ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2018-19
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Τρίτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 8/3/2019 Ημερομηνία Παράδοσης: 19/3/2019, 16:00

Οι ασκήσεις με [$\star$] είναι **bonus**, $+10$ μονάδες η καθεμία στο βαθμό αυτής της σειράς ασκήσεων (δηλ. μπορείτε να πάρετε μέχρι $100/90$ σε αυτή τη σειρά.)

[$\star$] Άσκηση 1 - Σειρά Fourier I

Έστω το περιοδικό σήμα $x(t) = |\cos(\pi t)|$.

(α΄) Σχεδιάστε μερικές περιόδους του και βρείτε τη βασική του περίοδο T_0.

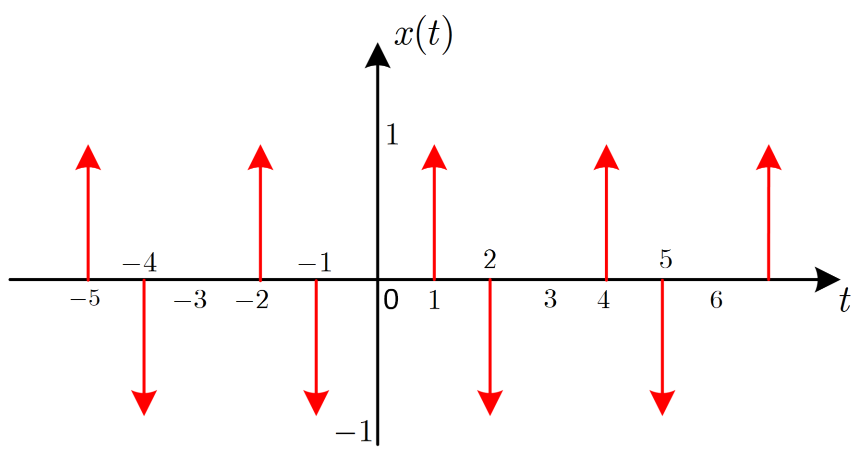
(β΄) Υπολογίστε αναλυτικά την εκθετική Σειρά Fourier.

(γ΄) Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης χρησιμοποιώντας μόνο τα $k = \pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1, 0$.

Απ: $X_k = \dfrac{\sin\left(\pi \frac{1-2k}{2}\right)}{\pi(1-2k)} + \dfrac{\sin\left(\pi \frac{1+2k}{2}\right)}{\pi(1+2k)}$

Άσκηση 2 - Σειρά Fourier II

Έστω το περιοδικό σήμα $x(t)$ με περίοδο T_0, που φαίνεται στο Σχήμα 1 Βρείτε



Σχήμα 1: *Περιοδικό Σήμα Άσκησης 2.*

(α΄) την περίοδό του, T_0

(β΄) τους συντελεστές Fourier του, X_k

Απ: $X_k = \dfrac{2}{3} e^{-j\pi/2} \sin\left(\dfrac{2\pi k}{3}\right)$

Άσκηση 3 - Σειρές Fourier - Ιδιότητες II

Έστω ότι για ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ μας δίνονται οι παρακάτω πληροφορίες:

- είναι πραγματικό και άρτιο
- έχει περιόδο $T_0 = 1$ και συντελεστές Fourier X_k
- ισχύει $X_k = 0$ για $|k| \geq 2$
- ισχύει $\int_0^1 |x(t)|^2 dt = 1$
- ισχύει $\int_0^1 x(t) dt = \frac{1}{2}$

Βρείτε δυο σήματα που ικανοποιούν τις παραπάνω προδιαγραφές.

Απ: $x(t) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \cos(2\pi t)$

Άσκηση 4 - Σειρές Fourier - Ιδιότητες III
Έστω $x(t)$ ένα περιοδικό σήμα με θεμελιώδη συχνότητα f_0 και συντελεστές Fourier X_k. Πώς σχετίζεται η θεμελιώδης συχνότητα $\hat{f}_0$ του σήματος

$$y(t) = x(1-t) + x(t-1) \tag{1}$$

με τη συχνότητα f_0 του $x(t)$; Βρείτε επίσης μια σχέση μεταξύ των συντελεστών Fourier X_k του σήματος $x(t)$ και των Y_k του $y(t)$.

Απ: $Y_k = e^{-j2\pi k f_0}(X_{-k} + X_k)$

Άσκηση 5 - Συντελεστές Fourier II
Βρείτε την περίοδο και τους συντελεστές Fourier του σήματος

$$x(t) = \cos^4(t) \tag{2}$$

Απ.: $T_0 = \pi$, $X_0 = \frac{3}{8}$, $X_1 = X_{-1} = \frac{1}{4}$, $X_2 = X_{-2} = \frac{1}{16}$

Άσκηση 6 - Μετασχηματισμός Fourier I
Χρησιμοποιείστε τον ορισμό για να βρείτε το μετασχ. Fourier των παρακάτω σημάτων

(α') $x(t) = 2\delta\left(t - \frac{1}{2}\right)$

(β') $x(t) = \mathrm{rect}(t-6)$

(γ') $x(t) = e^{-4t}u(t-1)$

(δ') $x(t) = 3(u(t) - u(t-2))$

(ε') $x(t) = \begin{cases} At, & |t| < T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

Άσκηση 7 - Μετασχηματισμός Fourier - II
Αν ένα σήμα $x(t)$ έχει μετασχ. Fourier $X(f)$, γράψτε κάθε μετασχηματισμό $Y(f)$ των παρακάτω σημάτων συναρτήσει του $X(f)$.

(α') $y(t) = x(at-b)$, $a \neq 0, b \in \Re$

(β') $y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau) d\tau$

(γ') $y(t) = tx(2t-1)$

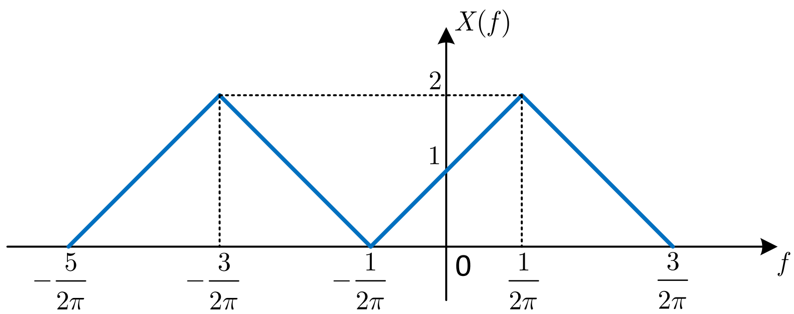
(δ') $y(t) = e^{j2t}x(t-1)$

(ε') $y(t) = tx(t)\sin(3t)$

(ϛ') $y(t) = \frac{d}{dt}x(t) * (e^{-jt}x(t))$

Άσκηση 8 - Μετασχηματισμός Fourier - Ιδιότητες

Έστω $X(f)$ ο μετασχ. Fourier του Σχήματος 2. Υπολογίστε τις παρακάτω ποσότητες **χωρίς** να υπολογίσετε ρητά το



Σχήμα 2: *Σχήμα Άσκησης 6.*

σήμα στο χρόνο, $x(t)$. Δουλέψτε με ιδιότητες και με τα ολοκληρώματα των ορισμών, χωρίς ποτέ όμως να βρείτε το $x(t)$.

(α') $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt$

(β') $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{j3t}dt$

(γ') τη φάση του *μιγαδικού*[1] σήματος στό χρόνο, $\theta_x(t)$, παρατηρώντας ότι το φάσμα που σας δίνεται στο σχήμα γίνεται άρτιο και πραγματικό αν μετατοπιστεί κατά $1/2\pi$ Hz δεξιά. Άρα το σήμα στο χρόνο αυτού του μετατοπισμένου φάσματος είναι πραγματικό και άρτιο $\Longrightarrow$ θα έχει μηδενική ή σταθερή φάση. Ποιά η φάση $\theta_x(t)$ του σήματος στο χρόνο για το φάσμα που σας δίνεται;

(δ') $x(0)$

Απ.: (α) 1, (β) 2, (γ) $\theta_x(t) = -t$, (δ) $\frac{4}{\pi}$

Άσκηση 9 - Σειρές Fourier στο MATLAB/Octave

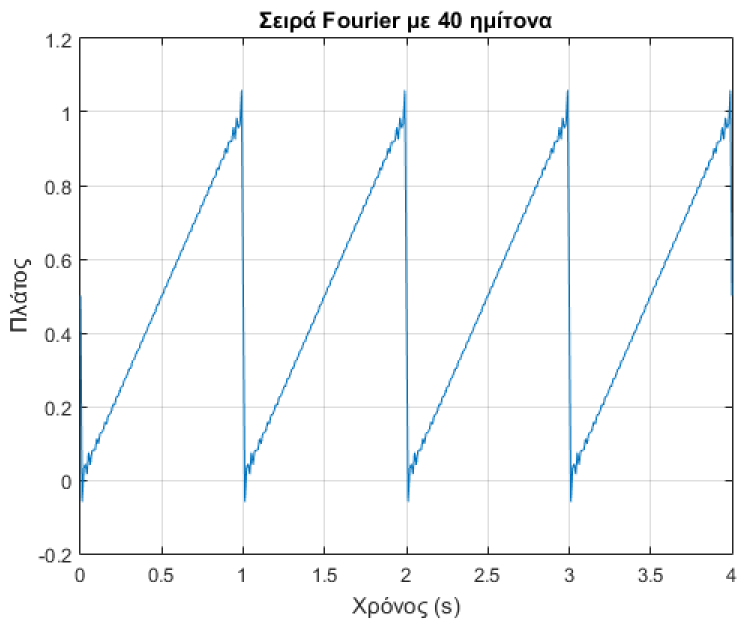
Στις Ασκήσεις 1, 2, και 3 υπολογίσαμε στο χαρτί τους συντελεστές μιας σειράς Fourier. Ας δούμε πώς θα μπορούσαμε να επιβεβαιώσουμε την απάντησή μας στο MATLAB, και με χρήση αυτού του κώδικα, να μπορούμε να σχηματίζουμε τη σειρά Fourier οποιουδήποτε περιοδικού σήματος.

Έστω λοιπόν η τριγωνομετρική σειρά Fourier

$$x(t) = \frac{A}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A}{k\pi}\cos(2\pi k f_0 t + \pi/2) \tag{3}$$

[1]Παρατηρήστε ότι το φάσμα που σας δίνεται δεν έχει άρτια ή περιττή συμμετρία, άρα δεν αντιστοιχεί σε πραγματικό σήμα στο χρόνο!

Στο μάθημα έχουμε δει κώδικα που υλοποιεί μια Σειρά Fourier με χρήση for loop. Επειδή όμως το MATLAB/Octave είναι κατασκευασμένο ώστε να είναι πολύ πιο γρήγορο όταν γράφουμε κώδικα με πράξεις πινάκων - αντί για for loops - θα δούμε τώρα μια τέτοια υλοποίηση. Ο κώδικας MATLAB που υλοποιεί την τριγωνομετρική Σειρά Fourier για $A = 1$ και $T_0 = 1$ χωρίς for loop δίνεται στο αρχείο `trigFS.m` και το αποτέλεσμα φαίνεται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3: *Σειρά Fourier.*

Κατανοήστε γιατί δουλεύει έτσι, σκεπτόμενοι/ες ότι όλες οι μεταβλητές του MATLAB/Octave είναι πίνακες. **Δε χρειάζεται να γράψετε κάτι στην αναφορά σας για αυτό**.

Εναλλακτικά, κι επειδή πολλές φορές η τριγωνομετρική Σειρά δεν υπολογίζεται εύκολα στο χαρτί ώστε να τη μεταφέρουμε στο MATLAB/Octave άμεσα, μπορούμε να υλοποιήσουμε την Εκθετική Σειρά Fourier όπως στο αρχείο `expFS.m` που σας δίνεται.

Συμπληρώστε τον κώδικα που σας δίνεται για την εκθετική Σειρά Fourier - εκεί που γράφει `INSERT CODE HERE` **- και προγραμματίστε στο MATLAB 3 περιόδους από τις Σειρές Fourier των Ασκήσεων 1 και 2 και παραδώστε τον κώδικα και τα σχήματα που προκύπτουν**.

Επιπλέον, προγραμματίστε 3 περιόδους από τα περιοδικά σήματα που αντιστοιχούν στους παρακάτω συντελεστές εκθετικής Σειράς Fourier. Παραδώστε τον κώδικα και τα σχήματα που βγάζετε.

I. $T_0 = 1,\ X_0 = 1,\ X_k = \frac{j(-1)^k}{k\pi},\ k \neq 0$

II. $T_0 = 6,\ X_0 = 1/2,\ X_k = \begin{cases} 0, & k \text{ άρτιο} \\ \frac{6}{\pi^2 k^2}\sin(\pi k/2)\sin(\pi k/6), & k \text{ περιττό} \end{cases}$

III. $T_0 = 3,\ X_0 = 1,\ X_k = \dfrac{3j}{2\pi^2 k^2}\Big(e^{j2\pi k/3}\sin(2\pi k/3) + 2e^{jk\pi/3}\sin(\pi k/3)\Big),\ \ k \neq 0$

Άσκηση 10 - Μετασχ. Fourier στο MATLAB/Octave

Συζητήσαμε αρκετά στις διαλέξεις για τον μετασχ. Fourier και βρήκαμε τη μαθηματική του έκφραση για αρκετά γνωστά μας σήματα. Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα του μετασχ. Fourier στο MATLAB με αριθμητικό τρόπο θα πρεπει να πάρουμε δείγματα από τον άξονα του χρονου και τον άξονα της συχνότητας, ώστε να κατασκευάσουμε το γινόμενο $x(t)e^{-j2\pi ft}$ και να το ολοκληρώσουμε.

Το MATLAB φυσικά έχει δική του συνάρτηση που υπολογίζει τον μετ. Fourier ενός σήματος, η οποία λέγεται `fft`. Παρ' όλα αυτά, εμείς θα φτιάξουμε τη δική μας, για να έχουμε απόλυτο έλεγχο και γιατι η `fft` απαιτεί κάποιες γνώσεις παραπάνω για να τη χρησιμοποιήσετε.

Θυμηθείτε, στο MATLAB, όλα είναι πίνακες, άρα έχουν διακριτές τιμές. Έχετε δει σε προηγούμενη σειρά ασκήσεων πώς υπολογίζουμε στο MATLAB ένα ολοκλήρωμα. Παρόμοια θα δουλέψουμε και εδώ, μόνο που το ολοκλήρωμά μας δε θα είναι τιμή, αλλά ένας πίνακας $[1 \times L]$, που θα περιέχει μερικές τιμές της συνάρτησης $X(f)$, δηλ. του μετασχ. Fourier που ψάχνουμε.

(α') Έστω ότι θέλουμε να δημιουργήσουμε ένα σήμα διάρκειας 10 δευτερολέπτων. Όπως γνωρίζετε ήδη, ο χρόνος των 10 δευτερολέπτων έχει άπειρες χρονικές στιγμές, οπότε θα πρέπει να διαλέξουμε κάποιες τιμές του σήματος. Έστω ότι θέλουμε να παίρνουμε τιμές ανά 0.01 δευτερόλεπτα. Ας δημιουργήσουμε πρώτα τον άξονα του χρόνου που θα χρησιμοποιηθεί για να πάρουμε τιμές από το σήμα μας. Θα είναι:

```
Dt = 1/100;      % Sampling step in time
D = 10;          % Signal duration in time
t = 0:Dt:D;      % Time axis (you've seen this before)
```

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε το συχνοτικό περιεχόμενο ενός σήματος στο διάστημα $[-10, 10]$, με ίδια "ανάλυση" όπως και στο πεδιο του χρόνου, δηλ. 0.01 Hz. Κατασκευάζουμε τον άξονα των συχνοτήτων ως:

```
Df = 0.01;           % Sampling step in frequency
f = -10:Df:10;       % Frequency axis = [-10,...,10]
```

Θεωρούμε λοιπόν ότι μας ενδιαφέρουν μόνο οι παραπάνω συχνότητες $[-10, 10]$, με ανάλυση `Df`, και ότι σε αυτό το διάστημα θα υπολογίσουμε τον μετασχ. Fourier. Άρα ουσιαστικά θα βλέπουμε τον μετασχ. Fourier μόνο στο διάστημα $[-10, 10]$. Γνωριζοντας τα δείγματα του χρόνου και της συχνότητας μπορούμε να κατασκευάσουμε το λεγόμενο *πίνακα ανάλυσης* του μετασχ. Fourier:

```
M = exp(-j*2*pi*f'*t);
```

Δείτε τη διάστασή του στο MATLAB και προσπαθήστε να καταλάβετε τι περιέχει σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη του. Αναφέρετε τα συμπεράσματά σας.

(β') Έστω ότι θέλουμε να βρούμε το φάσμα πλάτους του γνωστού σήματος

$$x(t) = e^{-at}u(t), \ \ a > 0 \tag{4}$$

του οποίου γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι είναι

$$|X(f)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4\pi^2 f^2}} \tag{5}$$

Ας δημιουργήσουμε και σχεδιάσουμε το σημα μας, για $a = 1$:

```
a = 1;
x = exp(-a*t);
figure; plot(t,x);
xlabel('Time (s)');
title('Signal x(t) = exp(-at)');
```

Εδώ παραλείψαμε τη χρήση της βηματικής, αφού ο άξονας του χρόνου που δημιουργήσαμε πριν έχει θετικές τιμες.

Για να υπολογίσουμε τον μετασχ. Fourier, θα δουλέψουμε όπως για το ολοκλήρωμα Riemann σε προηγούμενη σειρά ασκήσεων, δηλ. θα δημιουργήσουμε την προσέγγιση του μετασχ. Fourier ως

$$X(f) = \lim_{\Delta t_i \to 0} \Delta t_i \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \left(x(\Delta t_i) e^{-j2\pi f \Delta t_i} \right) \tag{6}$$

και όπως έχουμε δει σε προηγούμενες σειρές ασκήσεων, αυτό στο MATLAB υλοποιείται ως

```
X = Dt*x*M.';                          % Prosoxh sto .' !
```

Ο τελεστής `.'` υπολογίζει τον *ανάστροφο* ενός πίνακα (ενώ ο τελεστής `'` υπολογίζει τον *συζυγή ανάστροφο ή ερμητιανό* ενός πίνακα, και καλό θα ήταν να το αποφεύγετε). Πολλές φορές χρειάζεται αυτός ο τελεστής για να συμφωνούν οι διαστάσεις των πινάκων που εμπλέκονται ως γινόμενα.

(γ΄) Ας συγκρίνουμε το φάσμα πλάτους του παραπάνω με το θεωρητικό φάσμα πλάτους που ξέρουμε.

```
Xtheoretic = 1./(a + j*2*pi*f);
plot(f, abs(X)); grid;
hold on; plot(f, abs(Xtheoretic), 'r--');
hold off;
```

Μοιάζουν τα δυο φάσματα;

(δ΄) Ας προσπαθήσουμε τώρα να συνθέσουμε το σήμα στο χρόνο μέσω του αντίστροφου μετασχ. Fourier, δηλ. ας προσπαθήσουμε να βρούμε το σήμα στο χρόνο, $x(t)$! Ο μετασχ. Fourier που έχουμε βρει ορίζεται μόνο στο διάστημα $[-10, 10]$, αρα σίγουρα θα έχουμε κάποιο σφάλμα στον υπολογισμό του $x(t)$. Για να δούμε όμως...

Γνωριζοντας τα δείγματα του χρόνου και της συχνότητας μπορούμε να κατασκευάσουμε το λεγόμενο *πίνακα σύνθεσης* του μετασχ. Fourier:

```
Minv = exp(j*2*pi*t'*f);
```

Δείτε τη διάστασή του στο MATLAB και προσπαθήστε να καταλάβετε τι περιέχει σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη του. Αναφέρετε τα συμπεράσματά σας.

(ε΄) Για να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier, θα δουλέψουμε όπως για το ολοκλήρωμα Riemann προηγουμένως, με μικρές διαφοροποιήσεις, δηλ. θα δημιουργήσουμε την προσέγγιση του αντίστροφου μετασχ. Fourier ως

$$x(t) = \lim_{\Delta f_i \to 0} \Delta f_i \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \left(X(\Delta f_i) e^{j2\pi \Delta f_i t} \right) \tag{7}$$

Η σύνθεση του σήματος στο χρόνο γίνεται ως

```
x_est = Df*Xtheoretic*Minv.';
```

(ϛ΄) Λόγω αριθμητικών σφαλμάτων, θα δείτε ότι το σήμα που λαμβάνετε είναι μιγαδικό (ενώ προφανώς δεν πρέπει να είναι). Επιβεβαιώστε το, ελέγχοντας τις τιμές του φανταστικού μέρους (συνάρτηση `imag`) του σήματος `x_est`. Ουσιαστικά λοιπόν, μόνο το πραγματικό μέρος έχει σημασία.

Τυπώστε στον ίδιο άξονα το γράφημα του πραγματικού μέρους (συνάρτηση `real`) και το αρχικό $x(t)$. Είναι τα ίδια; Αν όχι, γιατί; Τυπώστε επίσης και το φανταστικό μέρος - ξεχωριστά. Τι τάξη μεγέθους είναι το αριθμητικό σφάλμα που παράγει το MATLAB;

Παραδωστε κώδικα και γραφήματα για όλα τα παραπάνω ερωτήματα, και απαντήστε και σε όσα θεωρητικά ερωτήματα έχουν επισημανθεί παραπάνω.