

HY-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2018-19

Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 26/3/2019

Ημερομηνία Παράδοσης: 16/4/2019, 16:00

Οι ασκήσεις με [*] είναι **bonus**, +10 μονάδες η καθεμία στο βαθμό αυτής της σειράς ασκήσεων (δηλ. μπορείτε να πάρετε μέχρι 110/90 σε αυτή τη σειρά.)

[*] Άσκηση 1 - Θεώρημα Parseval

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx \quad (1)$$

Hint: Δείτε τους πίνακες ζευγών μετασχ. Fourier σας.

$$\text{Απ: } \frac{\pi}{4}$$

Άσκηση 2 - Συνέλιξη στο χρόνο και στη συχνότητα

Υπολογίστε τη συνέλιξη των σημάτων

$$x(t) = e^{-3t}u(t) \quad (2)$$

$$y(t) = e^{2t}u(-t) \quad (3)$$

στο πεδίο του χρόνου, και επιβεβαιώστε το αποτέλεσμα με χρήση του μετασχ. Fourier.

$$\text{Απ: } c_{xy}(t) = \frac{1}{5}e^{2t}u(-t) + \frac{1}{5}e^{-3t}u(t)$$

Άσκηση 3 - Αντίστροφος Μετασχ. Fourier I

Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier του σήματος

$$X(f) = A \operatorname{tri}\left(\frac{f-f_0}{B}\right) + A \operatorname{tri}\left(\frac{f+f_0}{B}\right) \quad (4)$$

$$\text{Απ: } x(t) = 2AB \operatorname{sinc}^2(Bt) \cos(2\pi f_0 t)$$

Άσκηση 4 - Έξοδος ΓΧΑ συστήματος για περιοδική είσοδο

Η απόκριση συχνότητας ενός ΓΧΑ συστήματος δίνεται ως

$$H(f) = \frac{4}{4 + j2\pi f} \quad (5)$$

Να βρεθεί η έξοδος του συστήματος για είσοδο

(α) $x_1(t) = 2 \cos(t)$

(β) $x_2(t) = \cos(4t + \frac{\pi}{4})$

$$(\gamma) x_3(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$\text{Απ.: (α) } y_1(t) = 1.94 \cos(t - 14^\circ), \text{ (β) } y_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(4t)$$

Άσκηση 5 - Αντίστροφος Μετασχ. Fourier II

Έστω ο μετασχ. Fourier

$$X(f) = \frac{4}{-(2\pi f)^2 + j8\pi f + 3} \quad (6)$$

Βρείτε το σήμα στο χρόνο στο οποίο αυτός αντιστοιχεί.

$$\text{Απ.: } x(t) = 2e^{-t}u(t) - 2e^{-3t}u(t)$$

Άσκηση 6 - ΓΧΑ Συστήματα και Διαφορικές Εξισώσεις

Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 5\frac{d}{dt}y(t) + 6y(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) + 2\frac{d}{dt}x(t) - 8x(t) \quad (7)$$

(α) Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος, $h(t)$, μέσω της απόκρισης σε συχνότητα $H(f)$. Προσέξτε να διαιρέσετε τα πολυώνυμα του $j2\pi f$ της $H(f)$ πριν εφαρμόσετε ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα.¹

$$\text{Απ.: } h(t) = \delta(t) - 8e^{-2t}u(t) + 5e^{-3t}u(t)$$

(β) Υπολογίστε την έξοδο του συστήματος για είσοδο $x(t) = e^{-4t}u(t)$.

$$\text{Απ.: } y(t) = (5e^{-3t} - 4e^{-2t})u(t)$$

Πραγματικές Εφαρμογές του Μετασχηματισμού Fourier

Άσκηση 7 - Μετασχηματισμός Fourier και Παθολογία Φωνής

Ο Μετασχ. Fourier είναι ένα εξαιρετικά χρήσιμο εργαλείο σε πολλούς τομείς της Επεξεργασίας Σήματος. Ένας τομέας είναι η ανίχνευση παθολογίας φωνής.

(α) Ηχογραφήστε τη φωνή σας όταν εκφέρετε το φώνημα /α/, σταθερά, για περίπου 3 δευτερόλεπτα. Φροντίστε να βρίσκεστε σε ήσυχο περιβάλλον, και προσπαθήστε (αν γίνεται) να χρησιμοποιήσετε κανονικό μικρόφωνο (αλλιώς, χρησιμοποιήστε τα ενσωματωμένα των laptops σας). Χρησιμοποιήστε ένα πρόγραμμα ηχογράφησης της επιλογής σας (π.χ. το δωρεάν πρόγραμμα Wavesurfer ή το Audacity) και φροντίστε η ηχογράφηση να είναι μονοφωνική (δηλ. όχι στέρεο - δικαναλική) και να γίνει σε συχνότητα δειγματοληψίας 16000 Hz, και ακρίβεια αποθήκευσης 16 bits σε μορφή .WAV. Σας δίνεται και ένα ενδεικτικό σήμα στο site του μαθήματος, αν δεν μπορείτε να πραγματοποιήσετε τα παραπάνω.

(β) Χρησιμοποιήστε τον κώδικα ανάλυσης μετασχ. Fourier που σας δόθηκε στην προηγούμενη σειρά ασκήσεων - και για ευκολία, σας δίνεται στο αρχείο CTFT.m στο site του μαθήματος - για να αναλύσετε το σήμα όπως περιγράφεται παρακάτω:

¹Δείτε το παράδειγμα 0.2.14 των σημειώσεων υποβάθρου σας.

- Επιλέξτε ένα τμήμα (ή, όπως λέμε στην ορολογία της Επεξεργασίας Σήματος, ένα παράθυρο) φωνής, με διάρκεια περίπου 50 ms, κατά προτίμηση από τη μέση περιπου της ηχογράφησης. Στο MATLAB, αυτό μπορεί να γίνει ως:

```
[s, fs] = wavread('myvoice.wav'); % Load the recorded speech signal
start = 1 % Assume our speech segment starts
% from time = 1 sec...
finish = 1.05 ; % ...and ends after 50 ms
start_s = round(start*fs); % Convert time in samples
finish_s = round(finish*fs); % ----- " -----
segment = s(start_s:finish_s); % Chop the desired speech segment
plot([start_s:finish_s]./fs, segment); % Visualization!
```

- Στη μεταβλητή `segment` έχετε ένα τμήμα φωνής σας διάρκειας 50 ms. Χρησιμοποιήστε κώδικα ανάλυσης Fourier για να αναλύσετε το σήμα σας στην περιοχή συχνοτήτων από 2000 ως 4000 Hz. Βρείτε το μετασχ. Fourier και απεικονίστε γραφικά το φάσμα πλάτους, με χρήση των εντολών `abs`, `plot`, όπως στην προηγούμενη σειρά ασκήσεων. Στον κώδικα της ανάλυσης, χρησιμοποιήστε μικρό βήμα στη συχνότητα, της τάξης του 1 Hz, δηλ.

```
Df = 1;
f = 2000:Df:4000;
```

- Αν το φάσμα πλάτους που θα δείτε, παρουσιάσει μια συμμετρία ως προς τη συχνότητα 3000 Hz, τότε υπάρχει μια πιθανότητα 20 – 30% να αναπτύξετε ασθένεια στο φάρυγγά σας τα επόμενα 5 χρόνια. Προσέξτε λοιπόν να κάνετε σωστά την ανάλυση! :-)

Παραδώστε κώδικα που υπολογίζει το μετασχ. Fourier ενός τυχαίου παραθύρου φωνής, και εμφανίζει το φάσμα πλάτους του. Παραδώστε τυπωμένο στο χαρτί ένα γράφημα αυτού του φάσματος πλάτους. Γράψτε αν παρατηρείτε κάτι.

[*] Άσκηση 8 - Επέκταση της προηγούμενης άσκησης

Ίσως να σκεφτήκατε ότι το να πάρουμε ένα τυχαίο κομμάτι απ' το σήμα φωνής μας και αφού το αναλύσουμε, να βγάλουμε απόφαση για κάτι τόσο σοβαρό όπως μια πιθανή παθολογία, είναι λίγο ριψοκίνδυνο και επιπόλαιο. Κάτι πιο ασφαλές θα ήταν το εξής:

- (α) Χωρίστε όλο το σήμα σε παράθυρα διάρκειας 50 ms, με μια επικάλυψη γειτονικών παραθύρων της τάξης του 50%, δηλ. “προχωράτε” το παράθυρό σας πάνω στο σήμα της φωνής κάθε 25 ms, ώστε τα παράθυρά σας να επικαλύπτονται κατά μισό παράθυρο. Αν σας φαίνεται δύσκολο, μπορείτε να μη χρησιμοποιήσετε επικάλυψη. Αυτό μπορείτε να το κάνετε με χρήση βρόχων επανάληψης όπως τους γνωρίζετε από τη C (for, while) - δε διαφέρουν πολύ. Γράψτε `help for`, `help while` για να δείτε πως συντάσσονται. Σκεφτείτε οτι απλά πρέπει να διατρέχετε ένα πίνακα-γραμμή (που είναι το σήμα σας) ανά κάποιο αριθμό στοιχείων.
- (β) Υπολογίστε το μετασχ. Fourier για τις συχνότητες 2000 – 4000 Hz και βρείτε το φάσμα πλάτους του κάθε παραθύρου. Αποθηκεύστε το φάσμα πλάτους κάθε παραθύρου σε μια γραμμή ενός πίνακα X . Αυτό μπορεί να γίνει ως εξής:

```
% Let N be the whole signal duration in samples
for i = 1:N
    % Let seg be the variable holding
    % our current speech segment
    MF = dt*seg*M.'; % Compute Fourier Transform
    Fasma_platous = abs(MF); % Compute Magnitude Spectrum
    Y(i, :) = Fasma_platous; % Store it into the i-th row
```

```

                                % of matrix Y
end

```

(γ) Να υπολογίσετε το “μέσο φάσμα πλάτους”, δηλ. μια μέση τιμή όλων των φασμάτων πλάτους που έχετε βρει, έτσι ώστε στο τέλος να έχουμε μόνο ένα φάσμα πλάτους, και να αποφασίσετε για την παθολογία βάσει αυτού. Χρήσιμη θα σας φανεί η εντολή `mean` του `MATLAB`.

(δ) Ακολουθώντας μια τέτοια διαδικασία έχουμε πιο εύρωστα, με τη στατιστική έννοια, συμπεράσματα.

Παραδώστε κώδικα που υπολογίζει και εμφανίζει το μέσο φάσμα πλάτους του μετασχ. Fourier. Παραδώστε τυπωμένο στο χαρτί αυτό το μέσο φάσμα πλάτους. Γράψτε αν παρατηρείτε κάτι.

Άσκηση 9 - Μετασχηματισμός Fourier κι Αφαίρεση Θορύβου

Σας δίνεται στο site του μαθήματος ένα σήμα μουσικής `sample-noise.wav`. Πρόκειται για ένα γνωστό τραγούδι “μολυσμένο” με ένα ισχυρό σήμα ημιτόνου σε κάποια υψηλή, σταθερή, συχνότητα μεταξύ 1000 και 3000 Hz. Σκοπός της άσκησης είναι να αναλύσετε το σήμα και να αφαιρέσετε το θόρυβο. Ακολουθήστε τα παρακάτω βήματα.

(α) Αρχικά, ακούστε το σήμα.

```

[s, fs] = wavread('sample-noise.wav'); % Load the speech signal
soundsc(s, fs); % Listen to it!
t = 0:1/fs:(length(s)-1)/fs; % Time axis in seconds
plot(t, s); % Visualize!

```

(β) Παρατηρήστε - και ακούστε - ότι η συνιστώσα του ημιτόνου είναι ισχυρή, και εύκολα διακρίνεται μέσα στον ήχο της ηχογράφησης. Γνωρίζετε όμως ότι λόγω της ισχύος της, θα πρέπει να “ξεχωρίζει” σχετικά στο φάσμα πλάτους του σήματος από το υπόλοιπο σήμα. Επίσης, επειδή είναι σταθερής συχνότητας, μπορούμε να την εντοπίσουμε σε οποιοδήποτε σημείο (παράθυρο) του σήματος κι αν επιλέξουμε.

(γ) Διαλέξτε ένα τυχαίο παράθυρο σήματος, διάρκειας 30 ms και αναλύστε το στις παραπάνω συχνότητες (1000 – 3000 Hz) με τον μετασχ. Fourier, χρησιμοποιώντας φυσικά το φάσμα πλάτους². Προσπαθήστε να εντοπίσετε το ημίτονο. Σκεφτείτε ότι ο μετασχ. Fourier του ημιτόνου πλησιάζει τη συνάρτηση Δέλτα που έχει γίνει συνέλιξη με το μετασχ. Fourier του παραθύρου σας (όπως ακριβώς είδατε στην Άσκηση 1). Πρακτικά, θα περιμένετε να δείτε κάποιο ισχυρό peak (κορυφή) στο φάσμα πλάτους. Όμως επειδή το περιεχόμενο του σήματος είναι μουσική και φωνή, το φάσμα πλάτους θα περιέχει και άλλες συχνότητες. Οπότε η αναγνώριση του peak από ένα και μόνο παράθυρο δε θα είναι εύκολη, εκτός αν είστε τυχεροί/ες. :-). Στην ανάλυσή σας, χρησιμοποιήστε ενδεικτικά τον παρακάτω κώδικα:

```

T = 30; % Window duration of 30ms
Ts = T*10^(-3)*fs; % Window duration of 30ms in samples
x = s(45213:45213 + Ts); % Choose randomly a 30 ms segment
% from the speech signal that starts
% from the sample number 45213
% (also randomly chosen)
plot(x); % Visualize!
Dt = 1/fs; % Analysis step in time
Df = 1; % Analysis step in frequency
f = 1000:Df:3000; % Frequency axis that is of our

```

²Σε σχέση με τις προηγούμενες δυο ασκήσεις, στην πραγματική ρέουσα ομιλία και στον ήχο, το σήμα αλλάζει πιο γρήγορα απ’ ότι όταν λέμε ένα απλό /a/. Έτσι, χρησιμοποιούμε μικρότερο παράθυρο ανάλυσης για να είμαστε σχετικά ασφαλείς ότι το περιεχόμενό του δεν αλλάζει σημαντικά.

```

% interest
t = 0:(1/fs):(Ts/fs); % Time axis of 30ms duration
M = exp(-j*2*pi*f'*t); % Matrix M
x = reshape(x, 1, length(x)); % Make sure x is a row vector

X = Dt*x*M.'; % Fourier Transform
figure; plot(f, abs(X)); % Search for a strong peak in
% [1000, 3000]

```

(δ) Επιλέξτε διάφορα παράθυρα μέσα στο σήμα (4 – 5), όλα ίδιας διάρκειας, μέχρι να εντοπίσετε τη συχνότητα του ημιτόνου με κάποια βεβαιότητα. Προς διευκόλυνσή σας, δίνεται ότι η συχνότητα είναι *ακέραιος αριθμός*, πολλαπλάσιος του 100, στο διάστημα [1000,3000] Hz. Σε κάθε plot που κάνετε, στο πάνω μέρος υπάρχουν κάποια εικονίδια. Ένα από αυτά, ο Data Cursor, σας δίνει τις συντεταγμένες του σημείου του σήματος που θα κάνετε κλικ. Έτσι, μπορείτε να βρίσκετε εύκολα τη συχνότητα ενός σημείου στο φάσμα σας. Παραδώστε μερικά plots από τα παράθυρα που διαλέξατε, τόσο στο χρόνο όσο και στο φάσμα πλάτους.

(ε) Σας δίνουμε επιπλέον ότι το ισχυρό αυτό ημίτονο έχει πλάτος $A = 0.01$ και αρχική φάση $\phi = 0$, δηλ. είναι της μορφής

$$n(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$$

Σε προηγούμενες ασκήσεις, έχετε δει πώς δημιουργούμε ένα απλό ημίτονο. Δημιουργήστε ένα ημίτονο στο MATLAB με πλάτος και φάση που σας δίνεται παραπάνω, και με συχνότητα αυτήν που βρήκατε από την ανάλυσή σας στο προηγούμενο ερώτημα. Φροντίστε να έχει ίδια διάρκεια με ολόκληρο το σήμα s του τραγουδιού. Για να βρείτε τη διάρκεια αυτή, χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση `length` του MATLAB. Για παραδειγμα, αν θέλετε να φτιάξετε ένα ημίτονο διάρκειας 100 δειγμάτων, δηλ. $1/160 = 0.00625$ s (με συχνότητα δειγματοληψίας 16000 Hz), πλάτους 1 και συχνότητας 200 Hz, θα κάνετε το εξής:

```

A = 1;
f0 = 200;
fs = 16000;
n = A*cos(2*pi*f0*[0:99]/fs); % Example

```

(ς) Αφαιρέστε το σήμα ημιτόνου που φτιάξατε παραπάνω από το σήμα της ηχογράφησης s , απλώς αφαιρώντας μεταξύ τους το διάνυσμα s και το διάνυσμα ημιτόνου που μόλις φτιάξατε, όπως παρακάτω. Ακούστε το αποτέλεσμα. Θα πρέπει να ακούγεται πλέον καθαρό το σήμα. :-)

```

clean_sig = s - n.'; % s = signal, n = cosine
soundsc(clean_sig, fs); % Listen!

```

Αν η πράξη σας βγάξει σφάλμα, αφαιρέστε το `.`.

Σημείωση: Το παραπάνω παράδειγμα ήταν πολύ “εκπαιδευτικό” ☺. Στην πράξη, το ημίτονο μπορεί να μην έχει σταθερό πλάτος ή μηδενική φάση, ή ακόμα κι αν έχει, δεν μπορούμε να γνωρίζουμε εκ των προτέρων τις τιμές τους. Έτσι, μια μέθοδος όπως η παραπάνω, στο πεδίο του χρόνου δηλαδή, δε θα δουλέψει. Συνήθως χρησιμοποιούμε μεθόδους στο χώρο της συχνότητας για να αφαιρέσουμε τον ενοχλητικό θόρυβο, εφαρμόζοντας τα λεγόμενα *notch* φίλτρα, τα οποία είναι συστήματα που μηδενίζουν το πλάτος μιας συγκεκριμένης συχνότητας από ένα σήμα που δέχονται ως είσοδο. Η εφαρμογή μιας τέτοιας τεχνικής ξεφεύγει από τα πλαίσια του μαθήματος³, αν και ίσως προς το τέλος του μαθήματος να μπορέσετε να υλοποιήσετε ένα τέτοιο απλό φίλτρο! ☺

Παραδώστε όλα plots ζητούνται στη διάρκεια της εκφώνησης, και κώδικα MATLAB που καθαρίζει το ηχητικό σήμα από το θόρυβο.

³Είναι αντικείμενο του μαθήματος HY370-Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος.

Άσκηση 10 - ΓΧΑ Συστήματα και Παραγωγή Ηχούς

Κατά την παραγωγή και καταγραφή ήχου σε ένα χώρο όπου υπάρχουν πολλές ανακλάσεις, εμπόδια, κλπ., το σήμα του ήχου καταγράφεται ως άθροισμα πολλών διαφορετικών “εκδόσεων” (καθυστερήσεων) του σήματος που επιστρέφουν μαζί στο μικρόφωνο, ως ηχώ, κατά την καταγραφή.

Μπορούμε να μοντελοποιήσουμε την ηχώ ως ένα ΓΧΑ σύστημα, το οποίο περιγράφεται από τη σχέση

$$y(t) = x(t) + ax(t - t_d) \quad (8)$$

με a το πλάτος της ηχούς και t_d τη θέση της στο χρόνο, δηλ. τη χρονική στιγμή που εμφανίζεται στο ηχογραφημένο σήμα.

(α) Βρείτε στο χαρτί σας την κρουστική απόκριση, $h(t)$, του ΓΧΑ συστήματος, δεδομένου ότι γνωρίζετε ότι η κρουστική απόκριση δίνεται ως η έξοδος ενός συστήματος για είσοδο $x(t) = \delta(t)$.

(β) Θα μπορούσαμε να προσθέσουμε κι άλλα αντίγραφα της ηχούς, σε διαφορετικές χρονικές στιγμές και με διαφορετικούς συντελεστές. Όπως μπορείτε εύκολα να καταλάβετε, ένα τέτοιο σύστημα θα είναι της μορφής

$$y(t) = x(t) + \sum_{i=1}^N a_i x(t - t_i) \quad (9)$$

Βρείτε στο χαρτί σας την κρουστική απόκριση, $h(t)$, του παραπάνω ΓΧΑ συστήματος.

(γ) Θα υλοποιήσουμε το παραπάνω σύστημα παραγωγής ηχούς επάνω σε ένα οποιοδήποτε ηχητικό σήμα εισόδου. Θα συμπληρώσετε μια συνάρτηση στο MATLAB η οποία θα έχει την παρακάτω σύνταξη:

```
[y_echo, h] = echo_filter_tostudents(signal, times, attenuations, fs)
```

Τα ορίσματα εξηγούνται στα σχόλια στο `echo_filter_tostudents.m` αρχείο που θα βρείτε στο site μαζί με αυτήν την εκφώνηση.

(δ) Μια μικρή επεξήγηση για τη γραμμή 25. Επειδή όλα τα σήματα που επεξεργαζόμαστε στον υπολογιστή είναι διακριτού χρόνου, δηλ. ορισμένα για συγκεκριμένες χρονικές τιμές (και όχι για κάθε t), εσείς πρέπει αρχικά να ορίσετε τις τιμές του διανύσματος `times` που θέλετε να ακούγεται η ηχώ (σε δευτερόλεπτα), και να μετατρέψετε στη γραμμή 25 κάθε τιμή του διανύσματος αυτού σε ακέραιες τιμές, δηλ. σε δείγματα. Αυτό γίνεται αν λάβετε υπόψη σας ότι η συχνότητα δειγματοληψίας `fs` ενός σήματος σας λέει ότι σε ένα δευτερόλεπτο ηχογράφησης έχουν παρθεί και αποθηκευτεί `fs` δείγματα (τιμές) του σήματος στον υπολογιστή. Άρα, για παράδειγμα, η χρονική στιγμή $t_0 = 0.5$ s αντιστοιχεί στο δείγμα διακριτού χρόνου `fs/2`. Σε ποιά δείγματα αντιστοιχούν οι δικές σας χρονικές στιγμές της ηχούς που ορίσατε στο διάνυσμα `times`; Αυτή τη μετατροπή πρέπει να γράψετε στη γραμμή 25.

(ε) Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ένα οποιοδήποτε σήμα φωνής/μουσικής σε μορφή `.WAV` για να ελέγξετε τη λειτουργία του συστήματός σας. Απλά φροντίστε να μην είναι πολύ μεγάλης διάρκειας για να μην κρασάρετε το MATLAB. Για δική σας ευκολία, σας δίνονται δυο αρχεία μαζί με τον κώδικα. Οι εντολές για να φορτώσετε ένα `.WAV` σήμα στο MATLAB είναι:

```
[signal, fs] = audioread('onoma-arxeiou.wav');
```

Αν έχετε παλιότερη έκδοση του MATLAB και η συνάρτηση αυτή δεν υπάρχει, χρησιμοποιήστε την `wavread`.

Η μεταβλητή `fs` πρέπει να δωθεί ως όρισμα στη συνάρτηση που παράγει την ηχώ.

Παραδώστε συμπληρωμένο τον κώδικα MATLAB που σας δίνεται, και επιπλέον τυπώστε και παραδώστε μια γραφική παράσταση του αποτελέσματος (του σήματος με ηχώ).

Άσκηση 11 - Μετασχ. Fourier και Ανάλυση Ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος

Τοποθετώντας ηλεκτρόδια σε διάφορες περιοχές της κεφαλής ανιχνεύουμε ηλεκτρικές δραστηριότητες (διαφορές δυναμικού) οι οποίες θεωρείται ότι αποτελούν μια έκφραση της εγκεφαλικής δραστηριότητας. Τέτοιες καταγραφές έχουν γίνει τόσο κατά το στάδιο του ύπνου όσο και κατά τη διάρκεια κάποιας δραστηριότητας (π.χ. όταν προσπαθείτε να λύσετε τις ασκήσεις στο HY215 ☺). Από κάθε ηλεκτρόδιο (σε συνδυασμό με ένα ηλεκτρόδιο αναφοράς) συλλέγουμε ένα σήμα όπου παρατηρούμε διαφορές δυναμικού.

Ένα σοβαρό πρόβλημα είναι η ανίχνευση των συχνοτήτων που υπάρχουν σε αυτές τις καταγραφές. Σε ορισμένες συχνότητες έχουμε αντιστοιχίσει κάποιους *ρυθμούς*, όπως ονομάζονται, και οι οποίοι σηματοδοτούν κάτι ενδιαφέρον για την εγκεφαλική μας δραστηριότητα. Για παράδειγμα, η συχνότητα των 10 Hz αντιστοιχεί στο ρυθμό Άλφα.

Σας δίνουμε δυο καταγραφές διάρκειας ενός δευτερολέπτου η καθεμία. Η καταγραφή των δεδομένων έγινε λαμβάνοντας ένα δείγμα του σήματος συνεχούς χρόνου ανά 0.01 δευτερόλεπτα. Ζητάμε να ελέγξετε αν αυτά τα σήματα έχουν ρυθμό Άλφα στο συχνοτικό τους περιεχόμενο (δηλ. αν έχουν ισχυρή φασματική συνιστώσα στα 10 Hz). Οι ρυθμοί εμφανίζονται συνήθως στο εύρος συχνοτήτων [3, 20] Hz, άρα θα στοχεύσουμε σε αυτό το διάστημα.

Με βάση τα παραπάνω, ο άξονας του χρόνου στο MATLAB θα είναι:

```
dt = 0.01;           % Time sampling
t = 0:dt:1;         % Time axis
```

ενώ για τη συχνότητα θα είναι

```
df = 0.01;           % Frequency sampling
f = 3:df:20;         % Frequency axis
```

Για να εισάγετε τα δυο σήματα στο MATLAB χρησιμοποιήστε την εντολή

```
load 'EEG-new.mat'
```

και θα σας εμφανιστούν δυο σήματα x_1 , x_2 στο workspace σας.

- (α) Απεικονίστε τα δυο σήματα στο χρόνο σε δυο γραφήματα με χρήση της εντολής `plot` και του άξονα t που δημιουργήσαμε παραπάνω. Παραδώστε τα γραφήματα που προκύπτουν.
- (β) Θέλουμε να δούμε το φάσμα πλάτους (το μέτρο του μετασχ. Fourier δηλαδή) των σημάτων αυτών για να αναγνωρίσουμε αν υπάρχει κάποια ισχυρή συνιστώσα στα 10 Hz - δηλ. ο ρυθμός Άλφα. Χρησιμοποιήστε τον πίνακα ανάλυσης $M = \exp(-j*2*\pi*f'*t)$ όπως στην προηγούμενη σειρά ασκήσεων για να αναλύσετε τα δυο σήματα στο διάστημα [3, 20] Hz. Παραδώστε τα δυο φάσματα πλάτους σχεδιασμένα το ένα πάνω στο άλλο (εντολή `hold on` ανάμεσα στα δυο `plot`) και αναφέρετε αν βρίσκετε ρυθμό Άλφα σε κάποιο από τα δυο σήματα.

Παραδώστε κώδικα MATLAB που εκτελεί την απεικόνιση των φασμάτων πλάτων καθώς και όποια γραφήματα σας ζητούνται στα παραπάνω ερωτήματα.