ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2017-18
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Πέμπτη Σειρά Ασκήσεων - Λύσεις

Ημερομηνία Ανάθεσης: 30/3/2018 Ημερομηνία Παράδοσης: 17/4/2018, 16:00

Άσκηση 1 - Συνέλιξη

(α') Είναι

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau}u(\tau)e^{-4(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau \tag{1}$$

Παρατηρούμε ότι

$$u(t-\tau) = \begin{cases} 1, & t-\tau > 0 \\ 0, & t-\tau < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & \tau < t \\ 0, & \tau > t \end{cases} \tag{2}$$

Οπότε

$$u(\tau)u(t-\tau) = \begin{cases} 1, & 0 < \tau < t \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{3}$$

Είναι

$$y(t) = \int_0^t e^{-\tau}e^{-4(t-\tau)}d\tau = e^{-4t}\int_0^t e^{3\tau}d\tau = e^{-4t}\frac{1}{3}e^{3\tau}\Big]_0^t \tag{4}$$

$$= e^{-4t}\frac{1}{3}(e^{3t}-1) = \frac{1}{3}(e^{-t}-e^{-4t}), t > 0 = \frac{1}{3}(e^{-t}-e^{-4t})u(t) \tag{5}$$

Το σύστημα είναι ευσταθές και αιτιατό.

(β') Διακρίνοντας τις περιπτώσεις:

- Είναι $y(t) = 0$, για $t - 1 < 0 \iff t < 1$.
- Είναι

$$y(t) = \int_0^{t-1}(-2)d\tau = -2t\Big]_0^{t-1} = -2t+2 \tag{6}$$

για $t - 1 \geq 0$ και $t - 3 < 0$, δηλ. $1 \leq t < 3$.

- Είναι

$$y(t) = \int_{t-3}^{t-1}(-2)d\tau = -2t\Big]_{t-3}^{t-1} = -4 \tag{7}$$

για $t - 3 \geq 0 \iff t \geq 3$.

Άρα συνολικά

$$y(t) = \begin{cases} -2t+2, & 1 < t < 3 \\ -4, & t \geq 3 \\ 0, & t \leq 1 \end{cases} \tag{8}$$

Το σύστημα είναι ασταθές και αιτιατό.

(γ') Διακρίνοντας τις περιπτώσεις:

- Είναι

$$y(t) = \int_{t-1}^{t} e^{\tau} d\tau = e^{\tau}\Big]_{t-1}^{t} = e^{t} - e^{t-1}, \, : t \leq 0 \tag{9}$$

- Είναι

$$y(t) = \int_{t-1}^{0} e^{\tau} d\tau + \int_{0}^{t} e^{-\tau} d\tau = e^{\tau}\Big]_{t-1}^{0} + (-e^{-\tau})\Big]_{0}^{t} \tag{10}$$

$$= 1 - e^{t-1} - e^{-t} + 1 = 2 - (e^{t-1} - e^{-t}), \;\; 0 < t < 1 \tag{11}$$

- Είναι

$$y(t) = \int_{t-1}^{t} e^{-\tau} d\tau = -e^{-\tau}\Big]_{t-1}^{t} = -e^{-t} + e^{-(t-1)}, \;\; t \geq 1 \tag{12}$$

Άεα συνολικά

$$y(t) = \begin{cases} e^{t} - e^{(t-1)}, & t \leq 0 \\ 2 - e^{-t} - e^{(t-1)}, & 0 < t < 1 \\ e^{-(t-1)} - e^{-t}, & t \geq 1 \end{cases} \tag{13}$$

Το σύστημα είναι ευσταθές και όχι αιτιατό.

Άσκηση 2 - ΓΧΑ Συστήματα Ι

(α΄) Είναι

$$H(f) = 1 - 8\frac{1}{2 + j2\pi f} + 5\frac{1}{3 + j2\pi f} = \frac{(j2\pi f)^2 + 2(j2\pi f) - 8}{(j2\pi f)^2 + 5(j2\pi f) + 6} \tag{14}$$

(β΄) Είναι

$$x(t) = 2\cos(2t + 0.0396\pi) = 2\cos(2\pi(1/\pi)t + 0.0396\pi) \tag{15}$$

Άρα σύμφωνα με τη θεωρία

$$y(t) = 2|H(1/\pi)|\cos(2t + 0.0396\pi + \phi_H(1/\pi)) \tag{16}$$

με

$$H(1/\pi) = \frac{-4 + j4 - 8}{-4 + 10j + 6} = \frac{-6 + 2j}{1 + j5} \tag{17}$$

οπότε

$$|H(1/\pi)| = 1.2403 \tag{18}$$

$$\phi_H(1/\pi) = 0.4604\pi \tag{19}$$

Οπότε

$$y(t) = 2.4806\cos(2t + 0.5\pi) \tag{20}$$

(γ΄) Είναι

$$Y(f) = H(f)X(f) = \frac{(j2\pi f)^2 + 2(j2\pi f) - 8}{(j2\pi f)^2 + 5(j2\pi f) + 6}\frac{1}{j2\pi f + 4} = \frac{j2\pi f - 2}{(j2\pi f + 3)(j2\pi f + 2)} \tag{21}$$

(δ΄) Έχουμε

$$Y(f) = \frac{A}{j2\pi f + 3} + \frac{B}{j2\pi f + 2} \tag{22}$$

με

$$A = \frac{j2\pi f - 2}{j2\pi f + 2}\Big|_{j2\pi f = -3} = 5 \tag{23}$$

$$B = \frac{j2\pi f - 2}{j2\pi f + 3}\Big|_{j2\pi f = -2} = -4 \tag{24}$$

οπότε

$$Y(f) = 5\frac{1}{j2\pi f + 3} - 4\frac{1}{j2\pi f + 2} \longleftrightarrow y(t) = 5e^{-3t}u(t) - 4e^{-2t}u(t) \tag{25}$$

Άσκηση 3 - ΓΧΑ Συστήματα ΙΙ

(α΄) Είναι

$$(j2\pi f)^2 Y(f) + 3(j2\pi f)Y(f) + 2Y(f) = 2X(f) \tag{26}$$

(β΄) Έχουμε

$$Y(f)((j2\pi f)^2 + j6\pi f + 2) = 2X(f) \Longleftrightarrow H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{2}{(j2\pi f)^2 + 3j2\pi f + 2} \tag{27}$$

(γ΄) Αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα έχουμε

$$H(f) = \frac{A}{j2\pi f + 2} + \frac{B}{j2\pi f + 1} \tag{28}$$

με

$$A = \frac{2}{j2\pi f + 1}\Big|_{j2\pi f = -2} = -2 \tag{29}$$

$$B = \frac{2}{j2\pi f + 2}\Big|_{j2\pi f = -1} = 2 \tag{30}$$

Άρα

$$H(f) = -2\frac{1}{j2\pi f + 2} + 2\frac{1}{j2\pi f + 1} \longleftrightarrow h(t) = -2e^{-2t}u(t) + 2e^{-t}u(t) \tag{31}$$

Άσκηση 4 - Μετασχηματισμός Laplace Ι - Ορισμός

(α΄) Είναι

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-2|t|}e^{-st}dt \tag{32}$$

$$= \int_{-\infty}^{0} te^{2t}e^{-st}dt + \int_{0}^{+\infty} te^{-2t}e^{-st}dt \tag{33}$$

$$= \int_{-\infty}^{0} te^{(2-s)t}dt + \int_{0}^{+\infty} te^{(-2-s)t}dt \tag{34}$$

$$= e^{(2-s)t}\Big(\frac{(2-s)t-1}{(2-s)^2}\Big)\Big]_{-\infty}^{0} + e^{(-2-s)t}\Big(\frac{(-2-s)t-1}{(-2-s)^2}\Big)\Big]_{0}^{+\infty} \tag{35}$$

Για τον όρο

$$e^{(2-s)t}\Big(\frac{(2-s)t-1}{(2-s)^2}\Big)\Big]_{-\infty}^{0}$$

έχουμε

$$e^{(2-s)t}\Big(\frac{(2-s)t-1}{(2-s)^2}\Big)\Big]_{-\infty}^{0} = -\frac{1}{(2-s)^2} - \lim_{t\to-\infty} e^{(2-s)t}\Big(\frac{(2-s)t-1}{(2-s)^2}\Big) \quad (36)$$

$$= -\frac{1}{(2-s)^2} - 0 = -\frac{1}{(2-s)^2} \quad (37)$$

με $\Re\{s\} < 2$, ενώ για τον όρο

$$e^{(-2-s)t}\Big(\frac{(-2-s)t-1}{(-2-s)^2}\Big)\Big]_{0}^{+\infty}$$

έχουμε

$$e^{(-2-s)t}\Big(\frac{(-2-s)t-1}{(-2-s)^2}\Big)\Big]_{0}^{+\infty} = \lim_{t\to+\infty} e^{(-2-s)t}\Big(\frac{(-2-s)t-1}{(-2-s)^2}\Big) + \frac{1}{(-2-s)^2} \quad (38)$$

$$= 0 + \frac{1}{(2+s)^2} = \frac{1}{(2+s)^2} \quad (39)$$

με $\Re\{s\} > -2$. Οπότε συνολικά

$$X(s) = \frac{1}{(2+s)^2} - \frac{1}{(2-s)^2} = \frac{(2-s)^2-(2+s)^2}{((2-s)(2+s))^2} = \frac{-8s}{(4-s^2)^2} \quad (40)$$

με $-2 < \Re\{s\} < 2$.

(β΄) Είναι

$$X(s) = \int_0^1 e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big]_0^1 = -\frac{1}{s}(e^{-s}-1) = \frac{1}{s}(1-e^{-s}), \ \ \forall s \quad (41)$$

Άσκηση 5 - Μετασχηματισμός Laplace II - Ιδιότητες

(α΄) $x(-3t) \longleftrightarrow \frac{1}{3}X(-\frac{s}{3}) = \frac{1}{3}\frac{e^{2s/3}}{-\frac{s}{3}+3} = \frac{e^{2s/3}}{9-s}$, με $\Re\{s\} < 9$.

(β΄) $x(t-2) \longleftrightarrow X(s)e^{-2s} = \frac{e^{-4s}}{s+3}$, με R_x.

(γ΄) $x(4t-1) \longleftrightarrow \frac{1}{4}X(\frac{s}{4})e^{-s/4} = \frac{e^{-s/2}}{s+12}$, με $\Re\{s\} > -12$.

(δ΄) $2tx(t) \longleftrightarrow -2\frac{d}{ds}X(s) = -2\frac{(e^{-2s})'(s+3)-(s+3)'e^{-2s}}{(s+3)^2} = \frac{2e^{-2s}(2s+7)}{(s+3)^2}$, με R_x.

(ε΄) $e^{2t}x(t) \longleftrightarrow X(s-2) = \frac{e^{-2s+4}}{s+1}$, με $\Re\{s\} > -1$.

(ϛ΄) $\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow sX(s) = \frac{se^{-2s}}{s+3}$, με R_x.

(ζ΄) $x(t) * x(t) \longleftrightarrow X(s)X(s) = X^2(s) = \frac{e^{-4s}}{(s+3)^2}$, με R_x.

(η΄) $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \longleftrightarrow \frac{X(s)}{s} = \frac{e^{-2s}}{s(s+3)}$, με $\Re\{s\} > 0$.

Από τις παραπάνω περιπτώσεις μπορούμε να υπολογίσουμε το Μετασχ. Fourier από το Μετασχ. Laplace σε όλες πλην της τελευταίας, αφού σε αυτήν ο φανταστικός άξονας δεν περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης.

Άσκηση 6 - Μετασχηματισμός Laplace III - Ιδιότητες

Είναι

$$y(t) = x_1(t-2) * x_2(3-t) \longleftrightarrow Y(s) = X_1(s)e^{-2s}X_2(-s)e^{-3s} = X_1(s)X_2(-s)e^{-5s} \quad (42)$$

$$= \frac{1}{s+2}\frac{1}{-s+3}e^{-5s} = \frac{1}{(s+2)(3-s)}e^{-5s} \quad (43)$$

με $\{\Re\{s\} > -2\} \cap \{\Re\{s\} < 3\} = \{-2 < \Re\{s\} < 3\}$.

Άσκηση 7 - Μετασχηματισμός Laplace - Γρίφος

Αφού $x(t) \in \Re$ και $x(t) = x(-t)$ συνεπάγεται ότι $X(s) = X^*(s^*) = X(-s)$. Άρα για τον πόλο $\frac{1}{2}e^{j\pi/4}$ θα έχουμε υποχρεωτικά και τους πόλους $\frac{1}{2}e^{-j\pi/4}$, $-\frac{1}{2}e^{j\pi/4}$, $-\frac{1}{2}e^{-j\pi/4}$. Άρα

$$X(s) = \frac{A}{(s-\frac{1}{2}e^{-j\pi/4})(s-\frac{1}{2}e^{j\pi/4})(s+\frac{1}{2}e^{-j\pi/4})(s+\frac{1}{2}e^{j\pi/4})} \tag{44}$$

Από τη σχέση

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt\Big|_{s=0} = X(0) = 4 \tag{45}$$

Οπότε θέτοντας $s = 0$ στη Σχέση (44), παίρνουμε $A = 1/4$. Μετά από πράξεις

$$X(s) = \frac{4}{16s^4 + 1} \tag{46}$$

Άσκηση 8 - Παραγωγή Ηχούς στο MATLAB

(α΄) Βρείτε στο χαρτί σας την κρουστική απόκριση, $h(t)$, του ΓΧΑ συστήματος, δεδομένου ότι γνωρίζετε ότι η κρουστική απόκριση δίνεται ως η έξοδος ενός συστήματος για είσοδο $x(t) = \delta(t)$. Θέτοντας $x(t) = \delta(t)$, λαμβάνουμε την κρουστική απόκριση, οπότε

$$h(t) = \delta(t) + a\delta(t - t_d) \tag{47}$$

(β΄) Για το σύστημα

$$y(t) = x(t) + \sum_{i=1}^{N} a_i x(t - t_i) \tag{48}$$

θέτουμε $x(t) = \delta(t)$ και άρα

$$h(t) = \delta(t) + \sum_{i=1}^{N} a_i \delta(t - t_i) \tag{49}$$

(γ΄) Κώδικας MATLAB

Άσκηση 9 - Ανάλυση Ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος στο MATLAB

Κώδικας MATLAB

[$\star$] Άσκηση 10 - Κρουστική Απόκριση

Έστω η κρουστική απόκριση $h(t)$ ίση με

$$h(t) = e^{2t}u(-t + 4) + e^{-2t}u(t - 5) \tag{50}$$

Βρείτε τις σταθερές A, B τέτοιες ώστε

$$h(t-\tau) = \begin{cases} e^{-2(t-\tau)}, & \tau < A \\ e^{2(t-\tau)}, & \tau > B \\ 0, & A \leq \tau \leq B \end{cases} \tag{51}$$

Είναι

$$h(t-\tau) = e^{2(t-\tau)}u(-t + \tau + 4) + e^{-2(t-\tau)}u(t - \tau - 5) \tag{52}$$

Η πρώτη βηματική είναι

$$u(-t+\tau+4) = \begin{cases} 1, & -t+\tau+4>0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \tau > t-4 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{53}$$

Η δεύτερη βηματική είναι

$$u(t-\tau-5) = \begin{cases} 1, & t-\tau-5>0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \tau < t-5 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{54}$$

Άρα προφανώς

$$h(t-\tau) = \begin{cases} e^{-2(t-\tau)}, & \tau > t-5 \\ e^{2(t-\tau)}, & \tau > t-4 \\ 0, & t-5 < \tau < t-4 \end{cases} \tag{55}$$

[⋆] Άσκηση 11 - Συμβολικός Μετασχηματισμός Laplace
Κώδικας MATLAB.

[⋆] **Άσκηση 12 - Συνέλιξη στο MATLAB**
Κώδικας MATLAB.