{\pi t}{2}\Big)\Big|_{t=1/2}\delta\Big(t-\frac{1}{2}\Big) \tag{35}$$

$$= \frac{3\pi}{2}\cos\Big(\frac{\pi t}{2}\Big)\mathrm{rect}(t) - \frac{3\sqrt{2}}{2}\Big[\delta\Big(t+\frac{1}{2}\Big) + \delta\Big(t-\frac{1}{2}\Big)\Big] \tag{36}$$

Δείτε το Σχήμα 2.



Σχήμα 2: *Σχήμα Άσκησης 5.*

Άσκηση 6 - Συστήματα

(α') $y(t) = 3x(3t+3)$:

- Γραμμικό: το σύστημα είναι γραμμικό γιατί αν

$$ax_1(t) \longrightarrow 3ax_1(3t+3) = ay_1(t) \tag{37}$$
$$bx_2(t) \longrightarrow 3bx_2(3t+3) = by_2(t) \tag{38}$$

  τότε

$$ax_1(t) + bx_2(t) \longrightarrow 3(ax_1(3t+3) + bx_2(3t+3)) = 3ax_1(3t+3) + 3bx_2(3t+3) = ay_1(t) + by_2(t) \tag{39}$$

- Χ.Α.: το σύστημα δεν είναι Χ.Α. γιατί αν

$$x(t-t_0) \longrightarrow 3x(3t-t_0+3) \tag{40}$$

  τότε

$$y(t-t_0) = 3x(3(t-t_0)+3) = 3x(3t-3t_0+3) \neq 3x(3t-t_0+3) \tag{41}$$

- Ευσταθές: το σύστημα είναι ευσταθές γιατί αν

$$|x(t)| < B_x \Longrightarrow |y(t)| = 3|x(3t+3)| < 3B_x \tag{42}$$

- Αιτιατό: το σύστημα δεν είναι αιτιατό γιατί απαιτεί μελλοντικές τιμές της εισόδου για να υπολογιστεί η είσοδος για μια χρονική στιγμή (π.χ. το $y(0)$ απαιτεί το $x(3)$).
- Δυναμικό: το σύστημα είναι δυναμικό γιατί απαιτείται μνήμη (ξανά, για $y(0)$ απαιτεί το $x(3)$).

(β') $y(t) = 7x(t) + 6$

- Γραμμικό: το σύστημα δεν είναι γραμμικό γιατί δεν είναι ομογενές, αφού

$$ax(t) \longrightarrow 7ax(t) + 6 \neq ay(t) = a(7x_1(t) + 6) \tag{43}$$

- Χ.Α.: το σύστημα είναι Χ.Α. γιατί αν

$$x(t-t_0) \longrightarrow 7x(t-t_0) + 6 \tag{44}$$

  τότε

$$y(t-t_0) = 7x(t-t_0) + 6 \tag{45}$$

- Ευσταθές: το σύστημα είναι ευσταθές αφού

$$|x(t)| < B_x \Longrightarrow |y(t)| = |7x(t) + 6| \leq 7|x(t)| + 6 < 7B_x + 6 \tag{46}$$

- Αιτιατό: το σύστημα είναι αιτιατό αφού για τον υπολογισμό της εξόδου απαιτείται κάθε φορά η τρέχουσα τιμή της εισόδου.
- Δυναμικό: το σύστημα δεν είναι δυναμικό γιατί δεν απαιτείται μνήμη (μόνο η τρέχουσα τιμη της εισόδου απαιτείται για τον υπολογισμό της εξόδου)

(γ') $y(t) = e^{tx(t)}$

- Γραμμικό: το σύστημα δεν είναι γραμμικό αφού δεν είναι ομογενές, γιατί

$$ax(t) \longrightarrow e^{atx(t)} \neq ay(t) = ae^{tx(t)} \tag{47}$$

- Χ.Α.: το σύστημα δεν είναι Χ.Α. γιατί αν

$$x(t-t_0) \longrightarrow e^{tx(t-t_0)} \tag{48}$$

  τότε

$$y(t-t_0) = e^{(t-t_0)x(t-t_0)} \neq e^{tx(t-t_0)} \tag{49}$$

- Ευστάθεια: το σύστημα δεν είναι ευσταθές γιατί

$$|x(t)| < B_x \Longrightarrow |y(t)| = |e^{tx(t)}| < |e^{tB_x}| \tag{50}$$

  που προφανώς μεγαλώνει χωρίς φράγμα ανεξαρήτως του φράγματος της εισόδου.
- Αιτιατό: το σύστημα είναι αιτιατό γιατί απαιτείται μόνο η τρέχουσα τιμή της εισόδου για τον υπολογισμο της εξόδου.
- Δυναμικό: το σύστημα δεν είναι δυναμικο γιατί δεν απαιτεί μνήμη.

Άσκηση 7 - Ολοκλήρωση στο MATLAB/Octave
Κώδικας MATLAB.

[⋆] **Άσκηση 8 - Ανίχνευση Δραστηριότητας Ομιλίας στο πρότυπο GSM - MATLAB/Octave**
Κώδικας MATLAB.

[⋆] **Άσκηση 9 - Αλληλούια: φαινόμενα πολλαπλής διάδοσης τις τηλεπικοινωνίες**
Κώδικας MATLAB.