ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

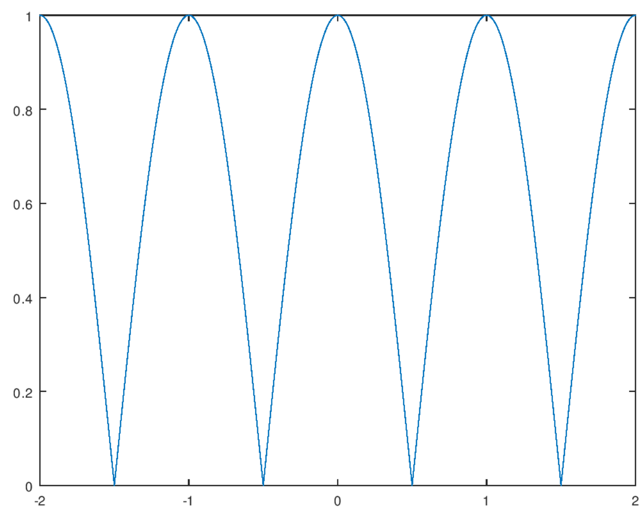
ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2018-19
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

Οι ασκήσεις με [$\star$] είναι **bonus**, $+10$ μονάδες η καθεμία στο βαθμό αυτής της σειράς ασκήσεων (δηλ. μπορείτε να πάρετε μέχρι $100/90$ σε αυτή τη σειρά.)

[$\star$] Άσκηση 1 - Σειρά Fourier I

(α΄) Η περίοδος του σήματος είναι $T_0 = 1$, δείτε το Σχήμα 1.



Σχήμα 1: *Σχήμα Άσκησης 1α.*

.

(β΄) Έχουμε

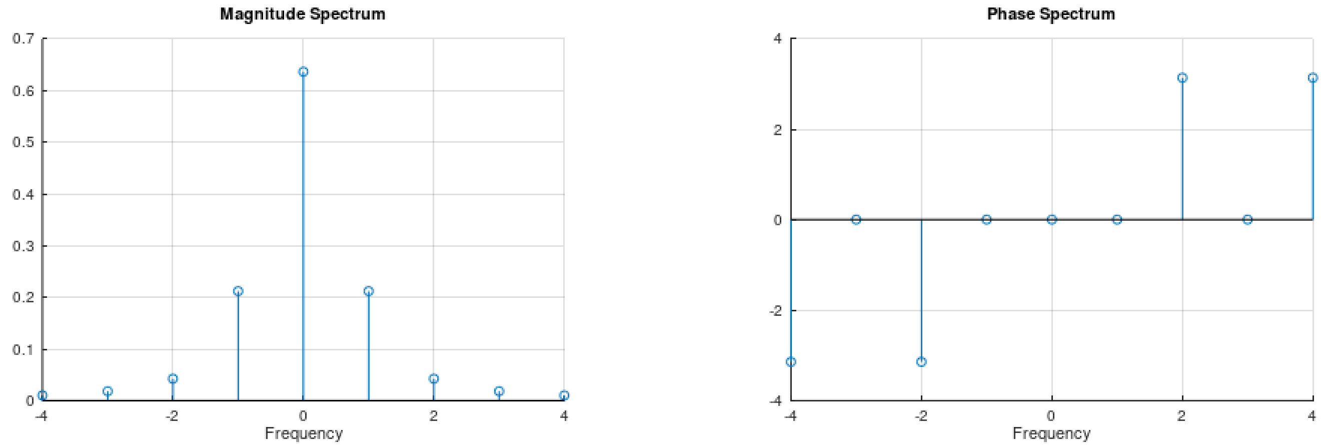
$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-1/2}^{1/2} x(t)dt = \int_{-1/2}^{1/2}\cos(\pi t)dt = \frac{1}{\pi}\sin(\pi t)\Big]_{-1/2}^{1/2} = \frac{1}{\pi}(1-(-1)) = \frac{2}{\pi} \tag{1}$$

και

$$\begin{aligned}
X_k &= \frac{1}{T_0}\int_{-1/2}^{1/2} x(t)e^{-j2\pi k/T_0 t}dt = \int_{-1/2}^{1/2}\cos(\pi t)e^{-j2\pi kt}dt && (2)\\
&= \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} e^{j\pi t}e^{-j2\pi kt}dt + \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} e^{-j\pi t}e^{-j2\pi kt}dt && (3)\\
&= \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} e^{-j\pi(2k-1)t}dt + \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} e^{-j\pi(2k+1)t}dt && (4)\\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{-j\pi(2k-1)}e^{-j\pi(2k-1)t}\Big]_{-1/2}^{1/2} + \frac{1}{2}\frac{1}{-j\pi(2k+1)}e^{-j\pi(2k+1)t}\Big]_{-1/2}^{1/2} && (5)\\
&= -\frac{1}{j2\pi(2k-1)}(e^{-j\pi(2k-1)/2} - e^{j\pi(2k-1)/2}) - \frac{1}{j2\pi(2k+1)}(e^{-j\pi(2k+1)/2} - e^{j\pi(2k+1)2}) && (6)\\
&= -\frac{1}{j2\pi(2k-1)}(-2j\sin(\pi(2k-1)/2)) - \frac{1}{j2\pi(2k+1)}(-2j\sin(\pi(2k+1)/2)) && (7)
\end{aligned}$$

$$= \frac{\sin(\pi(2k-1)/2)}{\pi(2k-1)} + \frac{\sin(\pi(2k+1)/2)}{\pi(2k+1)} \tag{8}$$

(γ΄) Το φάσμα πλάτους και φάσης φαίνεται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: *Σχήμα Άσκησης 1γ.*

.

Άσκηση 2 - Σειρά Fourier II

(α΄) Προφανώς η περίοδος του σήματος είναι $T_0 = 3$.

(β΄) Το σήμα μπορεί να χωριστεί σε άθροισμα δυο υπο-σημάτων, του

$$x_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 3k - 1) \tag{9}$$

και του

$$x_2(t) = -\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 3k + 1) \tag{10}$$

τα οποία είναι χρονικές μετατοπίσεις του γνωστού σήματος

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0) \longleftrightarrow X_k = \frac{1}{T_0} \tag{11}$$

και αναπτύσσονται σε σειρά Fourier σύμφωνα με την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης ως

$$X_{1k} = \frac{1}{3} e^{-j2\pi k/3} \tag{12}$$

$$X_{2k} = -\frac{1}{3} e^{j2\pi k/3} \tag{13}$$

Οπότε το συνολικό σήμα θα έχει συντελεστές Fourier

$$X_k = X_{1k} + X_{2k} = \frac{1}{3} e^{-j2\pi k/3} - \frac{1}{3} e^{j2\pi k/3} = -\frac{2j}{3} \sin(2\pi k/3) = \frac{2}{3} e^{-j\pi/2} \sin\left(\frac{2\pi k}{3}\right) \tag{14}$$

Άσκηση 3 - Σειρές Fourier - Ιδιότητες ΙΙ
Αφού το σήμα είναι άρτιο και πραγματικό, οι συντελεστές Fourier του θα είναι πραγματικοί αριθμοί, και μάλιστα θα ισχύει

$$X_k = X_{-k} \tag{15}$$

Το πλήθος των συντελεστών είναι 3, αφού $X_k = 0$ για $|k| \geq 2$: οι X_{-1}, X_0, X_1, και λόγω της συμμετρίας θα είναι $X_0, X_{-1} = X_1, X_1$. Το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 x(t)dt = \frac{1}{2} \tag{16}$$

ισούται με το συντελεστή X_0, οπότε $X_0 = 1/2$. Το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 |x(t)|^2 dt = 1 \tag{17}$$

αποτελεί την ισχύ του περιοδικού σήματος, η οποία μπορεί να υπολογιστεί στο πεδίο της συχνότητας ως

$$\sum_{k=-1}^{1} |X_k|^2 = |X_0|^2 + 2|X_1|^2 = \frac{1}{4} + 2|X_1|^2 = 1 \Longrightarrow |X_1|^2 = \frac{3}{8} \Longrightarrow |X_1| = \sqrt{\frac{3}{8}} \tag{18}$$

Οπότε το σήμα θα είναι το

$$x(t) = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{8}}e^{-j2\pi t} + \sqrt{\frac{3}{8}}e^{j2\pi t} = \frac{1}{2} + 2\sqrt{\frac{3}{8}}\cos(2\pi t) = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}}\cos(2\pi t) \tag{19}$$

Άσκηση 4 - Σειρές Fourier - Ιδιότητες ΙΙΙ
Το σήμα $y(t)$ είναι απλά το άθροισμα δυο σημάτων: το ένα έχει μετατοπιστεί κατά $t_0 = 1$ δεξιά, άρα διατηρεί την ίδια περίοδο και άρα την ίδια θεμελιώδη συχνότητα, ενω το άλλο έχει μετατοπιστεί κατά την ίδια ποσότητα $t_0 = 1$ αριστερά και αντιστραφεί χρονικά, άρα κι αυτό διατηρεί την ίδια περίοδο και την ίδια θεμελιώδη συχνότητα. Το άθροισμα των δυο σημάτων θα είναι κι αυτό περιοδικό με την ίδια θεμελιώδη συχνότητα, f_0.

Το άθροισμα

$$y(t) = x(1-t) + x(t-1) \tag{20}$$

έχει συντελεστές Fourier

$$Y_k = X_{-k}e^{j2\pi(-k)f_0 t} + X_k e^{-j2\pi k f_0 t} = e^{-j2\pi k f_0 t}(X_k + X_{-k}) \tag{21}$$

Άσκηση 5 - Συντελεστές Fourier ΙΙ
Το σήμα γράφεται διαδοχικά ως

$$\begin{aligned}
x(t) = \cos^4(t) = \left(\cos^2(t)\right)^2 &= \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)\Big)^2 && (22)\\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{4}\cos^2(2t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{4}\cos^2(2t) && (23)\\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4t)\Big) && (24)\\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{8} + \frac{1}{4}\cos(4t) && (25)\\
&= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{8}\cos(4t) && (26)\\
&= \frac{3}{8} + \frac{1}{4}e^{j2t} + \frac{1}{4}e^{-j2t} + \frac{1}{16}e^{j4t} + \frac{1}{16}e^{-j4t} && (27)
\end{aligned}$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγετε και εφαρμόζοντας διαδοχικά τις σχέσεις του Euler από την αρχή. Προφανώς η θεμελιώδης συχνότητα του σήματος είναι $\omega_0 = \text{ΜΚΔ}\{2,4\} = 2$, οπότε η περίοδος δίνεται ως $T_0 = 2\pi/2 = \pi$, ενώ οι συντελεστες Fourier φαίνονται από την τελευταια έκφραση παραπάνω, ως

$$X_0 = \frac{3}{8}, X_1 = X_{-1} = \frac{1}{4}, X_2 = X_{-2} = \frac{1}{16} \tag{28}$$

Άσκηση 6 - Μετασχηματισμός Fourier I

(α΄)

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\delta\big(t-\frac{1}{2}\big)e^{-j2\pi ft}dt \tag{29}$$

$$= 2\int_{-\infty}^{+\infty} \delta\big(t-\frac{1}{2}\big)e^{-j2\pi ft}dt = 2e^{-j2\pi ft}\Big]_{t=1/2} = 2e^{-j\pi f} \tag{30}$$

(β΄)

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}(t-6)e^{-j2\pi ft}dt \tag{31}$$

$$= \int_{11/2}^{13/2} e^{-j2\pi ft}dt = \frac{1}{-j2\pi f}(e^{-j2\pi f13/2} - e^{-j2\pi f11/2}) \tag{32}$$

$$= \frac{1}{-j2\pi f}e^{-j2\pi 6f}(e^{-j\pi f} - e^{j\pi f}) = \frac{1}{-j2\pi f}(-2j\sin(\pi f))e^{-j2\pi 6f} \tag{33}$$

$$= \frac{1}{\pi f}\sin(\pi f)e^{-j2\pi 6f} = \text{sinc}(f)e^{-j2\pi 6f} \tag{34}$$

(γ΄)

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4t}u(t-1)e^{-j2\pi ft}dt \tag{35}$$

$$= \int_{1}^{+\infty} e^{-4t}e^{-j2\pi ft}dt = \int_{1}^{+\infty} e^{-(j2\pi f+4)t}dt \tag{36}$$

$$= \frac{1}{-(j2\pi f+4)}e^{-(j2\pi f+4)t}\Big]_1^{+\infty} = \frac{1}{-(j2\pi f+4)}(0 - e^{-(j2\pi f+4)}) \tag{37}$$

$$= \frac{1}{-(j2\pi f+4)}(0 - e^{-(j2\pi f+4)}) = \frac{e^{-(j2\pi f+4)}}{4+j2\pi f} \tag{38}$$

(δ΄)

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} 3(u(t)-u(t-2))e^{-j2\pi ft}dt \tag{39}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} 3\text{rect}\big(\frac{t-1}{2}\big)e^{-j2\pi ft}dt = 3\int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}\big(\frac{t-1}{2}\big)e^{-j2\pi ft}dt \tag{40}$$

$$= 3\int_{0}^{2} e^{-j2\pi ft}dt = 3\frac{1}{-j2\pi f}e^{-j2\pi ft}\Big]_0^2 \tag{41}$$

$$= 3\frac{1}{-j2\pi f}(e^{-j4\pi f} - 1) = 3\frac{1}{-j2\pi f}e^{-2j\pi f}(-2j\sin(2\pi f)) \tag{42}$$

$$= 3e^{-2j\pi f}\frac{1}{\pi f}\sin(2\pi f) = 6e^{-j2\pi f}\text{sinc}(2f) \tag{43}$$

(ε')

$$
\begin{aligned}
X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-T}^{T} Ate^{-j2\pi ft}dt && (44)\\
&= A\int_{-T}^{T} te^{-j2\pi ft}dt = A\int_{-T}^{T} te^{-j2\pi ft}dt && (45)\\
&= Ae^{-j2\pi ft}\Big(\frac{-j2\pi ft-1}{(-j2\pi f)^2}\Big)\Big]_{-T}^{T} && (46)\\
&= Ae^{-j2\pi fT}\Big(\frac{-j2\pi fT-1}{(-j2\pi f)^2}\Big) - Ae^{j2\pi fT}\Big(\frac{j2\pi fT-1}{(-j2\pi f)^2}\Big) && (47)\\
&= A\frac{j2\pi fT}{(2\pi f)^2}e^{-j2\pi fT} + Ae^{-j2\pi fT}\frac{1}{(2\pi f)^2} + A\frac{j2\pi fT}{(2\pi f)^2}e^{j2\pi fT} - Ae^{j2\pi fT}\frac{1}{(2\pi f)^2} && (48)\\
&= jAT\frac{1}{2\pi f}2\cos(2\pi fT) - A2j\sin(2\pi fT)\frac{1}{(2\pi f)^2} && (49)\\
&= jAT\frac{1}{\pi f}\cos(2\pi fT) - j2A\sin(2\pi fT)\frac{1}{(2\pi f)^2} && (50)\\
&= jA\Big(\frac{T}{\pi f}\cos(2\pi fT) - \sin(2\pi fT)\frac{1}{2(\pi f)^2}\Big) && (51)
\end{aligned}
$$

Άσκηση 7 - Μετασχηματισμός Fourier - II

Αν ένα σήμα $x(t)$ έχει μετασχ. Fourier $X(f)$, γράψτε κάθε μετασχηματισμό $Y(f)$ των παρακάτω σημάτων συναρτήσει του $X(f)$.

(α') Είναι

$$y(t) = x(at-b) = z(at), a \neq 0, b \in \Re \tag{52}$$

με $z(t) = x(t-b)$, οπότε

$$Y(f) = \frac{1}{|a|}Z\Big(\frac{f}{a}\Big) = \frac{1}{|a|}\Big[X(f)e^{-j2\pi fb}\Big]_{f=f/a} = \frac{1}{|a|}X\Big(\frac{f}{a}\Big)e^{-j2\pi fb/a} \tag{53}$$

(β') Είναι

$$y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)d\tau = z(2t) \tag{54}$$

με $z(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$, οπότε

$$Y(f) = \frac{1}{2}Z\Big(\frac{f}{2}\Big) = \frac{1}{2}\Big[\frac{X(0)}{2}\delta(f) + \frac{X(f)}{j2\pi f}\Big]_{f=f/2} = \frac{1}{2}\Big(X(0)\delta(f) + \frac{X(f/2)}{j\pi f}\Big) \tag{55}$$

αφού $\delta(f/2) = \frac{1}{\frac{1}{2}}\delta(f) = 2\delta(f)$.

(γ') Είναι

$$
\begin{aligned}
y(t) = tx(2t-1) &= \frac{1}{2}(2t-1+1)x(2t-1) && (56)\\
&= \frac{1}{2}(2t-1)x(2t-1) + \frac{1}{2}x(2t-1) && (57)\\
&= \frac{1}{2}z(2t-1) + \frac{1}{2}x(2t-1) && (58)
\end{aligned}
$$

με $z(t) = tx(t)$, οπότε

$$Y(f) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}Z\Big(\frac{f}{2}\Big)e^{-j\pi f} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}X\Big(\frac{f}{2}\Big)e^{-j\pi f} \tag{59}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{j}{2\pi}\frac{d}{df}\Big(X\Big(\frac{f}{2}\Big)e^{-j\pi f}\Big) + \frac{1}{4}X\Big(\frac{f}{2}\Big)e^{-j\pi f} \tag{60}$$

(δ') Είναι

$$y(t) = e^{j2t}x(t-1) \longleftrightarrow Y(f) = \Big[X(f)e^{-j2\pi f}\Big]_{f=f-\frac{1}{\pi}} = X\Big(f - \frac{1}{\pi}\Big)e^{-j2\pi(f-(1/\pi))} \tag{61}$$

(ε') Είναι

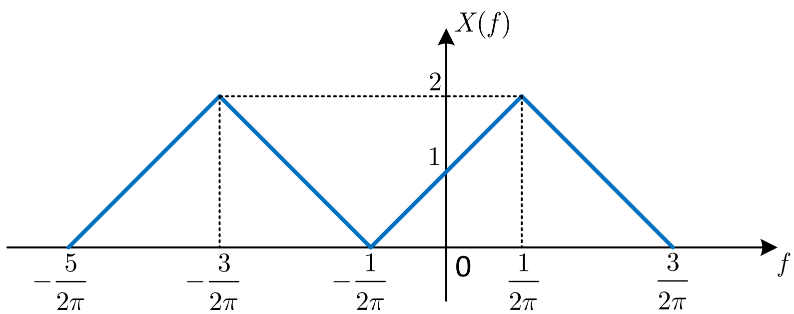
$$y(t) = tx(t)\sin(3t) \longleftrightarrow Y(f) = \frac{j}{2\pi}\frac{d}{df}X(f) * \Big(\frac{1}{2j}\delta(f-f_0) - \frac{1}{2j}\delta(f+f_0)\Big) = \frac{j}{2\pi}\Big(\frac{1}{2j}X'(f-f_0) - \frac{1}{2j}X'(f+f_0)\Big) \tag{62}$$

με $f_0 = \frac{3}{2\pi}$

(ϛ') Είναι

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t) * (e^{-jt}x(t)) \longleftrightarrow Y(f) = j2\pi f X(f)X\Big(f + \frac{1}{2\pi}\Big) \tag{63}$$

Άσκηση 8 - Μετασχηματισμός Fourier - Ιδιότητες



Σχήμα 3: *Σχήμα Άσκησης 8.*

(α') $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt\Big]_{f=0} = X(0) = 1$

(β') $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{j3t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi(-\frac{3}{2\pi})t}dt = X(-3/2\pi) = 2$

(γ') $\theta_x(t) = -t$, αφού η μετατόπιση του φάσματος προς τα αριστερά κατά $f_0 = 1/2\pi$ οδηγεί σε πολλαπλασιασμό του σήματος στο χρόνο με ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα της μορφής $e^{-j2\pi\frac{1}{2\pi}t} = e^{-jt}$, του οποίου η φάση είναι $-t$.

(δ') $x(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)df$, που ειναι το εμβαδό του σήματος $X(f)$, και από απλή γεωμετρία είναι $4/\pi$.

Άσκηση 9 - Σειρές Fourier στο MATLAB/Octave
Κώδικας MATLAB.

Άσκηση 10 - Μετασχ. Fourier στο MATLAB/Octave
Κώδικας MATLAB.