ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2020-21
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 19/2/2021 — Ημερομηνία Παράδοσης: 26/2/2021

Οι ασκήσεις με [$\star$] είναι **bonus**, $+10$ μονάδες η καθεμία στο βαθμό αυτής της σειράς ασκήσεων (δηλ. μπορείτε να πάρετε μέχρι $90/70$ σε αυτή τη σειρά.)

Άσκηση 1 - Μιγαδικές Εξισώσεις Ι

(α΄) Έχουμε (ενδεικτική λύση)

$$\frac{z}{4} + z\frac{2-j}{4+j} - 1 = \frac{1}{2} \tag{1}$$
$$\frac{z}{4} + z\frac{2-j}{4+j} = \frac{3}{2} \tag{2}$$
$$(4+j)\frac{z}{4} + (2-j)z = \frac{3}{2}(4+j) \tag{3}$$
$$z + \frac{jz}{4} + 2z - jz = 6 + \frac{3}{2}j \tag{4}$$
$$z\Big(1 + \frac{j}{4} + 2 - j\Big) = 6 + \frac{3}{2}j \tag{5}$$
$$z\Big(3 - \frac{3}{4}j\Big) = 6 + \frac{3}{2}j \tag{6}$$

Για $z = x + jy$, τότε εξισώνοντας τα πραγματικά και φανταστικά μέρη, καταλήγουμε

$$\begin{cases} x + \frac{1}{4}y & = 2 \\ 3y - \frac{3}{4}x & = \frac{3}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x & = 2 - \frac{1}{4}y \\ 3y + \frac{3}{16}y & = 3 \end{cases} \tag{7}$$

και η λύση του συστήματος μας δίνει $z = x + jy = \frac{30}{17} + \frac{16}{17}j$.

(β΄) Έχουμε

$$\begin{cases} zj + w + 2(w-z) & = 2j \\ z - jw + 1 & = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (1+jw)j + w + 2w - 2(1+jw) & = 2j \\ z & = 1 + jw \end{cases} \tag{8}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} 2w - 2jw & = 2 + j \\ z & = 1 + jw \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} w & = \frac{1}{4} + j\frac{3}{4} \\ z & = \frac{1}{4} + j\frac{1}{4} \end{cases} \tag{9}$$

Άσκηση 2 - Μιγαδικές Εξισώσεις ΙΙ

Είναι

$$z^3 = 8j \Longleftrightarrow z^3 = 2^3 e^{j(\pi/2 + 2k\pi)},\ \ k = 0,1,2 \Longleftrightarrow |z|^3 e^{j3\theta} = 2^3 e^{j(\pi/2+2k\pi)} \tag{10}$$

Άρα

$$\begin{cases} |z| & = 2 \\ \theta & = \frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{3} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} |z| & = 2 \\ \theta & = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \end{cases} \tag{11}$$

Για $k = 0, 1, 2$ θα έχουμε

$$z_1 = 2e^{j\pi/6} = 2\Big(j\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\Big) = j + \sqrt{3} \tag{12}$$
$$z_2 = 2e^{j5\pi/6} = 2\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j\Big) = j - \sqrt{3} \tag{13}$$
$$z_3 = 2e^{j9\pi/6} = 2e^{j3\pi/2} = 2e^{-j\pi/2} = -2j \tag{14}$$

Άσκηση 3 - Γεωμετρικοί Τόποι Ι
Θα είναι

(α') $\Re\{z+1\} = 7 \iff \Re\{x+jy+1\} = 7 \iff x+1 = 7 \iff x = 6$, οπότε ο γεωμ. τόπος είναι μια κατακόρυφη ευθεία στο $x = 6$.

(β') $|z-5-3j| = 3 \iff |z-(5+3j)|^2 = 9 \iff (x-5)^2 + (y-3)^2 = 9$, άρα ο γεωμ. τόπος θα είναι κύκλος με κέντρο το $(5, 3)$ και ακτίνα 3.

(γ') $\sphericalangle(z+3+2j) = \frac{3\pi}{4} \iff \sphericalangle(x+jy+3+2j) = \frac{3\pi}{4} \iff \tan^{-1}\frac{y+2}{x+3} = \frac{3\pi}{4}$ οπότε

$$\frac{y+2}{x+3} = \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1 \iff y+2 = -(x+3) = -x-3 \iff y = -x-5 \tag{15}$$

Ο μιγαδικός $z+3+2j = z-(-3-2j)$ αναπαριστά ένα διάνυσμα από το σημειο $(-3, -2)$ στο σημείο (x, y). Ο γεωμ. τόπος των z είναι μια ημιευθεία από το σημείο $(-3, -2)$, υπό γωνία $3\pi/4$ με τον οριζόντιο άξονα. Άρα θα πρέπει $x < -3$ και $y > -2$.

(δ') $|z| = |z-6j| \iff |z|^2 = |z-6j|^2 \iff x^2+y^2 = x^2+(y-6)^2 \iff y = 3$, άρα ο γεωμ. τόπος είναι η οριζόντια ευθεία $y = 3$.

[$\star$] **Άσκηση 4 - Γεωμετρικοί Τόποι ΙΙ**
Είναι

$$w = \frac{jz-2}{1-z}, \;\; z \neq 1 \tag{16}$$

και ότι ο μιγαδικός z βρίσκεται πάνω στον πραγματικό άξονα του μιγαδικού επιπέδου σημαίνει ότι $z \in \Re$, δηλ. $z = a + j0 = a \neq 1$. Άρα

$$w = \frac{jz-2}{1-z} \tag{17}$$
$$(1-z)w = jz-2 \tag{18}$$
$$w - zw = jz-2 \tag{19}$$
$$-zw - jz = -2 - w \tag{20}$$
$$z(j+w) = w+2 \tag{21}$$
$$z = \frac{w+2}{w+j} = \frac{x+jy+2}{x+jy+j} = \frac{(x+2)+jy}{x+(y+1)j} \tag{22}$$

δηλ.

$$z = \frac{((x+2)+jy)(x-(y+1)j)}{x^2+(y+1)^2} = \frac{x^2+2x-(x+2)(y+1)j+xyj+y^2+y}{x^2+(y+1)^2} \tag{23}$$

Οπότε για να είναι μηδέν το φανταστικό μέρος, δηλ. το z να είναι πραγματικό, θα πρέπει $z = a+jb \Longrightarrow b = 0$, άρα

$$xy-(x+2)(y+1) = 0 \iff xy-(xy+x+2y+2) = 0 \iff -x-2y-2 = 0 \iff y = -\frac{1}{2}x - 1 \tag{24}$$

Άσκηση 5 - Ρίζες πολυωνύμων

(α΄) Αφού το -1 είναι ρίζα της εξίσωσης θα πρέπει να μπορούμε να γράψουμε

$$(-1)^3-(-1)^2+3(-1)+k=- \iff -1-1-3+k=0 \iff k=5 \tag{25}$$

(β΄) Η εξίσωση έχει τρεις ρίζες, όσες και ο βαθμός του πολυωνύμου. Αφού η μια είναι η $x=-1$, μπορούμε να γράψουμε

$$(x+1)(x^2-2x+5)=0 \tag{26}$$

Οι ρίζες του $x^2-2x+5=0$ είναι οι

$$x_{1,2}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-20}}{2}=\frac{2\pm j4}{2}=1\pm 2j \tag{27}$$

Άρα οι ρίζες είναι $x_1=1+2j, x_2=1-2j, x_3=-1$.

Άσκηση 6 - Επίλυση εξισώσεων με De Moivre

(α΄) $z^7-1=0 \iff |z|^7e^{j7\theta}=1=e^{j2\pi k},\ \ k=0,\cdots,6$, οπότε

$$\left\{\begin{array}{ll}|z|^7 & =1\\ 7\theta & =2\pi k\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll}|z| & =1\\ \theta & =\frac{2\pi k}{7},\ \ k=0,\cdots,6\end{array}\right. \tag{28}$$

(β΄) $z^3-(2+2j)=0 \iff |z|^3e^{j3\theta}=\sqrt{8}e^{j(\pi/4+2\pi k)}$, οπότε

$$\left\{\begin{array}{ll}|z|^3 & =\sqrt{8}\\ 3\theta & =2\pi k+\pi/4\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll}|z| & =\sqrt{2}\\ \theta & =\frac{2\pi k+\pi/4}{3},\ \ k=0,\cdots,2\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll}|z| & =\sqrt{2}\\ \theta & =\frac{2\pi k}{3}+\frac{\pi}{12},\ \ k=0,\cdots,2\end{array}\right. \tag{29}$$

(γ΄) $z^5+32=0 \iff |z|^5e^{j5\theta}=-32=32e^{j(\pi+2k\pi)}$, άρα

$$\left\{\begin{array}{ll}|z|^5 & =32\\ 5\theta & =2\pi k+\pi\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll}|z| & =2\\ \theta & =\frac{2\pi k}{5}+\frac{\pi}{5},\ \ k=0,\cdots,4\end{array}\right. \tag{30}$$

Άσκηση 7 - Απλοποίηση με Euler και De Moivre
Υπολογίστε τους μιγαδικούς

(α΄) $(1+j)^{10}=(\sqrt{2}e^{j\pi/4})^{10}=\sqrt{2}^{10}e^{j10\pi/4}=32e^{j\pi/2}=32j$

(β΄) $\left(\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{333}=(e^{j\pi/3})^{333}=e^{j333\pi/3}=e^{j111\pi}=e^{j110\pi+j\pi}=e^{j\pi}=-1$

(γ΄) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}j\right)^{100}-j^{100}=(e^{j\pi/4})^{100}-(j^2)^{50}=e^{j100\pi/4}-(-1)^{50}=e^{j25\pi}-1=-1-1=-2$

(δ΄) $\frac{(1-j)^2}{(j-1)^4}=\frac{(\sqrt{2}e^{-j\pi/4})^2}{(\sqrt{2}e^{j3\pi/4})^4}=\frac{(\sqrt{2})^2}{(\sqrt{2})^4}\frac{e^{-j\pi/2}}{e^{j3\pi}}=\frac{1}{2}\frac{(-j)}{(-1)}=j\frac{1}{2}$

Άσκηση 8 - MATLAB/Octave: τα βασικά
Κώδικας MATLAB/Octave.

[⋆] **Άσκηση 9 - MATLAB/Octave: προχωρημένα**
Κώδικας MATLAB/Octave.