ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2018-19
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων

Οι ασκήσεις με [$\star$] είναι **bonus**, $+10$ μονάδες η καθεμία στο βαθμό αυτής της σειράς ασκήσεων (δηλ. μπορείτε να πάρετε μέχρι $90/70$ σε αυτή τη σειρά.)

Άσκηση 1 - Μιγαδικές Εξισώσεις Ι

(α΄)

$$\frac{2-jz}{j+z}=1 \iff \frac{2-j(x+jy)}{j+x+jy}=1 \iff 2-jx-j^2y=x+j(y+1) \iff 2+y-jx=x+j(y+1) \tag{1}$$

$$\iff \begin{cases} 2+y &= x \\ -x &= y+1 \end{cases} \iff \begin{cases} y &= -\frac{3}{2} \\ x &= \frac{1}{2} \end{cases} \tag{2}$$

(β΄)

$$\frac{2z+8}{z+5}=j \iff 2(x+jy)+8=j(x+jy+5) \iff 2x+8+j2y=-y+j(5+x) \tag{3}$$

$$\iff \begin{cases} 2x+8 &= -y \\ 2y &= x+5 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= -\frac{21}{5} \\ y &= \frac{2}{5} \end{cases} \tag{4}$$

Άσκηση 2 - Μιγαδικές Εξισώσεις ΙΙ

(α΄) Για $z=x+jy$ έχουμε

$$(1+j)(z+z^*)+(2-j)(z+2z^*)=1 \iff (1+j)2\mathrm{Re}\{z\}+(2-j)(2\mathrm{Re}\{z\}+z^*)=1 \tag{5}$$

$$\iff (1+j)2x+(2-j)(3x-jy)=1 \tag{6}$$

$$\iff 2x+j2x+6x-j2y-j3x-y=1 \tag{7}$$

$$\iff (8x-y)+j(-2y-x)=1 \tag{8}$$

$$\iff \begin{cases} 8x-y &= 1 \\ -x-2y &= 0 \end{cases} \tag{9}$$

$$\iff \begin{cases} x &= -\frac{2}{17} \\ y &= -\frac{1}{17} \end{cases} \tag{10}$$

(β΄) Είναι

$$\frac{(3+4j)^2}{1-2j}=z+j \iff (3+4j)^2=(z+j)(1-2j) \tag{11}$$

$$\iff 9+j24-16=(x+j(y+1))(1-2j) \tag{12}$$

$$\iff -7+j24=x-j2x+j(y+1)+2(y+1)) \tag{13}$$

$$\iff -7+j24=(x+2y+2)+j(y+1-2x) \tag{14}$$

$$\iff \begin{cases} x+2y+2 &= -7 \\ y+1-2x &= 24 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= -11 \\ y &= 1 \end{cases} \tag{15}$$

Άσκηση 3 - Γεωμετρικοί Τόποι Ι

(α') $\mathrm{Re}\{z\} = 2 \iff x = 2$, άρα μια ευθεία $x = 2$.

(β') $|z - 4 + j7| = 2 \iff |x + jy - 4 + j7|^2 = 4 \iff (x-4)^2 + (y+7)^2 = 4$, άρα πρόκειται για κύκλο με κέντρο το σημείο $(4, -7)$ και ακτίνα 2.

(γ') $\angle(z+1) = \dfrac{\pi}{3} \iff \angle((x+1)+jy) = \dfrac{\pi}{3} \iff \dfrac{y}{x+1} = \tan(\pi/3) = \sqrt{3} \iff y = \sqrt{3}(x+1)$, με $y > 0$, γιατί η γωνία $\pi/3$ βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο, που το y είναι θετικό.

(δ') $\left|\dfrac{z-3}{z+j}\right| = 1 \iff |z-3|^2 = |z+j|^2 \iff (x-3)^2+y^2 = x^2+(y-1)^2$, οπότε $-6x+9 = 2y+1 \iff y = -3x+4$

[⋆] **Άσκηση 4 - Γεωμετρικοί Τόποι ΙΙ**

(α') Αν $|z| = 1$, έχουμε

$$w = \frac{5zj + j}{z+1} \iff z(w - 5j) = j - w \iff z = \frac{j - w}{w - j5} \tag{16}$$

οπότε

$$|z| = \frac{|j-w|}{|w-j5|} = 1 \iff |j - w| = |w - j5| \iff |j - (x+jy)|^2 = |x + jy - j5|^2 \tag{17}$$

$$\iff x^2 + (1-y)^2 = x^2 + (y-5)^2 \iff 1 - 2y + y^2 = y^2 - 10y + 25 \tag{18}$$

$$\iff y = 3, \;\; x \in \Re \tag{19}$$

άρα ο γεωμετρικός τόπος των w είναι η ευθεία $y = 3$.

(β') Αν $|z| = 2$, έχουμε

$$w = \frac{1}{2}z + j \iff 2w = z + 2j \iff z = 2(w - j) \tag{20}$$

οπότε

$$|z| = 2|w - j| \iff 4 = 4|x + jy - j|^2 \iff 4 = 4(x^2 + (y-1)^2) \iff x^2 + (y-1)^2 = 1 \tag{21}$$

άρα ο γεωμετρικός τόπος των w είναι ο κύκλος με ακτίνα 1 και κέντρο το σημείο $(0, 1)$.

Άσκηση 5 - Ρίζες πολυωνύμων

Ο μιγαδικός $z_1 = \frac{2-2j}{3+j}$ γράφεται ως

$$z_1 = \frac{(2-2j)(3-j)}{|3+j|^2} = \frac{6 - 2j - 6j - 2}{10} = \frac{4}{10} + j\frac{-8}{10} = \frac{2}{5} - j\frac{4}{5} \tag{22}$$

Αφού οι συντελεστές του πολυωνύμου

$$z^2 + \kappa z + \lambda = 0 \tag{23}$$

είναι πραγματικοί αριθμοί, οι ρίζες του πολυωνύμου πρέπει να είναι συζυγείς, εφ'οσον μια από τις δυο είναι μιγαδική. Άρα

$$z_2 = z_1^* = \frac{2}{5} + j\frac{4}{5} \tag{24}$$

Γνωρίζουμε ότι

$$z_1 + z_2 = -\kappa \tag{25}$$

$$z_1 z_2 = \lambda \tag{26}$$

δηλ.

$$z_1 + z_1^* = -\kappa \Longleftrightarrow 2\mathrm{Re}\{z_1\} = -\kappa \Longleftrightarrow \frac{4}{5} = -\kappa \Longleftrightarrow \kappa = -\frac{4}{5} \tag{27}$$

$$z_1 z_1^* = \lambda \Longleftrightarrow |z_1|^2 = \lambda \Longleftrightarrow \lambda = (2/5)^2 + (4/5)^2 = \frac{4}{5} \tag{28}$$

Άσκηση 6 - Επίλυση εξισώσεων

(α') $z^4 = 2 + 2\sqrt{3}j$:

$$z^4 = |2 + 2\sqrt{3}|e^{j\tan^{-1}\frac{2\sqrt{3}}{2}} = 16e^{j\tan^{-1}\sqrt{3}} \Longleftrightarrow |z|^4 e^{j4\theta} = 16e^{j\tan^{-1}\sqrt{3}} \tag{29}$$

οπότε

$$z = \left\{ \begin{array}{ll} |z| & = 16^{\frac{1}{4}} \\ 4\theta & = 2k\pi + \tan^{-1}\sqrt{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{3}, \;\; k = 0,1,2,3 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} |z| & = \sqrt{2} \\ \theta & = \frac{1}{4}\frac{6k\pi+\pi}{3} = \frac{6k\pi+\pi}{12}, \;\; k = 0,1,2,3 \end{array} \right. \tag{30}$$

(β') $z^* - 2z = 2 - 12j$:

$$z^* - 2z = 2 - 12j \Longleftrightarrow x - jy - 2(x + jy) = 2 - j12 \Longleftrightarrow -x - j3y = 2 - j12 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x & = -2 \\ y & = 4 \end{array} \right. \tag{31}$$

άρα $z = -2 + j4$

(γ') $z^3 + 4\sqrt{2} + j4\sqrt{2} = 0$:

$$z^3 = -4\sqrt{2} - j4\sqrt{2} = 8e^{-j\frac{3\pi}{4}} \Longleftrightarrow |z|^3 e^{j3\theta} = 8e^{-j\frac{3\pi}{4}} \tag{32}$$

οπότε

$$z = \left\{ \begin{array}{ll} |z| & = 8^{\frac{1}{3}} \\ 3\theta & = 2k\pi - \frac{3\pi}{4}, \;\; k = 0,1,2 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} |z| & = 2 \\ \theta & = \frac{1}{3}\frac{8k\pi-3\pi}{4} = \frac{8k\pi-3\pi}{12}, \;\; k = 0,1,2 \end{array} \right. \tag{33}$$

Άσκηση 7 - Euler και De Moivre

(α') $(1-j)^6 = (\sqrt{2}e^{-j\pi/4})^6 = \sqrt{2}^6 e^{-j6\pi/4} = 8e^{-j\frac{8\pi-2\pi}{4}} = 8e^{j\pi/2} = j8$

(β') $(1+j)^4 = (\sqrt{2}e^{j\pi/4})^4 = \sqrt{2}^4 e^{j4\pi/4} = 4e^{j\pi} = -4$

(γ') $(1+2j)^2 - (-j)^9 = (1 + 4j - 4) - (-j)(-j)^8 = (-3+4j) - (-j)((-j)^2)^4 = -3 + j4 - (-j) = -3 + j5$

(δ') $\dfrac{(2-2j)^3}{(1-j)^{12}} = 2^3\dfrac{(1-j)^3}{(1-j)^{12}} = 8(1-j)^{-9} = \dfrac{8}{16\sqrt{2}}e^{-j9\pi/4} = \dfrac{8}{16\sqrt{2}}e^{j\pi/4} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\dfrac{\sqrt{2}}{2} + j\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{4} + j\dfrac{1}{4}$

Άσκηση 8 - MATLAB/Octave: τα βασικά
Κώδικας.

[$\star$] **Άσκηση 9 - MATLAB/Octave: προχωρημένα**
Κώδικας.