ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2017-18
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Έκτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 28/4/2018 Ημερομηνία Παράδοσης: 8/5/2018

Οι ασκήσεις με [$\star$] είναι **bonus**, $+10$ μονάδες η καθεμία στο βαθμό αυτής της σειράς ασκήσεων (δηλ. μπορείτε να πάρετε μέχρι $110/70$ σε αυτή τη σειρά.)

Άσκηση 1 - Διαφορικές Εξισώσεις και Μετασχ. Laplace

Θεωρήστε ένα ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \frac{d}{dt}y(t) - 2y(t) = x(t) \tag{1}$$

(α΄) Βρείτε την αλγεβρική μορφή της συνάρτησης μεταφοράς $H(s)$.

(β΄) Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος για τις ακόλουθες περιπτώσεις:

i. το σύστημα είναι αιτιατό

Απ.: $h(t) = -\frac{1}{3}(e^{-2t} - e^{t})u(t)$

ii. το σύστημα είναι ευσταθές

Απ.: $h(t) = -\frac{1}{3}e^{-2t}u(t) - \frac{1}{3}e^{t}u(-t)$

iii. το σύστημα δεν είναι ούτε ευσταθές, ούτε αιτιατό

Απ.: $h(t) = \frac{1}{3}e^{-2t}u(-t) - \frac{1}{3}e^{t}u(-t)$

[$\star$] Άσκηση 2 - Αντίστροφος μετασχ. Laplace

Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Laplace του συστήματος

$$H(s) = \frac{2 + 2se^{-2s} + 4e^{-4s}}{s^2 + 4s + 3} \tag{2}$$

έτσι ώστε το σύστημα να είναι ευσταθές και αιτιατό.

Hint: Λάβετε υπόψη σας την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης.

Απ.: $h(t) = (e^{-t} - e^{-3t})u(t) + [-e^{-(t-2)} + 3e^{-3(t-2)}]u(t-2) + 2[e^{-(t-4)} - e^{-3(t-4)}]u(t-4)$

Άσκηση 3 - Μετασχ. Laplace και Συστήματα

Ένα ΓΧΑ σύστημα περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{2(s+1)}{(s+2)(s+\frac{1}{3})} \tag{3}$$

(α΄) Σχεδιάστε *όλους* τους πόλους και *όλα* τα μηδενικά της συνάρτησης μεταφοράς.

(β΄) Βρείτε την κρουστική απόκριση, $h(t)$, του συστήματος, αν γνωρίζετε ότι το σύστημα είναι *ευσταθές και αιτιατό.*

Απ.: $h(t) = \frac{6}{5}e^{-2t}u(t) + \frac{4}{5}e^{-t/3}u(t)$

(γ') Μπορείτε να υπολογίσετε το μετασχ. Fourier, $H(f)$, του συστήματος μέσω του μετασχ. Laplace; Αν ναι, εξηγήστε και βρείτε τον. Αν όχι, εξηγήστε γιατί.

(δ') Αν στο σύστημα παρουσιαστεί η είσοδος $x(t) = 2e^{-3t}u(t)$, τότε βρείτε την έξοδο $y(t)$.

$$\text{Απ.: } y(t) = \frac{12}{5}e^{-2t}u(t) - 3e^{-3t}u(t) + \frac{3}{5}e^{-t/3}u(t)$$

(ε') Για ποιά είσοδο $x(t)$, το σύστημα δίνει έξοδο $y(t) = \delta(t)$;

$$\text{Απ.: } x(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\delta(t) + \frac{2}{3}\delta(t) - \frac{1}{3}e^{-t}u(t)$$

(ϛ') Βρείτε μια διαφορική εξίσωση η οποία περιγράφει το παραπάνω σύστημα $H(s)$.

$$\text{Απ.: } \frac{d^2}{dt^2}y(t) + \frac{7}{3}\frac{d}{dt}y(t) + \frac{2}{3}y(t) = 2\frac{d}{dt}x(t) + 2x(t)$$

[⋆] Άσκηση 4 - Διαφορικές Εξισώσεις και μετασχ. Laplace

Ένα *αιτιατό* ΓΧΑ σύστημα περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \frac{3}{2}\frac{d}{dt}y(t) + \frac{1}{2}y(t) = \frac{1}{4}x(t) + \frac{d}{dt}x(t) \tag{4}$$

(α') Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος, $H(s)$, και προσδιορίστε το πεδίο σύγκλισης.

$$\text{Απ.: } H(s) = \frac{s + \frac{1}{4}}{(s+1)(s+\frac{1}{2})}, \quad \Re\{s\} > -\frac{1}{2}$$

(β') Σχεδιάστε τους πόλους και τα μηδενικά του συστήματος, καθώς και το πεδίο σύγκλισης στο s-επίπεδο. Είναι το σύστημα ευσταθές;

(γ') Υπολογίστε την κρουστική απόκριση του συστήματος, $h(t)$.

$$\text{Απ.: } h(t) = (\frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-t/2})u(t)$$

(δ') Αν οι αρχικές συνθήκες δεν είναι μηδενικές, αλλά ίσες με $y(0^-) = 1$, $\frac{d}{dt}y(t)\Big]_{t=0^-} = 0$, τότε βρείτε την έξοδο του συστήματος για είσοδο $x(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$.

$$\text{Απ.: } y(t) = \Big(\frac{7}{6}e^{-2t} - \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{4}{3}e^{-t/2} + \frac{3}{2}te^{-t}\Big)u(t)$$

Άσκηση 5 - Μετασχ. Laplace και Ηλεκτρικά Κυκλώματα

Έστω το RC κύκλωμα του Σχήματος 1 που θεωρείται ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα. Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ και την κρουστική απόκριση $h(t)$ του κυκλώματος αν

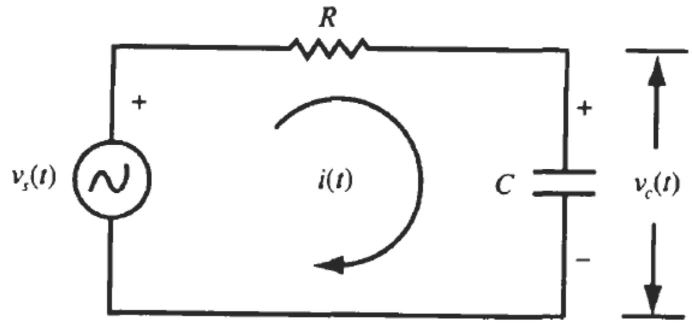
(α') $x(t) = u_s(t)$, και $y(t) = u_c(t)$

(β') $x(t) = u_s(t)$, και $y(t) = i(t)$

<u>Hint</u>: Οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν το κύκλωμα στις δυο περιπτώσεις είναι οι

$$\text{(α)} \quad \frac{d}{dt}y(t) + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t) \tag{5}$$

$$\text{(β)} \quad \frac{d}{dt}y(t) + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{R}\frac{d}{dt}x(t) \tag{6}$$



Σχήμα 1: *Σχήμα Άσκησης 5.*

Απ.: (α) $h(t) = \frac{1}{RC}e^{-t/RC}u(t)$,
(β) $h(t) = \frac{1}{R}\delta(t) - \frac{1}{R^2C}e^{-t/RC}u(t)$

Άσκηση 6 - Εύρεση Μετασχ. Laplace από στοιχεία
Για να βρούμε το μετασχηματισμό Laplace $H(s)$ ενός *αιτιατού* συστήματος μας δίνουν τα παρακάτω στοιχεία:

- Έχει δυο πόλους και δυο μηδενικά, με έναν πόλο στο $s = 2$ κι ένα μηδενικό στο $s = -2$.
- Το δεύτερο μηδενικό είναι το μοναδικό μηδενικό του συστήματος $W(s) = \dfrac{s^2 + 5s + 6}{s + 2}$.
- Ισχύει $H(0) = \infty$.

Βρείτε το $H(s)$ και την κρουστική απόκριση $h(t)$. Είναι το σύστημα ευσταθές;

Απ.: $H(s) = \dfrac{s^2 + 5s + 6}{s^2 - 2s}$, $\quad h(t) = \delta(t) + 10e^{2t}u(t) - 3u(t)$

Άσκηση 7 - Συστήματα Ελάχιστης Φάσης και All-pass
Έστω το ευσταθές και αιτιατό σύστημα

$$H(s) = \frac{s^2 - s - 2}{s^3 + 3s^2 + \frac{5}{2}s + 1} \tag{7}$$

(α΄) Βρείτε το πεδίο σύγκλισης.
Hint: Δοκιμάστε πρώτα ένα σχήμα Horner με απλές, μικρές ακέραιες τιμές για να βρείτε τη μια ρίζα.

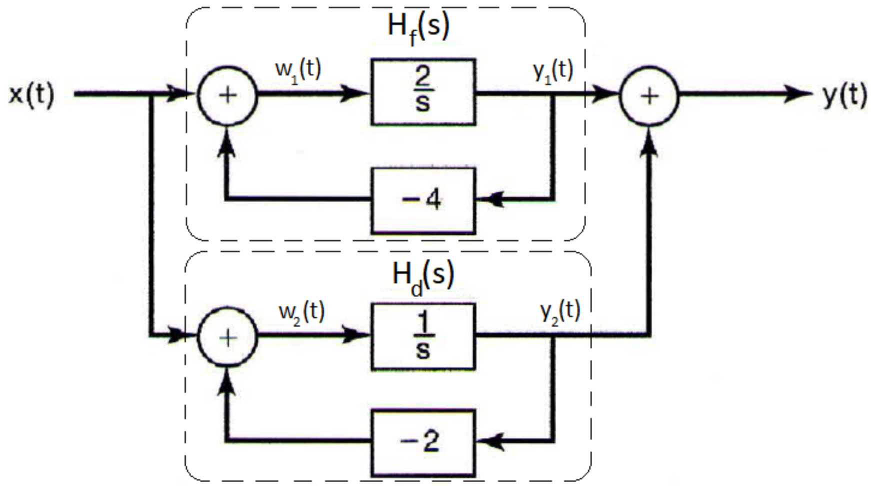
Απ.: $\Re\{s\} > -\frac{1}{2}$

(β΄) Το σύστημα αυτό αντιστοιχεί στα χαρακτηριστικά ενός καναλιού/μέσου μετάδοσης ραδιοφωνικού σήματος. Αν ο πομπός στέλνει το σήμα $x(t)$, ο δέκτης λαμβάνει το σήμα

$$y(t) = x(t) * h(t) \longleftrightarrow Y(s) = X(s)H(s) \tag{8}$$

Μπορείτε να ακυρώσετε *πλήρως* την επίδραση του καναλιού επάνω στο σήμα που λαμβάνει ο δέκτης χρησιμοποιώντας ένα ευσταθές και αιτιατό σύστημα της επιλογής σας; Αν ναι, εξηγήστε. Αν όχι, περιγράψτε *πλήρως*, βρίσκοντας την κρουστική του απόκριση $h_{new}(t)$, ένα σύστημα που θα μπορέσει *μερικώς* να ακυρώσει κάποιου είδους πληροφορία του καναλιού. Εξηγήστε όλα τα βήματά σας.

Άσκηση 8 - Διατάξεις Συστημάτων
Ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα έχει διαταχθεί όπως στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: *Σχήμα Άσκησης 8.*

Βρείτε μια διαφορική εξίσωση που να σχετίζει την είσοδο $x(t)$ με την έξοδο $y(t)$.
Hint:

(α΄) Διαχωρίστε το σύστημα σε δυο μικρότερα υποσυστήματα $h_1(t)$, $h_2(t)$, σε *παράλληλη* σύνδεση. Για κάθε μικρότερο υποσύστημα $h_i(t)$, χρησιμοποιήστε μια ενδιάμεση μεταβλητή $w_i(t)$, η οποία θα είναι έξοδος του πρώτου αθροιστή και είσοδος του επόμενου συστήματος ($h_f(t)$ στο πρώτο υποσύστημα, $h_d(t)$ στο δεύτερο υποσύστημα). Γράψτε τις *δυο* σχέσεις που περιγράφουν κάθε υποσύστημα $h_i(t)$ στο πεδίο του χρόνου. Στη μια εξίσωση, το αριστερό μέλος θα είναι $w_i(t)$, και στην άλλη θα είναι $y_i(t)$, δηλ.

$$w_i(t) = f\{x(t), h_f(t), w_i(t)\} \tag{9}$$
$$y_i(t) = f\{h_d(t), w_i(t)\} \tag{10}$$

με $f\{\cdot\}$ να συμβολίζει τη σχέση συνάρτησης και $w_i(t)$, $y_i(t)$, $i = 1, 2$ η ενδιάμεση μεταβλητή και η έξοδος του κάθε υποσυστήματος, αντίστοιχα. Τα συστήματα με αριθμούς -4 και -2 απλώς πολλαπλασιάζουν την είσοδό τους με τον αντίστοιχο αριθμό.

(β΄) Μεταφέρετε τις σχέσεις στο χώρο του Laplace και χρησιμοποιήστε τις μαζί, λύστε ως προς $H_1(s)$, $H_2(s)$, συνδυάστε τα κατάλληλα, και επιστρέψτε πίσω στο πεδίο του χρόνου.

Απ.: $\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 10\frac{d}{dt}y(t) + 16y(t) = 12x(t) + 3\frac{d}{dt}x(t)$

[⋆] Άσκηση 9 - Φιλτράρισμα στο MATLAB
Γνωρίζετε το περίφημο πλέον ζεύγος μετασχηματισμού Fourier

$$A\mathrm{rect}\Big(\frac{t}{T}\Big) \longleftrightarrow AT\mathrm{sinc}(fT) \tag{11}$$

Από την ιδιότητα της στάθμισης στο πεδίο του χρόνου, γνωρίζετε την επιρροή του τετραγωνικού παλμού στο χώρο του χρόνου, και πως η διάρκειά του επηρεάζει το χώρο της συχνότητας. Θα ήταν ενδιαφέρον να δούμε τη σχέση αυτή αντίστροφα, δηλ. με τον τετραγωνικό παλμό στο πεδίο της συχνότητας. Ας θεωρήσουμε λοιπόν τον τετραγωνικό παλμό στο χώρο της συχνότητας ως

$$H(f) = \mathrm{rect}\Big(\frac{f}{T}\Big) \tag{12}$$

και ας τον θεωρήσουμε ως ένα σύστημα, που μπορεί να δέχεται εισόδους και να παράγει εξόδους. Προφανώς, λόγω της ιδιότητας της δυικότητας, η έκφραση του συστήματος - δηλ. η *κρουστική απόκριση* - στο χώρο του χρόνου θα είναι

$$h(t) = T\mathrm{sinc}(Tt) \tag{13}$$

Ο τετραγωνικός παλμός θα λειτουργήσει ως συχνοτικό *φίλτρο*, το οποίο θα επιτρέπει τη διέλευση των συχνοτήτων που βρίσκονται εντός του διαστήματος που είναι μη μηδενικός. Το πλάτος αυτών των συχνοτήτων θα είναι μοναδιαίο. Επίσης, θα αποκόπτει τις συχνότητες που θα βρίσκονται εκτός αυτού του διαστήματος. Γιατί όμως θα έχει αυτή τη συμπεριφορά; Γιατί όπως ξέρετε (ΠΛΕΟΝ), η σχέση εισόδου-εξόδου ενός συστήματος στο χώρο της συχνότητας εκφράζεται με τη σχέση του *γινομένου* των μετασχηματισμών Fourier της εισόδου και του συστήματος. Άρα στην περίπτωσή μας, αφού ο τετραγωνικός παλμός έχει μοναδιαίο πλάτος στο διάστημα $f \in [-T/2, T/2]$ (στη συχνότητα δηλαδή!), η έξοδος στο χώρο του μετασχ. Fourier για κάθε είσοδο θα είναι.

$$Y(f) = X(f)H(f) = \begin{cases} X(f), & |f| \leq \frac{T}{2} \\ 0, & |f| > \frac{T}{2} \end{cases} \tag{14}$$

Ας δοκιμάσουμε το νέο φίλτρο μας.

(α΄) Υλοποιήστε στο MATLAB ένα σήμα ως άθροισμα από τρια ημίτονα, με συχνότητες $f_1 = 200, f_2 = 600, f_3 = 750$ Hz, με πλάτη και φάσεις της επιλογής σας. Σας δίνονται οι εντολές:

```
Dt = 0.0001;
t = -1:Dt:1;
Df = 1;
f = -1500:1500;
f1 = 200;
f2 = 600;
f3 = 750;
A1 = % INSERT CODE HERE
A2 = % INSERT CODE HERE
A3 = % INSERT CODE HERE
phi1 = % INSERT CODE HERE
phi2 = % INSERT CODE HERE
phi3 = % INSERT CODE HERE
x = [A1 A2 A3]*cos(2*pi*[f1 f2 f3]'*t + [phi1 phi2 phi3]'*ones(size(t)));
```

(β΄) Τυπώστε και παραδώστε τα τρια γραφήματα που σας επιστρέφει η συνάρτηση `ctft` (την οποία κατεβάζετε από το site του μαθήματος) για το σήμα `x`. Γράψτε `doc ctft` για να δείτε τη σύνταξη. Είναι ίδιο με αυτό που θεωρητικά αναμένατε; (αν εξαιρέσετε τα σφάλματα στα πλάτη του μετασχηματισμού)

(γ΄) Υλοποιήστε το φίλτρο σας στο *χρόνο*, δηλ. υλοποιήστε την κρουστική απόκριση $h(t)$. Το MATLAB έχει έτοιμη συνάρτηση `sinc`. Για να την υλοποιήσετε, χρειάζεστε την παράμετρο T:

  i. Βρείτε στο χαρτί και ορίστε την παράμετρο T να είναι τέτοια ώστε αν δοθεί στο σύστημα η είσοδος `x` που δημιουργήσατε, να μένει στην έξοδο μόνο το ημίτονο των 200 Hz. Εφαρμόστε το φίλτρο στο σήμα σας με χρήση της συνάρτησης `conv`, που όπως θυμάστε, πραγματοποιεί τη συνέλιξη μεταξύ των δυο σημάτων που δέχεται ως όρισμα. Θυμίζεται ότι για σήματα συνεχούς χρόνου η συνέλιξη υλοποιείται ως `y = Dt*conv(x,h);` . Τυπώστε και παραδώστε τα γραφήματα της εξόδου `y`, με χρήση της `ctft`. Ακούστε το αποτέλεσμα με την εντολή `soundsc(y,1/Dt);` .

  ii. Επαναλάβατε όλα τα παραπάνω με T τέτοιο ώστε να μένουν στην έξοδο μόνο τα ημίτονα των 200 και 600 Hz.

  iii. Επαναλάβατε όλα τα παραπάνω με T τέτοιο ώστε να μένουν όλα τα ημίτονα στην έξοδο.

iv. Επαναλάβατε όλα τα παραπάνω με T τέτοιο ώστε να μη μένει κανένα ημίτονο στην έξοδο! Παρατηρείτε κάτι περίεργο στο φάσμα πλάτους; Εξηγήστε, προσέχοντας την κλίμακα πλάτους του μετασχηματισμού.

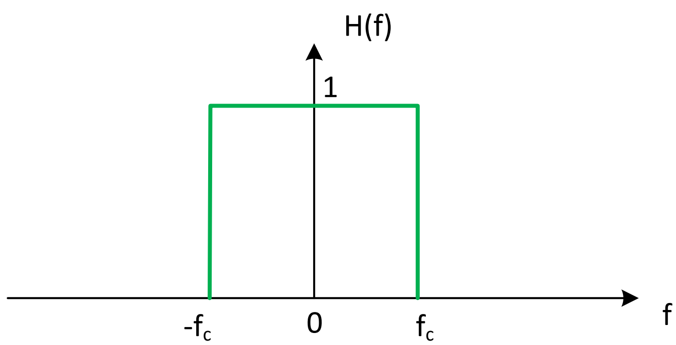
(δ') Υλοποιήστε το φίλτρο σας στη *συχνότητα*, δηλ. αντι να κάνετε συνέλιξη στο χρόνο υλοποιήστε το ισοδύναμό της στη συχνότητα, δηλ. το *γινόμενο* των μετασχηματισμών Fourier! Η συνάρτηση `ctft` επιστρέφει ως όρισμα εξόδου το μετασχηματισμό Fourier του σήματος που της δίνετε. Χρησιμοποιήστε τον τελεστή `.*` του MATLAB για να υλοποιήσετε το γινόμενο των μετασχηματισμών. Παραδώστε *μόνο* τον κώδικα που υλοποιεί το φιλτράρισμα στη συχνότητα για κάθε περίπτωση από τις παραπάνω.

Παραδώστε κώδικα MATLAB που υλοποιεί τα ερωτήματα παραπάνω, όποια plots σας ζητούνται στα υποερωτήματα, καθώς και τις απαντήσεις στις θεωρητικές ερωτήσεις σε ξεχωριστό χαρτί ή σε σχόλια στον κώδικα MATLAB.

Άσκηση 10 - Σχεδίαση χαμηλοπερατού (lowpass) φίλτρου - MATLAB

Εργάζεστε σε μια από τις πρώτες εταιρίες κινητής τηλεφωνίας, και το πόστο σας είναι "μηχανικός σχεδίασης φίλτρων". Ο προϊστάμενός σας συγκαλεί σύσκεψη στην οποία αποφασίζεται ότι εσείς πρέπει να αναπτύξετε και να σχεδιάσετε ένα σύστημα με απόκριση συχνότητας $H(f)$ για εφαρμογές επικοινωνίας φωνής, το οποίο θα αποκόπτει τις συχνότητες μεγαλύτερες από κάποιο δοθέν f_c (η οποία λέγετα *συχνότητα αποκοπής - cut-off frequency*) ενώ θα κρατά όσο γίνεται ανέπαφες τις συχνότητες μικρότερες από f_c. Τέτοια συστήματα ονομάζονται *φίλτρα*, και για αυτήν την άσκηση θα αποκαλούμε έτσι το σύστημά μας.

Ο προϊστάμενός σας, που δε γνωρίζει θεωρία σημάτων και συστημάτων, σας παραδίδει την απόκριση συχνότητας $H(f)$ που θέλει να φτιάξετε, στο Σχήμα 3, και σας αναφέρει ότι το ζητούμενο f_c ισούται με $f_c = 2000$ Hz, αφού το φίλτρο θα ενσωματωθεί σε στρατιωτικά ασύρματα τηλεφωνικά συστήματα, όπου το εύρος ζώνης επικοινωνίας - και το κόστος λειτουργίας (έχουμε κρίση! :-)) είναι περιορισμένο.



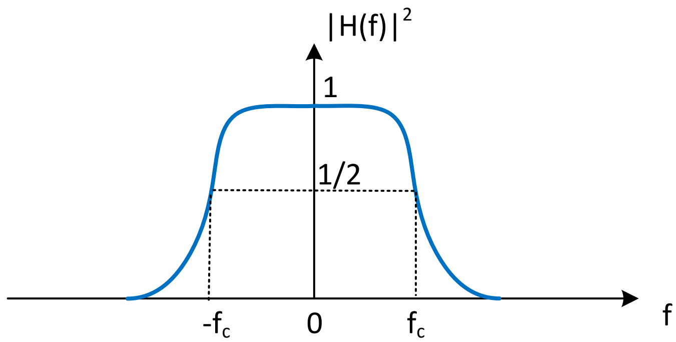
Σχήμα 3: *Φίλτρο $H(f)$ που θέλει ο προϊστάμενος.*

(α') Αποδείξτε του ότι η κρουστική απόκριση $h(t)$ του ζητούμενου φίλτρου είναι άπειρης διάρκειας και μη-αιτιατή, με αποτέλεσμα το φίλτρο που σας ζήτησε να μην είναι υλοποιήσιμο στην πράξη.

(β') Αφού τον πείσατε για την ορθότητα του παραπάνω ερωτήματος, σας αναθέτει να υλοποιήσετε ένα φίλτρο που να πλησιάζει όσο γίνεται αυτό που σας ζήτησε αρχικά, και να είναι υλοποιήσιμο. Στην προσπάθειά σας αυτή, ένας μαθηματικός φίλος σας αναφέρει ότι έχει υπόψη του μια συνάρτηση η οποία να πλησιάζει το ζητούμενο φίλτρο σας, και την οποία σχεδιάζει πρόχειρα στο χαρτί, όπως στο Σχήμα 4. Η συνάρτηση ονομάζεται *συνάρτηση Butterworth*. Μη έχοντας καλύτερη εναλλακτική, του ζητάτε να σας δώσει τη μαθηματική περιγραφή της συνάρτησης. Σας δίνει μια περιγραφή στο χώρο της συχνότητας που βρήκε σε κάποιο μαθηματικό εγχειρίδιο, ως

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{j2\pi f}{j2\pi f_c}\right)^{2N}} \tag{15}$$

με N την τάξη της συνάρτησης, όπως σας ανέφερε. Μετατρέψτε τη συνάρτηση αυτή στο χώρο του μετασχ. Laplace, θέτοντας $s = j2\pi f$.



Σχήμα 4: *Συνάρτηση Butterworth.*

(γ') Θέλετε να μελετήσετε τη συμπεριφορά του φίλτρου - όπως το ονομάζετε πλέον - Butterworth, για να την κατανοήσετε καλύτερα. Βρείτε και σχεδιάστε τους πόλους του $|H(s)|^2$ στο s-επίπεδο.

Απ.: $s_k = 2\pi f_c e^{j\pi \frac{2k+N-1}{2N}}, \;\; k = 0, 1, 2, \cdots, 2N-1$

(δ') Γνωρίζετε από τη θεωρία σας ότι επειδή το φίλτρο σας είναι πραγματικό σήμα στο χρόνο, θα ισχύει

$$|H(f)|^2 = H(f)H^*(f) = H(f)H(-f) = H(s)H(-s)\Big|_{s=j2\pi f} \tag{16}$$

Επιλέξτε από τους πόλους που σχεδιάσατε ένα υποσύνολο πόλων ώστε το σύστημα που θα προκύψει από αυτά να είναι *ευσταθές και αιτιατό*. Προσέξτε ότι αν s_p είναι ένας πόλος του $H(s)$, τότε το $-s_p$ είναι πόλος του $H(-s)$.

(ε') Προσέξτε επίσης ότι $H(s)H(-s)\Big|_{s=0} = 1$. Υπολογίστε το $H(s)$ για $N = 1$ και $N = 2$.

Απ.: $H_{N=1}(s) = \dfrac{1}{s + 2\pi f_c}, \;\; H_{N=2}(s) = \dfrac{1}{(s - 2\pi f_c e^{j3\pi/4})(s - 2\pi f_c e^{j5\pi/4})}$

(ϛ') Βρείτε τη διαφορική εξίσωση *τρίτης τάξης* που περιγράφει ένα φίλτρο Butterworth με συχνότητα αποκοπής $f_c = \frac{1}{2\pi}$ Hz.

Απ.: $\dfrac{d^3}{dt^3}y(t) + 2\dfrac{d^2}{dt^2}y(t) + 2\dfrac{d}{dt}y(t) + y(t) = x(t)$

(ζ') Υλοποιήστε στο MATLAB την απόκριση φάσματος $|H(f)|$ του φίλτρου για $f_c = 2000$ Hz, δειγματοληπτώντας έναν άξονα συχνοτήτων $[-8000, 8000]$ ανά $Df = 1$ Hz, για $N = 6$, $N = 16$, και $N = 46$. Η εντολή `plot` θα σας δώσει, ως γνωστόν, τη γραφική παράσταση. Χρησιμοποιήστε την εντολή `hold on` για να τυπώσετε το ένα πάνω στο άλλο, και να παραδώσετε μαζί εκτυπωμένα τα φίλτρα σας. Η συνάρτηση `legend` θα σας βοηθήσει να κάνετε το γράφημά σας πιο περιγραφικό. Περιγράψτε τι επιρροή έχει η τάξη N του φίλτρου στο φάσμα πλάτους του γενικά, και γύρω από τη συχνότητα f_c ειδικά.

(η') Προτού παραδώσετε το φίλτρο σας στον προϊστάμενό σας ώστε να υλοποιηθεί σε κύκλωμα, θέλετε να βεβαιωθείτε ότι λειτουργεί όπως πρέπει, εξομοιώνοντάς το στο MATLAB και βάζοντας ως είσοδο μια τυπική στρατιωτική διαταγή, δωρεά του Υπουργείου Άμυνας. Θα τη βρείτε στο αρχείο military.wav, στο site του μαθήματος.

Φορτώστε το αρχείο στο MATLAB με τη - γνωστή πια - εντολή `wavread` (ή την `audioread`, αν έχετε πολύ πρόσφατη έκδοση του MATLAB). Η συνάρτηση `butter` υλοποιεί ένα χαμηλοπερατό φίλτρο Butterworth με τάξη N την οποία παρέχετε εσείς ως όρισμα, όπως και τη συχνότητα αποκοπής f_c, και επιστρέφει τα μηδενικά, τους πόλους, και το κέρδος (δηλ. τη σταθερά του αριθμητή) του φίλτρου $H(s)$. Με άλλα λόγια, δε μας δίνει απευθείας τη μορφή του $H(s)$, αλλά μας δίνει ό,τι χρειαζόμαστε για να το φτιάξουμε.

Τα παραπάνω γίνονται με τις εντολές

```
f = 2000;
N = 8;
[z, p, k] = butter(N, 2*pi*f, 's');
```

όπου το όρισμα `s` δηλώνει στη συνάρτηση ότι το φίλτρο μας αντιστοιχεί σε σήμα $h(t)$ συνεχούς χρόνου.

(θ΄) Στη συνέχεια, πρέπει από τους πόλους, τα μηδενικά, και το κέρδος, να γράψουμε το φίλτρο ως λόγο πολυωνύμων $H(s) = N(s)/D(s)$ ώστε να το χρησιμοποιήσουμε. Αυτό γίνεται εύκολα ως

```
[B, A] = zp2tf(z, p, k);
```

όπου η συνάρτηση `zp2tf`, που είναι συντομογραφία για τη φράση Zeros+Poles to Transfer Function, μετατρέπει τα μηδενικά, τους πόλους, και το κέρδος, σε ένα λόγο πολυωνύμων του s, που φυσικά δεν είναι άλλος από τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$. Η μεταβλητή `B` περιέχει τους συντελεστές του s-πολυωνύμου του αριθμητή, ενώ η μεταβλητή `A` τους αντίστοιχους του παρονομαστή.

(ι΄) Δείτε την απόκριση συχνότητας $H(f)$ του φίλτρου σας με χρήση των εντολών

```
W = 2*pi*[-5000:5000];
[H] = freqs(B, A, W);
subplot(211); plot(W, abs(H)); xlabel('Frequency (Hz)');
title('Magnitude Spectrum'); grid;
subplot(212); plot(W, angle(H)); xlabel('Frequency (Hz)');
title('Phase Spectrum'); grid;
```

Είναι το φάσμα πλάτους όπως περιμένατε να είναι;

(ια΄) Όμως ο υπολογιστής μας είναι ψηφιακός, και το σήμα military.wav που έχουμε είναι ψηφιακό. Πρέπει λοιπόν να μετατρέψουμε το φίλτρο $H(s)$ που έχουμε σε μορφή συντελεστών s-πολυωνύμου αριθμητή και παρονομαστή σε ένα *ψηφιακό* αντίστοιχό του, και να το χρησιμοποιήσουμε επάνω στο σήμα μας. Ευτυχώς για μας, κάθε αναλογικό φίλτρο μπορεί να μετατραπεί σε ψηφιακό (και ακριβέστερα, σε *διακριτού χρόνου*), με πολύ απλές τεχνικές, εκ των οποίων η απλούστερη ονομάζεται impulse invariance[1], και την οποία το MATLAB έχει έτοιμη.

```
[digital_num, digital_den] = impinvar(B, A, fs);
```

Πλέον στις μεταβλητές `digital_num` και `digital_den` έχουμε τους συντελεστές ενός ψηφιακού φίλτρου Butterworth $H_d(s)$ (που δεν περιγράφεται πλέον στο χώρο του s, δηλ. του Laplace, αλλά χάριν ευκολίας ας διατηρήσουμε το συμβολισμό).

(ιβ΄) Ας χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση `filter`, η οποία συντάσσεται ως

```
y = filter(Num, Den, x);
```

με `x` το σήμα εισόδου, και `Num, Den` τον αριθμητή και τον παρονομαστή του φίλτρου $H_d(s)$, αντίστοιχα, στη μορφή συντελεστών πολυωνύμου όπως σας επιστρέφονται από την `impinvar`. Εκτελέστε την εντολή, ακούστε το αποτέλεσμα με την εντολή `soundsc(y, fs);` και σχολιάστε το αποτέλεσμα σε σχέση με το αρχικό σήμα. Πώς θα χαρακτηρίζατε την ποιότητα του σήματος εξόδου σε σχέση με το αρχικό;

(ιγ΄) Παραδώστε ένα `plot` του τελικού σήματος, παρέα με το αρχικό σήμα.

[1] Λεπτομέρειες στο ΗΥ370... :-)

Παραδώστε κώδικα MATLAB που εκτελεί το φιλτράρισμα επάνω στο σήμα που σας δίνεται, όποια plots και κώδικα σας ζητούνται στα υποερωτήματα, καθώς και τις απαντήσεις στις θεωρητικές ερωτήσεις σε ξεχωριστό χαρτί.

[⋆] Άσκηση 11 - Συστήματα στο MATLAB μέσω Διαφορικών Εξισώσεων

Το MATLAB έχει τη δυνατότητα να λύσει με συμβολικό τρόπο διαφορικές εξισώσεις. Ας δούμε πως: έστω ότι θέλουμε να βρούμε τη *συνολική έξοδο*, δηλ. την έξοδο λόγω αρχικών συνθηκών - η οποία λέγεται *απόκριση μηδενικής εισόδου* - και την έξοδο λόγω εφαρμογής της εισόδου - η οποία λέγεται *απόκριση μηδενικής κατάστασης* - ενός συστήματος που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = x(t) + 2\frac{d}{dt}x(t) \tag{17}$$

για είσοδο $x(t) = e^{-t}u(t)$ και με αρχικές συνθήκες $y(0^-) = 2$.

(i.) **Απόκριση μηδενικής εισόδου:** η απόκριση μηδενικής εισόδου είναι η έξοδος του συστήματος μόνο λόγω των αρχικών συνθηκών, δηλ. θεωρώντας ότι δεν εφαρμόζουμε το σήμα εισόδου. Οπότε στην παραπάνω διαφορική εξίσωση θέτουμε $x(t) = 0$, όπως και για όλες τις παραγώγους του $x(t)$ που εμφανίζονται. Η διαφορική εξίσωση τότε ονομάζεται *ομογενής* και γράφεται ως

$$\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = 0 \tag{18}$$

Για να τη λύσουμε στο MATLAB χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση `dsolve` και κάνουμε το εξης:

```
syms y(t)                                    % Symbolic function y(t)
yzi = dsolve(diff(y,t) + 2*y == 0, y(0) == 2)    % Find yzi(t)
```

και το MATLAB μας απαντά ότι

```
yzi = 2*exp(-2*t)
```

που είναι και η σωστή απάντηση (το $u(t)$ υπονοείται εδώ). Παρατηρήστε ότι η `dsolve` πήρε δυο ορίσματα: ένα που περιγράφει τη διαφορική εξίσωση (η συνάρτηση `diff` υποδηλώνει την παράγωγο ως προς t) και ένα όρισμα που δηλώνει την αρχική συνθήκη. Προσέξτε το $==$ στη σύνταξη!

(ii.) **Απόκριση μηδενικής κατάστασης:** η απόκριση μηδενικής κατάστασης είναι η έξοδος του συστήματος για κάποια είσοδο $x(t)$, με μηδενικές τιμές για όλες τις αρχικές συνθήκες. Ξέρουμε ήδη ότι αυτή η έξοδος δίνεται από την πράξη της συνέλιξης. Για να τη βρούμε στο MATLAB χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση `dsolve` με λίγο διαφορετικό τρόπο, ως εξης:

```
syms y(t)                                                    % Symbolic function y(t)
syms x(t)                                                    % Symbolic function x(t)
x(t) = exp(-t);                                              % Make x(t) specific
yzs = dsolve(diff(y,t) + 2*y == x(t) + 2*diff(x,t), y(0) == 0) % Find yzs(t)
```

και το MATLAB μας επιστρέφει

```
yzs = exp(-2*t) - exp(-t)
```

όπου και εδώ το $u(t)$ στα εκθετικά υπονοείται. Παρατηρήστε ότι η `dsolve` πήρε δυο ορίσματα: ένα που περιγράφει τη διαφορική εξίσωση με τη δεδομένη είσοδο που μας ενδιαφέρει, και ένα όρισμα που δηλώνει την αρχική συνθήκη, η οποία εδώ είναι μηδενική, ως οφείλει.

(iii.) Άρα η συνολική έξοδος και λύση για την παραπάνω διαφορική εξίσωση με τη δεδομένη είσοδο $x(t) = e^{-t}u(t)$ είναι

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) = (2e^{-2t} - e^{-t} + e^{-2t})u(t) = (3e^{-2t} - e^{-t})u(t) \tag{19}$$

και αυτό μας το επιβεβαιώνει και το MATLAB:

```
ytotal = yzi + yzs

ytotal = 3*exp(-2*t) - exp(-t)
```

Παραδώστε κώδικα MATLAB που βρίσκει τη συνολική έξοδο για τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις, βάζοντας σε σχόλια την απάντηση που παίρνετε:

1. $\dfrac{d^2}{dt^2}y(t) + 6\dfrac{d}{dt}y(t) + 9y(t) = 9x(t) + 2\dfrac{d}{dt}x(t),$

   για $x(t) = e^{-2t}u(t)$, και με αρχικές συνθήκες $y(0^-) = 1$, $y'(0^-) = -1$.

2. $\dfrac{d^2}{dt^2}y(t) + 2\dfrac{d}{dt}y(t) + y(t) = \dfrac{d}{dt}x(t),$

   για $x(t) = -e^{t}u(t)$, και με αρχικές συνθήκες $y(0^-) = 0$, $y'(0^-) = 1$.

Hint: Για να βάλετε στο παιχνίδι τις αρχικές συνθήκες παραγώγων, δηλώστε μαζί με τις $x(t), y(t)$ μια νέα συμβολική συνάρτηση `Dy = diff(y,t)` η οποία αντιπροσωπεύει την παράγωγο της $y(t)$, και θέστε κατάλληλα τη μεταβλητή `Dy(0)`.