

HY-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2018-19
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Λύσεις Δεύτερης Σειράς Ασκήσεων

Οι ασκήσεις με [*] είναι **bonus**, +10 μονάδες η καθεμία στο βαθμό αυτής της σειράς ασκήσεων (δηλ. μπορείτε να πάρετε μέχρι 90/70 σε αυτή τη σειρά.)

Άσκηση 1 - Μιγαδικοί Αριθμοί - Σχέσεις Euler

(α) Είναι

$$\operatorname{Re}\{(-1-j)e^{j2\theta}\} = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad (1)$$

$$\operatorname{Re}\{\sqrt{2}e^{-j3\pi/4}e^{j2\theta}\} = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad (2)$$

$$\operatorname{Re}\{\sqrt{2}e^{j(2\theta-3\pi/4)}\} = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad (3)$$

$$\sqrt{2}\cos(2\theta - 3\pi/4) = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad (4)$$

$$\cos(2\theta - 3\pi/4) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (5)$$

$$\cos(2\theta - 3\pi/4) = \cos(\pi/6) \quad (6)$$

$$2\theta - \frac{3\pi}{4} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (7)$$

$$2\theta = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{4} \quad (8)$$

$$\theta = k\pi \pm \frac{\pi}{12} + \frac{3\pi}{8} \quad (9)$$

$$= \begin{cases} k\pi + \frac{11\pi}{24} \\ k\pi + \frac{7\pi}{24} \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (10)$$

(β) Είναι

$$\int_0^\pi \sin(4\theta) \cos(5\theta) d\theta = \frac{1}{2} \frac{1}{2j} \int_0^\pi (e^{j4\theta} - e^{-j4\theta})(e^{j5\theta} + e^{-j5\theta}) d\theta \quad (11)$$

$$= \frac{1}{4j} \int_0^\pi (e^{j9\theta} + e^{-j\theta} - e^{j\theta} - e^{-j9\theta}) d\theta \quad (12)$$

$$= \frac{1}{j4} \int_0^\pi (2j \sin(9\theta) - 2j \sin(\theta)) d\theta \quad (13)$$

$$= \frac{2j}{j4} \int_0^\pi (\sin(9\theta) - \sin(\theta)) d\theta \quad (14)$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{9} \cos(9\theta) + \cos(\theta) \right) \Big|_0^\pi \quad (15)$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{9} \cos(9\pi) + \cos(\pi) \right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{9} \cos(0) + \cos(0) \right) \quad (16)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9} - 1 \right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{9} + 1 \right) = -\frac{8}{9} \quad (17)$$

Άσκηση 2 - Σήματα

(α) Για το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right), & -T \leq t \leq T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (18)$$

έχουμε ότι

$$x(-t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{-\pi t}{T}\right), & -T \leq -t \leq T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} -\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right), & -T \leq t \leq T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \neq x(t) \quad (19)$$

λόγω του ότι $\sin(-x) = -\sin(x)$, ενώ

$$-x(-t) = \begin{cases} -\sin\left(\frac{-\pi t}{T}\right), & -T \leq -t \leq T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right), & -T \leq t \leq T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = x(t) \quad (20)$$

άρα το σήμα είναι περιττό.

(β) Θα έχουμε

i. Το σήμα $x(-t) = \cos(-t) + \sin(-t) + \sin(-t)\cos(-t) = \cos(t) - \sin(t) - \sin(t)\cos(t)$, οπότε

$$x_{\text{άρτιο}} = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t)) \quad (21)$$

$$= \frac{1}{2}(\cos(t) + \sin(t) + \sin(t)\cos(t) + \cos(t) - \sin(t) - \sin(t)\cos(t)) \quad (22)$$

$$= \cos(t) \quad (23)$$

και

$$x_{\text{περιττό}} = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t)) \quad (24)$$

$$= \frac{1}{2}(\cos(t) + \sin(t) + \sin(t)\cos(t) - \cos(t) + \sin(t) + \sin(t)\cos(t)) \quad (25)$$

$$= \sin(t) + \sin(t)\cos(t) \quad (26)$$

$$= \sin(t)(1 + \cos(t)) \quad (27)$$

ii. Το σήμα $x(-t) = (1 + (-t)^3)\cos^3(-10t) = (1 - t^3)\cos^3(10t)$, οπότε

$$x_{\text{άρτιο}} = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t)) \quad (28)$$

$$= \frac{1}{2}((1 + t^3)\cos^3(10t) + (1 - t^3)\cos^3(10t)) \quad (29)$$

$$= \frac{1}{2}(\cos^3(10t) + t^3\cos^3(10t) + \cos^3(10t) - t^3\cos^3(10t)) \quad (30)$$

$$= \cos^3(10t) \quad (31)$$

και

$$x_{\text{περιττό}} = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t)) \quad (32)$$

$$= \frac{1}{2}((1 + t^3)\cos^3(10t) - (1 - t^3)\cos^3(10t)) \quad (33)$$

$$= \frac{1}{2}(\cos^3(10t) + t^3\cos^3(10t) - \cos^3(10t) + t^3\cos^3(10t)) \quad (34)$$

$$= t^3\cos^3(10t) \quad (35)$$

Άσκηση 3 - Εξιιώσεις - Περιοδικότητα

(α) Θα έχουμε

$$\cos(2\pi 125t + \pi/3) + 2 \cos(2\pi 125t - \pi/4) = \operatorname{Re}\{e^{j(2\pi 125t + \pi/3)}\} + \operatorname{Re}\{2e^{j(2\pi 125t - \pi/4)}\} \quad (36)$$

$$= \operatorname{Re}\{(e^{j\pi/3} + 2e^{-j\pi/4})e^{j2\pi 125t}\} \quad (37)$$

Ο μιγαδικός $e^{j\pi/3} + 2e^{-j\pi/4}$ γράφεται ως

$$e^{j\pi/3} + 2e^{-j\pi/4} = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\frac{\sqrt{2}}{2} - j2\frac{\sqrt{2}}{2} = \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right) + j\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2}\right) \approx 1.99e^{-j0.0887\pi} \quad (38)$$

με τη βοήθεια υπολογιστή ή αριθμομηχανής. Οπότε

$$A \cos(2\pi f_0 t + \phi) = \operatorname{Re}\{1.99e^{-j0.0887\pi} e^{j2\pi 125t}\} = 1.99 \cos(2\pi 125t - 0.0887\pi) \quad (39)$$

οπότε

$$A = 1.99, \quad f_0 = 125, \quad \phi = -0.0877\pi \quad (40)$$

(β) Για το σήμα

$$x(t) = \cos(2\pi 150t - \pi) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(2\pi 130t + \pi/2) - 4 \cos(2\pi 125t) \quad (41)$$

έχουμε ότι

$$f_0 = \text{M.K.}\Delta\{(125, 130, 150)\} = 5 \text{ Hz} \quad (42)$$

οπότε

$$T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{1}{5} = 0.2 \text{ s} \quad (43)$$

Άσκηση 4 - Ενέργεια και Ισχύς

Έχουμε

(α) Για το $x(t) = 2 \cos(\pi t) + \sin(10\pi t)$, $-\infty < t < +\infty$ γνωρίζουμε από τις διαλέξεις ότι

$$\sum_i A_i \cos(2\pi f_i t + \phi_i) \longrightarrow P = \sum_i \frac{A_i^2}{2} \quad (44)$$

οπότε είναι σήμα ισχύος. Δηλ.

$$P_x = \frac{2^2}{2} + \frac{1^2}{2} = \frac{5}{2} \quad (45)$$

(β) Το σήμα $x(t) = tu(t)$ απειρίζεται όταν το $t \rightarrow +\infty$, οπότε δεν είναι σίγουρα σήμα ενέργειας ούτε ισχύος. Ας το δειξουμε

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 u^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 u(t) dt = \int_0^{+\infty} t^2 dt = \left. \frac{t^3}{3} \right|_0^{+\infty} = +\infty \quad (46)$$

και

$$P_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T t^2 u^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T t^2 u(t) dt \quad (47)$$

$$= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_0^T t^2 dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left. \frac{1}{2T} \frac{t^3}{3} \right|_0^T \quad (48)$$

$$= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \left(\frac{T^3}{3} - 0 \right) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \frac{T^3}{3} \quad (49)$$

$$= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{T^3}{6T} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{T^2}{6} \quad (50)$$

$$= +\infty \quad (51)$$

άρα πράγματι δεν είναι ούτε σήμα ισχύος ούτε σήμα ενέργειας.

(γ') Το σήμα $x(t) = t$, $-\infty < t < +\infty$ απειρίζεται όταν $|t| \rightarrow +\infty$, οπότε δεν είναι σήμα ενέργειας ούτε ισχύος. Ας το δείξουμε.

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 dt = \left. \frac{t^3}{3} \right]_{-\infty}^{+\infty} = +\infty \quad (52)$$

και

$$P_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T t^2 dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left. \frac{1}{2T} \frac{t^3}{3} \right]_{-T}^T \quad (53)$$

$$= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \left(\frac{T^3}{3} - \frac{(-T)^3}{3} \right) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \frac{2T^3}{3} \quad (54)$$

$$= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{2T^3}{6T} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{T^2}{3} \quad (55)$$

$$= +\infty \quad (56)$$

(δ) Το σήμα $x(t) = A \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$ είναι πεπερασμένης διάρκειας και φραγμένου πλάτους, άρα είναι σίγουρα σήμα ενέργειας. Είναι

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 \text{rect}^2\left(\frac{t}{T}\right) dt = \int_{-T/2}^{T/2} A^2 dt = A^2 t \Big|_{-T/2}^{T/2} = A^2 \left(\frac{T}{2} - \frac{-T}{2} \right) = A^2 T \quad (57)$$

[*] Άσκηση 5 - Μετασχηματισμοί Σημάτων

I. Τα σήματα

$$(α) u(t-5) - u(t-7)$$

$$(β) u(t-5) + u(t-7)$$

$$(γ) t^2(u(t-1) - u(t-2))$$

$$(δ) (t-4)(u(t-2) - u(t-4))$$

φαίνονται στο Σχήμα 1.

II. Έχουμε

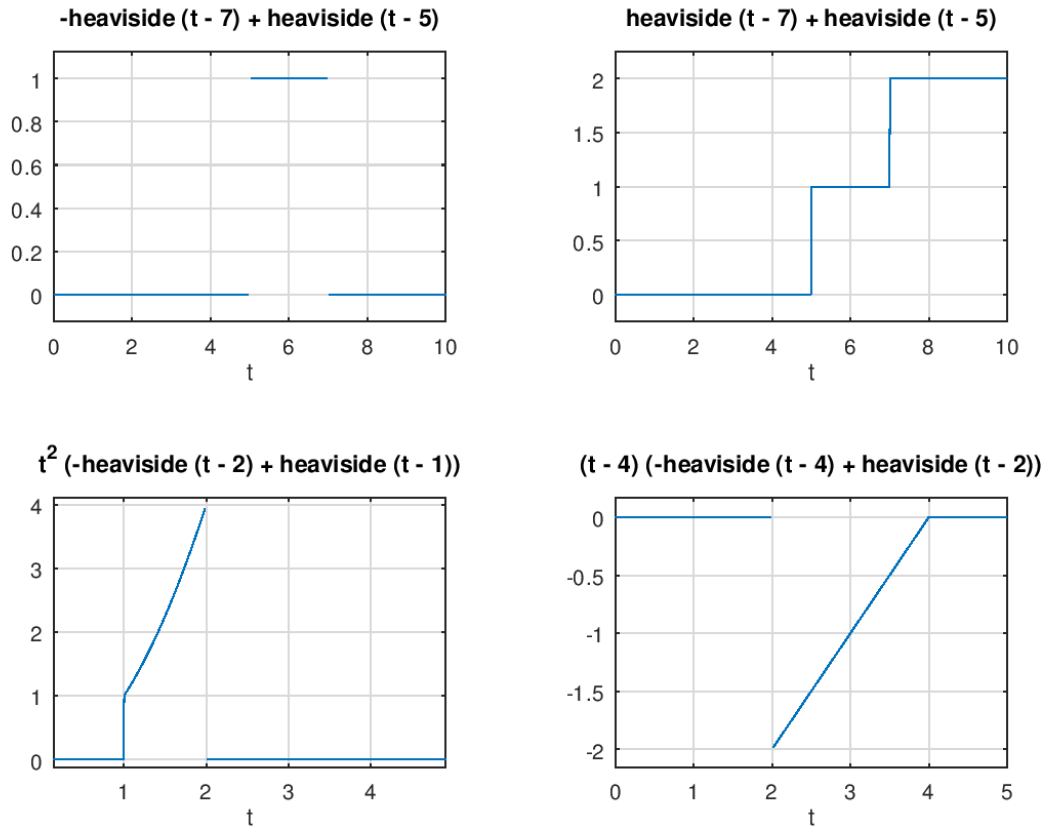
$$x_2(t) = x(t-1) + x_1(t-1) \quad (58)$$

$$x_3(t) = x(t-1) + x_1(t+1) \quad (59)$$

$$x_4(t) = x(t-0.5) + x_1(t+0.5) \quad (60)$$

$$x_5(t) = \frac{3}{2} x\left(\frac{t}{2} - 1\right) \quad (61)$$

Άσκηση 6 - Συναρτήσεις Δέλτα



Σχήμα 1: Σχήμα Άσκησης 5.

(α) Το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} \frac{t}{\Delta}, & -\Delta/2 < t < \Delta/2 \\ 1, & t > \Delta/2 \\ 0, & t < -\Delta/2 \end{cases} \quad (62)$$

φαίνεται στο Σχήμα 2.

(β) Το σήμα στο διάστημα $-\Delta/2 < t < \Delta/2$ ουσιαστικά είναι μια πλάγια ευθεία πολλαπλασιασμένη με ένα τετραγωνικό παλμό με κέντρο το $t = 0$ και διάρκειας Δ . Άρα

$$x_1(t) = \frac{t}{\Delta} \text{rect}\left(\frac{t}{\Delta}\right) \quad (63)$$

Όμως ξέρουμε ότι ο τετραγωνικός παλμός μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δυο βηματικών. Οπότε

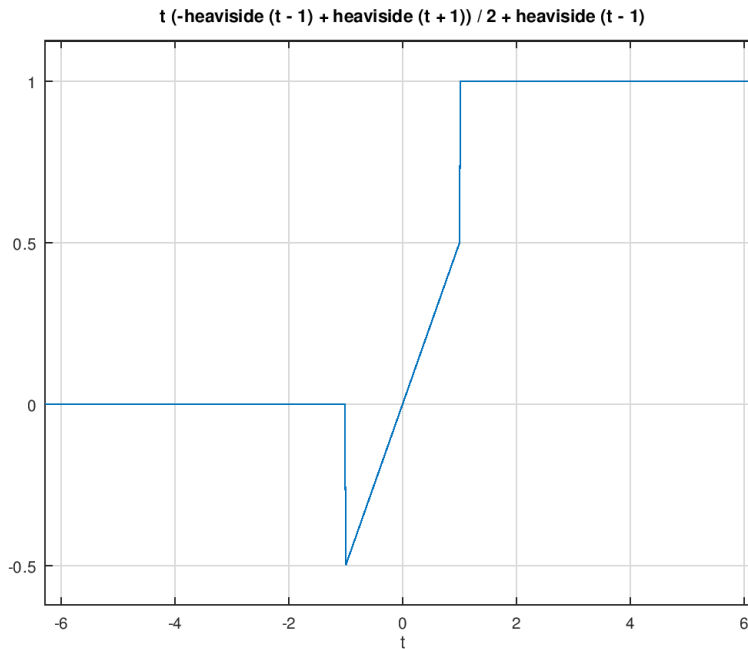
$$x_1(t) = \frac{t}{\Delta} (u(t + \Delta/2) - u(t - \Delta/2)) \quad (64)$$

Το σήμα είναι μηδενικό για $t < -\Delta/2$, οπότε το υπόλοιπο σήμα για $t > \Delta/2$ που είναι μοναδιαίο, μπορεί να γραφεί ως

$$x_2(t) = u(t - \Delta/2) \quad (65)$$

Συνολικά

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = \frac{t}{\Delta} \left[u\left(t + \frac{\Delta}{2}\right) - u\left(t - \frac{\Delta}{2}\right) \right] + u\left(t - \frac{\Delta}{2}\right) \quad (66)$$

Σχήμα 2: Σχήμα Άσκησης 6 για $\Delta = 2$.

(γ) Παραγωγίζοντας το σήμα $x(t)$ όπως το βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα, έχουμε

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt} \frac{t}{\Delta} \left[u\left(t + \frac{\Delta}{2}\right) - u\left(t - \frac{\Delta}{2}\right) \right] + \frac{d}{dt}u\left(t - \frac{\Delta}{2}\right) \quad (67)$$

$$= \frac{d}{dt} \frac{t}{\Delta} u\left(t + \frac{\Delta}{2}\right) - \frac{d}{dt} \frac{t}{\Delta} u\left(t - \frac{\Delta}{2}\right) + \frac{d}{dt}u\left(t - \frac{\Delta}{2}\right) \quad (68)$$

$$= \left(\frac{d}{dt} \frac{t}{\Delta}\right) u\left(t + \frac{\Delta}{2}\right) + \frac{t}{\Delta} \left(\frac{d}{dt}u\left(t + \frac{\Delta}{2}\right)\right) - \left(\frac{d}{dt} \frac{t}{\Delta}\right) u\left(t - \frac{\Delta}{2}\right) - \frac{t}{\Delta} \left(\frac{d}{dt}u\left(t - \frac{\Delta}{2}\right)\right) + \frac{d}{dt}u\left(t - \frac{\Delta}{2}\right) \quad (69)$$

$$= \frac{1}{\Delta} u\left(t + \frac{\Delta}{2}\right) + \frac{t}{\Delta} \delta\left(t + \frac{\Delta}{2}\right) - \frac{1}{\Delta} u\left(t - \frac{\Delta}{2}\right) - \frac{t}{\Delta} \delta\left(t - \frac{\Delta}{2}\right) + \delta\left(t - \frac{\Delta}{2}\right) \quad (70)$$

$$= \frac{1}{\Delta} u\left(t + \frac{\Delta}{2}\right) - \frac{1}{\Delta} \frac{\Delta}{2} \delta\left(t + \frac{\Delta}{2}\right) - \frac{1}{\Delta} u\left(t - \frac{\Delta}{2}\right) - \frac{1}{\Delta} \frac{\Delta}{2} \delta\left(t - \frac{\Delta}{2}\right) + \delta\left(t - \frac{\Delta}{2}\right) \quad (71)$$

$$= \frac{1}{\Delta} u\left(t + \frac{\Delta}{2}\right) - \frac{1}{\Delta} u\left(t - \frac{\Delta}{2}\right) - \frac{1}{2} \delta\left(t + \frac{\Delta}{2}\right) - \frac{1}{2} \delta\left(t - \frac{\Delta}{2}\right) + \delta\left(t - \frac{\Delta}{2}\right) \quad (72)$$

$$= \frac{1}{\Delta} u\left(t + \frac{\Delta}{2}\right) - \frac{1}{\Delta} u\left(t - \frac{\Delta}{2}\right) - \frac{1}{2} \delta\left(t + \frac{\Delta}{2}\right) + \frac{1}{2} \delta\left(t - \frac{\Delta}{2}\right) \quad (73)$$

Οι δυο πρώτοι όροι αποτελούν ένα τετραγωνικό παλμό διάρκειας Δ με κέντρο το $t = 0$ και πλάτος $1/\Delta$. Οπότε

$$y(t) = \frac{1}{\Delta} \text{rect}\left(\frac{t}{\Delta}\right) + \frac{1}{2} \delta\left(t - \frac{\Delta}{2}\right) - \frac{1}{2} \delta\left(t + \frac{\Delta}{2}\right) \quad (74)$$

(δ) Όταν $\Delta \rightarrow 0$, ο τετραγωνικός παλμός γίνεται απειροστά στενός και αποκτά απείρως μεγάλο πλάτος, με επιφάνεια $\Delta \times 1/\Delta = 1$, άρα προσεγγίζει τη συνάρτηση Δέλτα. Οπότε

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \text{rect}\left(\frac{t}{\Delta}\right) = \delta(t) \quad (75)$$

Για τις υπόλοιπες συναρτήσεις Δέλτα της εξόδου $y(t)$, έχουμε ότι

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \delta\left(t - \frac{\Delta}{2}\right) - \frac{1}{2} \delta\left(t + \frac{\Delta}{2}\right) \right) = 0 \quad (76)$$

γιατί οι δυο συναρτήσεις Δέλτα πλησιάζουν στη χρονική στιγμή $t = 0$, η μια από το 0^+ και η άλλη από το 0^- , κι επειδή οι επιφάνειές τους είναι $\pm \frac{1}{2}$, η μια ακυρώνει την άλλη. Άρα συνολικά

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} y(t) = \delta(t) \quad (77)$$

Άσκηση 7 - Ραδιοφωνία AM και FM

I. Για το σήμα

$$y(t) = Ax(t) \cos(2\pi f_c t + \phi), \quad A > 0, \quad \phi \in (-\pi, \pi] \quad (78)$$

έχουμε

(α) Ομογένεια: για είσοδο $ax(t)$ η έξοδος θα είναι

$$y_{ax(t)}(t) = A(ax(t)) \cos(2\pi f_c t + \phi) = a(Ax(t) \cos(2\pi f_c t + \phi)) = ay(t) \quad (79)$$

άρα είναι ομογενές. Αθροιστικότητα: για είσοδο $x_1(t) + x_2(t)$ η έξοδος θα είναι

$$y_{x_1+x_2}(t) = A(x_1(t) + x_2(t)) \cos(2\pi f_c t + \phi) \quad (80)$$

$$= Ax_1(t) \cos(2\pi f_c t + \phi) + Ax_2(t) \cos(2\pi f_c t + \phi) \quad (81)$$

$$= y_1(t) + y_2(t) \quad (82)$$

αρα είναι και αθροιστικό, οπότε είναι γραμμικό.

(β) Αν καθυστερήσουμε την είσοδο κατά t_0 , η έξοδος γίνεται

$$y_{x(t-t_0)}(t) = Ax(t-t_0) \cos(2\pi f_c t + \phi) \quad (83)$$

ενώ αν καθυστερήσουμε την έξοδο κατά t_0 , θα πάρουμε

$$y(t-t_0) = Ax(t-t_0) \cos(2\pi f_c(t-t_0) + \phi) = Ax(t-t_0) \cos(2\pi f_c t - 2\pi f_c t_0 + \phi) \neq y_{x(t-t_0)}(t) \quad (84)$$

άρα είναι χρονικά μεταβλητό.

II. Για το σήμα $x(t)$

$$y(t) = \cos\left(2\pi f_c t + k \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right) \quad (85)$$

έχουμε

(α) Ομογένεια: για είσοδο $ax(t)$ η έξοδος θα είναι

$$y_{ax(t)}(t) = \cos\left(2\pi f_c t + k \int_{-\infty}^t ax(\tau) d\tau\right) = \cos\left(2\pi f_c t + ka \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right) \neq ay(t) \quad (86)$$

άρα δεν είναι ομογενές, ούτε και γραμμικό.

(β) Έχοντας υπόψη την ιδιότητα

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \Big|_{t=c} = u(t) \Big|_{t=c} \quad (87)$$

θέτουμε $x(t) = \delta(t)$, και τότε

$$y(0^+) = \cos\left(2\pi f_c \times 0 + k \int_{-\infty}^{0^+} \delta(\tau) d\tau\right) = \cos(k) \quad (88)$$

Περιμένουμε ότι αν θέσουμε $x(t) = \delta(t - t_0)$, τότε αν το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο, θα πρέπει $y(0^+) = y(t_0^+)$. Έχουμε

$$y(t_0^+) = \cos\left(2\pi f_c t_0 + k \int_{-\infty}^{t_0^+} \delta(\tau) d\tau\right) = \cos(2\pi f_c t_0 + k) \quad (89)$$

Οι τιμές $y(0^+)$ και $y(t_0^+)$ δεν ταυτίζονται, οπότε το σύστημα είναι χρονικά μεταβλητό.

Άσκηση 8 - Ολοκλήρωση στο MATLAB/Octave

Κώδικας

[*] Άσκηση 9 - Σύνθεση Μουσικής στο MATLAB/Octave

Κώδικας