ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2018-19
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Πρώτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 8/2/2019 Ημερομηνία Παράδοσης: 15/2/2019

Οι ασκήσεις με [$\star$] είναι **bonus**, $+10$ μονάδες η καθεμία στο βαθμό αυτής της σειράς ασκήσεων (δηλ. μπορείτε να πάρετε μέχρι $90/70$ σε αυτή τη σειρά.)

Άσκηση 1 - Μιγαδικές Εξισώσεις Ι
Να λυθούν οι εξισώσεις

(α') $\dfrac{2-jz}{j+z} = 1$

(β') $\dfrac{2z+8}{z+5} = j$

ως προς $z = x + jy$.

Απ.: (α) $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}j$, (β) $-\frac{21}{5} + \frac{2}{5}j$

Άσκηση 2 - Μιγαδικές Εξισώσεις ΙΙ

(α') Να βρεθεί ο μιγαδικός z αν

$$(1+j)(z+z^*) + (2-j)(z+2z^*) = 1 \tag{1}$$

(β') Να βρεθούν οι τιμές των $x, y \in \Re$ αν

$$\frac{(3+4j)^2}{1-2j} = z + j \tag{2}$$

Απ.: (α) $z = \frac{2}{17} - \frac{1}{17}j$, (β) $(x, y) = (-11, 1)$

Άσκηση 3 - Γεωμετρικοί Τόποι Ι
Βρείτε και σχεδιάστε τους γεωμετρικούς τόπους του z αν

(α') $\Re\{z\} = 2$

(β') $|z - 4 + j7| = 2$

(γ') $\angle(z+1) = \dfrac{\pi}{3}$

(δ') $\left|\dfrac{z-3}{z+j}\right| = 1$

Απ.: (α) $x = 2$, (β) $(x-4)^2 + (y+7)^2 = 4$, (γ) $y = \sqrt{3}(x+1)$, $y > 0$ (δ) $y = -3x + 4$

[⋆] **Άσκηση 4 - Γεωμετρικοί Τόποι ΙΙ**
Βρείτε και σχεδιάστε τους γεωμετρικούς τόπους του w αν

(α') $w = \dfrac{5zj+j}{z+1}$,$z \neq -1$, με το γεωμετρικό τόπο του z να είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1

(β') $w = \dfrac{1}{2}z + j$, με το γεωμετρικό τόπο του z να είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 2.

Απ.: (α) $y = 3$, (β) κύκλος: $x^2 + (y-1)^2 = 1$

Άσκηση 5 - Ρίζες πολυωνύμων
Να βρεθούν οι τιμές των $\kappa, \lambda \in \Re$ για τις οποίες το πολυώνυμο

$$z^2 + \kappa z + \lambda = 0 \tag{3}$$

έχει ρίζα τον μιγαδικό $z_1 = \frac{2-2j}{3+j}$,

Απ.: $\kappa = -\frac{4}{5}, \lambda = \frac{4}{5}$

Άσκηση 6 - Επίλυση εξισώσεων
Να λυθούν οι εξισώσεις

(α') $z^4 = 2 + 2\sqrt{3}j$

(β') $z^* - 2z = 2 - 12j$

(γ') $z^3 + 4\sqrt{2} + j4\sqrt{2} = 0$

Απ.: (α) $z = \sqrt{2}e^{j(6k\pi+\pi)/12}$, $k = 0, 1, 2, 3$, (β) $z = -2 + j4$, (γ) $z = 2e^{j(8k\pi-3\pi)/12}$, $k = 0, 1, 2$

Άσκηση 7 - Euler και De Moivre
Υπολογίστε τους μιγαδικούς

(α') $(1-j)^6$

(β') $(1+j)^4$

(γ') $(1+2j)^2 - (-j)^9$

(δ') $\dfrac{(2-2j)^3}{(1-j)^{12}}$

Απ.: (α) $8j$, (β) -4, (γ) $-3+5j$, (δ) $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}j$

Άσκηση 8 - MATLAB/Octave: τα βασικά
Στο MATLAB/Octave, η χρήση μιγαδικών αριθμών είναι πολύ απλή. Σημειώστε ότι η φανταστική μονάδα $j = \sqrt{-1}$ είναι δεσμευμένη μεταβλητή. Μπορείτε να την κάνετε overwrite με κάποιον άλλο αριθμό αλλά αυτό δε συνίσταται όταν δουλεύετε με μιγαδικούς αριθμούς. Όταν θέλετε πληροφορίες για κάποια έτοιμη συνάρτηση του MATLAB/Octave, γράψτε `help function_name`.

(α') Η συνάρτηση `roots` του MATLAB/Octave υπολογίζει ρίζες πολυωνύμων. Για παράδειγμα, για το πολυώνυμο

$$x^2 + 2x + 1 \tag{4}$$

η σύνταξη είναι

```
roots([1, 2, 1])
```

με τους αριθμούς αυτούς να αποτελούν τους συντελεστές του πολυωνύμου. Βρείτε τις απαντήσεις της Άσκησης 6-(α,γ) με χρήση του MATLAB/Octave. **Παραδώστε τις γραμμές κώδικα που χρησιμοποιήσατε**.

(β') Το MATLAB/Octave μπορεί να εκτελέσει τόσο αριθμητικούς όσο και *συμβολικούς* υπολογισμούς (εν μέρει). Για παράδειγμα, έστω ότι θέλετε να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{z+3}{jz-6} = 2 \tag{5}$$

Στο MATLAB/Octave μπορείτε να δηλώσετε τη μεταβλητή που σας ενδιαφέρει να βρείτε, δηλ. τη z, ως συμβολική γράφοντας

```
syms z
```

και στη συνέχεια να ζητήσετε τη λύση της εξίσωσης ως

```
solve((z+3)/(j*z-6) == 2, z)
```

Το MATLAB/Octave θα πρέπει να σας αποκριθεί ότι $z = -3 - 6j$. Χρησιμοποιήστε το MATLAB/Octave για να λύσετε τις εξισώσεις των Ασκήσεων 1 και 6(α,γ). **Παραδώστε τις γραμμές κώδικα που εκτελεί τη λύση τους**.

(γ') Η απεικόνιση συναρτήσεων στο MATLAB/Octave είναι πολύ εύκολη. Αν για παράδειγμα θέλετε να απεικονίσετε ένα ημίτονο της μορφής

$$x(t) = 2\cos(5\pi t) \tag{6}$$

στο διάστημα $[-1, 1]$, ο παρακάτω κώδικας θα το κάνει για σας.

```
t = -1:0.01:1;                  % Time vector
x = 2*cos(5*pi*t);              % Function
plot(t, x, 'b-'), grid on;      % Visualize
title('A simple sinusoid');     % Make plot pretty
xlabel('Time (s)');             % Make plot pretty
```

Μια μικρή επεξήγηση: δε θα μπορούσαμε να αποθηκεύσουμε *όλες* τις τιμές μιας συνάρτησης συνεχούς χρόνου, καθώς αυτές είναι άπειρες και η χωρητικότητα του υπολογιστή μας πεπερασμένη. Αυτό που κάνουμε στο διάνυσμα `t` είναι να πάρουμε *δείγματα* από το συνεχή άξονα t. Ξεκινάμε από τον αριθμό $t = -1$ και διανύουμε τον άξονα με βήμα $dt = 0.01$, καταλήγοντας τη χρονική στιγμή $t = 1$. Στη συνέχεια ζητάμε από το MATLAB/Octave να υπολογίσει για μας τις τιμές της ημιτονοειδούς συνάρτησης στις χρονικές στιγμές που υπάρχουν στο διάνυσμα `t`. Η συνάρτηση `plot` αναλαμβάνει την απεικόνιση σε γράφημα, ενώ οι υπόλοιπες εντολές είναι διακοσμητικού χαρακτήρα (αλλά πολύ επεξηγηματικές για αυτόν/ήν που διαβάζει το γράφημα).

Τυπώστε στο MATLAB/Octave τις συναρτήσεις

(α') $x(t) = e^{t+2}, \quad t \in [-5, 5]$

(β') $x(t) = \cos(2\pi t) + 3\cos(10\pi t), \quad t \in [-3, 3]$

(γ') $x(t) = t^2 + 3t + 2, \quad t \in [-10, 10]$

(δ') $x(t) = \dfrac{t^2 + \log t}{t^2 - 1}, \quad t \in (0, 5]$

Γράψτε σε σχόλια μέσα στον κώδικα τι παρατηρείτε ότι συμβαίνει στο γράφημα της τελευταίας περίπτωσης. Παραδώστε **υποχρεωτικά** τον κώδικα που τις τυπώνει - τα γραφήματα είναι προαιρετικά.

[⋆] **Άσκηση 9 - MATLAB/Octave: προχωρημένα**
Η απεικόνιση μιγαδικών συναρτήσεων είναι ελαφρά διαφορετική. Δεδομένου ότι οι συναρτήσεις αυτές είναι της μορφής $f : A \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, δεν μπορούμε να τις απεικονίσουμε ρητά - η συνάρτηση είναι τεσσάρων διαστάσεων, εν γένει. Θα απεικονίσουμε είτε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος, είτε το μέτρο και τη φάση τους. Για παράδειγμα, έστω η μιγαδική συνάρτηση

$$f(z) = 3\cos(z) \tag{7}$$

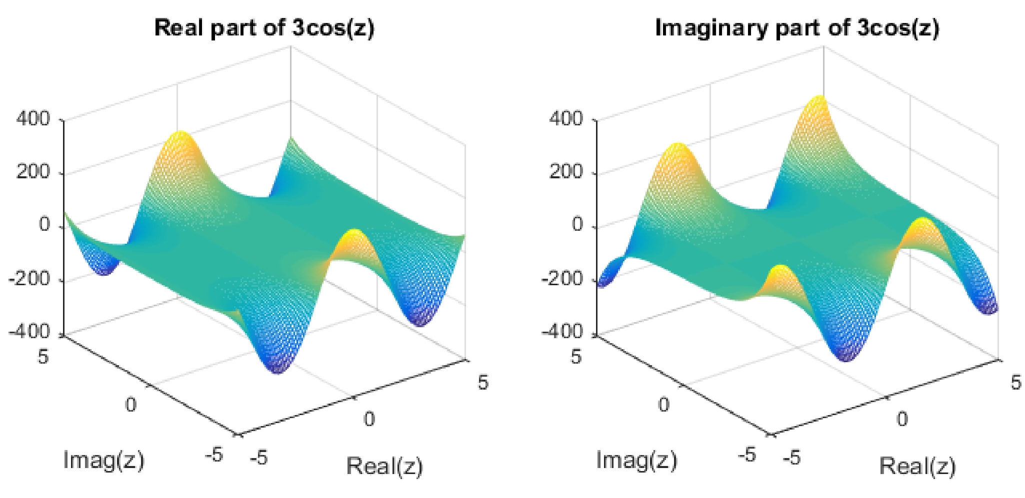
την οποία θέλουμε να απεικονίσουμε στο μιγαδικό επίπεδο, στο "πλέγμα" $[-5, 5] \times [-5, 5]$. Οι παρακάτω εντολές πραγματοποιούν την απεικόνιση του πραγματικού και του φανταστικού μέρους της συνάρτησης.

```
[x,y] = meshgrid(-5:0.1:5, -5:0.1:5);   % Create a complex grid
Z = x+j*y;                              % Create complex number in the grid
f = 3*cos(Z);                           % Create function

subplot(121);                           % Split a plot into two parts (1st part)
mesh(x,y, real(f));                     % Plot the real part
title('Real part of 3cos(z)');          % Make plot pretty
xlabel('Real(z)');                      % Make plot pretty
ylabel('Imag(z)');                      % Make plot pretty

subplot(122);                           % Split a plot into two parts (2nd part)
mesh(x,y, imag(f));                     % Plot the imaginary part
title('Imaginary part of 3cos(z)');     % Make plot pretty
xlabel('Real(z)');                      % Make plot pretty
ylabel('Imag(z)');                      % Make plot pretty
```

Το αποτέλεσμα που θα πάρετε πρέπει να είναι όπως στο Σχήμα 1. Χρησιμοποιήστε τις συναρτήσεις `abs` και



Σχήμα 1: *Πραγματικό και φανταστικό μέρος συνάρτησης.*

`angle` του MATLAB/Octave για να απεικονίσετε το μέτρο $|f(z)|$ και τη φάση $\phi(z)$ της παραπάνω συνάρτησης στο ίδιο πεδίο ορισμού. Επιπλέον, σχεδιάστε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της συνάρτησης $f(z) = e^z$ στο "πλέγμα" $[-1, 1] \times [-10, 10]$. **Παραδώστε μόνο τον κώδικα που εκτελεί τις απεικονίσεις**.