ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2017-18
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων - Λύσεις

Ημερομηνία Ανάθεσης: 19/3/2018 Ημερομηνία Παράδοσης: 30/3/2018, 16:00

Οι ασκήσεις με [$\star$] είναι **bonus**, $+10$ μονάδες η καθεμία στο βαθμό αυτής της σειράς ασκήσεων (δηλ. μπορείτε να πάρετε μέχρι $110/80$ σε αυτή τη σειρά.)

Άσκηση 1 - Μετασχηματισμός Fourier I - Ορισμός

(α΄) Είναι

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t}u(t-3)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{3}^{+\infty} e^{-2t}e^{-j2\pi ft}dt \tag{1}$$

$$= \int_{3}^{+\infty} e^{-(2+j2\pi f)t}dt = -\frac{1}{2+j2\pi f}e^{-(2+j2\pi f)t}\Big]_{3}^{+\infty} \tag{2}$$

$$= -\frac{1}{2+j2\pi f}(0 - e^{-3(2+j2\pi f)}) = \frac{1}{2+j2\pi f}e^{-3(2+j2\pi f)} \tag{3}$$

(β΄) Είναι

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4|t|}e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{4t}e^{-j2\pi ft}dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-4t}e^{-j2\pi ft}dt \tag{4}$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{(4-j2\pi f)t}dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-(4+j2\pi f)t}dt \tag{5}$$

$$= \frac{1}{4-j2\pi f}e^{(4-j2\pi f)t}\Big]_{-\infty}^{0} - \frac{1}{4+j2\pi f}e^{-(4+j2\pi f)t}\Big]_{0}^{\infty} \tag{6}$$

$$= \frac{1}{4-j2\pi f}(1-0) - \frac{1}{4+j2\pi f}(0-1) \tag{7}$$

$$= \frac{1}{4-j2\pi f} + \frac{1}{4+j2\pi f} \tag{8}$$

$$= \frac{8}{(4-j2\pi f)(4+j2\pi f)} \tag{9}$$

$$= \frac{8}{16+4\pi^2 f^2} \tag{10}$$

(γ΄) Είναι

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-2t}u(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{0}^{+\infty} te^{-2t}e^{-j2\pi ft}dt \tag{11}$$

$$= \int_{0}^{+\infty} te^{-(2+j2\pi f)t}dt = e^{-(2+j2\pi f)t}\Big(\frac{-(2+j2\pi f)t - 1}{(-(2+j2\pi f))^2}\Big)\Big]_{0}^{+\infty} \tag{12}$$

$$= \lim_{t\to+\infty} e^{-(2+j2\pi f)t}\Big(\frac{-(2+j2\pi f)t-1}{(-(2+j2\pi f))^2}\Big) + \frac{1}{(2+j2\pi f)^2} \tag{13}$$

$$= -\frac{1}{(2+j2\pi f)^2}\lim_{t\to+\infty} e^{-(2+j2\pi f)t}(1+(2+j2\pi f)t) + \frac{1}{(2+j2\pi f)^2} \tag{14}$$

$$= 0 + \frac{1}{(2+j2\pi f)^2} = \frac{1}{(2+j2\pi f)^2} \tag{15}$$

μετά από εφαρμογή του κανόνα του De L'Hospital.

Άσκηση 2 - Μετασχηματισμός Fourier II - Ιδιότητες

(α΄) Είναι

$$Y(f) = \frac{1}{2}X(-f/2) = \frac{1}{2}\frac{4}{3-j2\pi\frac{f}{2}} = \frac{2}{3-j\pi f} \tag{16}$$

(β΄) Είναι

$$Y(f) = X(f)e^{-j2\pi 5f} = \frac{4}{3+j2\pi f}e^{-j10\pi f} = \frac{4e^{-j10\pi f}}{3+j2\pi f} \tag{17}$$

(γ΄) Είναι

$$Y(f) = \frac{1}{8}X(f/8)e^{-j2\pi f/4} = \frac{1}{8}\frac{4}{3+j2\pi\frac{f}{8}}e^{-j\pi f/2} = \frac{4e^{-j\pi f/2}}{24+j2\pi f} \tag{18}$$

(δ΄) Είναι

$$Y(f) = \frac{j}{2\pi}\frac{d}{df}X(f) = \frac{j}{2\pi}\frac{d}{df}\frac{4}{3+j2\pi f} = \frac{4}{(3+j2\pi f)^2} \tag{19}$$

(ε΄) Είναι

$$Y(f) = X\Big(f - \frac{6}{2\pi}\Big) = \frac{4}{3+j2\pi(f-\frac{6}{2\pi})} = \frac{4}{3+j(2\pi f - 6)} \tag{20}$$

(ϛ΄) Είναι

$$Y(f) = j2\pi f X(f) = j2\pi f\frac{4}{3+j2\pi f} = \frac{j8\pi f}{3+j2\pi f} \tag{21}$$

Άσκηση 3 - Μετασχηματισμός Fourier III - Ιδιότητες

Το ολοκλήρωμα μπορεί να γραφεί ως

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\left(\frac{\sin(t)}{\pi t}\right)^4 dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(t\left(\frac{\sin(t)}{\pi t}\right)^2\right)^2 dt \tag{22}$$

και μέσω του θεωρήματος Parseval αυτό ισοδυναμεί με

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|F\left\{t\left(\frac{\sin(t)}{\pi t}\right)^2\right\}\right|^2 df \tag{23}$$

Άρα χρειαζόμαστε το μετασχ. Fourier της συνάρτησης $x(t) = t\Big(\frac{\sin(t)}{\pi t}\Big)^2$, η οποία μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = t\Big(\frac{\sin(t)}{\pi t}\Big)^2 = t\Big(\frac{\sin(\pi\frac{t}{\pi})}{\pi t}\Big)^2 = t\Big(\frac{\sin(\pi\frac{t}{\pi})}{\pi^2\frac{t}{\pi}}\Big)^2 = \frac{1}{\pi^2}t\Big(\frac{\sin(\pi\frac{t}{\pi})}{\pi\frac{t}{\pi}}\Big)^2 = \frac{1}{\pi^2}t\,\mathrm{sinc}^2\Big(\frac{t}{\pi}\Big) \tag{24}$$

Ο μετασχ. Fourier του σήματος αυτού δίνεται εύκολα από την ιδιότητα της παραγώγισης στη συχνότητα, δηλ.

$$X(f) = \frac{1}{\pi^2}\frac{j}{2\pi}\frac{d}{df}F\Big\{\mathrm{sinc}^2\Big(\frac{t}{\pi}\Big)\Big\} = \frac{j}{2\pi^3}\pi\frac{d}{df}\mathrm{tri}(\pi f) = \frac{j}{2\pi^2}\Big(\pi\mathrm{rect}\Big(f+\frac{1}{2\pi}\Big) - \pi\mathrm{rect}\Big(f-\frac{1}{2\pi}\Big)\Big) \tag{25}$$

εφ'οσον το σήμα τριγωνικού παλμού ορίζεται στο $(-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi})$, οπότε η παράγωγός του θα είναι δυο τετραγωνικοί παλμοί με πλάτος $\pm\pi$ και κέντρο $\mp\frac{1}{2\pi}$.

Γυρνώντας πίσω στο ολοκλήρωμα θα έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big|\frac{j}{2\pi^2}\Big|^2 \Big(\pi\text{rect}(f + \frac{1}{2\pi}\Big) - \pi\text{rect}\Big(f - \frac{1}{2\pi}\Big)\Big)^2 df \tag{26}$$

$$= \frac{1}{4\pi^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi^2 \Big(\text{rect}\Big(f + \frac{1}{2\pi}\Big) - \text{rect}\Big(f - \frac{1}{2\pi}\Big)\Big)^2 df \tag{27}$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}^2\Big(f + \frac{1}{2\pi}\Big) df + \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}^2\Big(f - \frac{1}{2\pi}\Big) df \right) \tag{28}$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \left(\int_{-1/\pi}^{0} df + \int_{0}^{1/\pi} df \right) \tag{29}$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \Big(f\Big]_{-1/\pi}^{0} + f\Big]_{0}^{1/\pi} \Big) = \frac{1}{4\pi^2}\frac{2}{\pi} = \frac{1}{2\pi^3} \tag{30}$$

με το σπάσιμο του ολοκληρώματος σε δυο να είναι εφικτό αφού οι δυο τετραγωνικοί παλμοί που υψώνονται στο τετράγωνο "ζουν" σε διαφορετικά διαστήματα του f.

Στο MATLAB θα είναι

```
syms t;
x = t * (sin(t)/(pi*t))^2;
c = int(x^2, t, -inf, inf);
```

[$\star$] Άσκηση 4 - Μετασχηματισμός Fourier - Γρίφος :-)

Εφ'οσον το σήμα είναι πραγματικό στο χρόνο, το $\Re\{X(f)\}$ θα αντιστοιχεί στο άρτιο μέρος του σήματος $x(t)$, δηλ. στο

$$x_e(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} \tag{31}$$

Άρα

$$x_e(t) = |t|e^{-|t|} = \frac{x(t) + x(-t)}{2} \tag{32}$$

Αφού ισχύει ότι $x(t) = 0,\ t < 0$, τότε το $x(-t) = 0$ για $t > 0$. Οπότε

$$x(t) = 2|t|e^{-|t|},\ \ t > 0 \tag{33}$$

και άρα

$$x(t) = 2te^{-t}u(t) \tag{34}$$

Άσκηση 5 - Αντίστροφος Μετασχ. Fourier - I

Αφού γνωρίζουμε το μέτρο και τη φάση του μετασχηματισμού, μπορούμε να τον βρούμε ως

$$X(f) = |X(f)|e^{j\phi_x(f)} = 2(u(f + 3) - u(f - 3))e^{j(-3\pi f + \pi)} \tag{35}$$

Παρατηρούμε ότι

$$u(f + 3) - u(f - 3) = \text{rect}\Big(\frac{f}{6}\Big) \tag{36}$$

(α') Άρα η πολική μορφή δίνεται ως

$$X(f) = |X(f)|e^{j\phi_x(f)} = 2\text{rect}\Big(\frac{f}{6}\Big)e^{j(-3\pi f + \pi)} \tag{37}$$

(β΄) Θα έχουμε

$$x(t) = F^{-1}\{X(f)\} = F^{-1}\{2\mathrm{rect}\Big(\frac{f}{6}\Big)e^{j(-3\pi f+\pi)}\} \quad (38)$$

$$= F^{-1}\{-2\mathrm{rect}\Big(\frac{f}{6}\Big)e^{j(-3\pi f)}\} \quad (39)$$

$$= F^{-1}\{-2\mathrm{rect}\Big(\frac{f}{6}\Big)\} * F^{-1}\{e^{j(-2\pi\frac{3}{2}f)}\} \quad (40)$$

λόγω της ιδιότητας της συνέλιξης στο χρόνο $\Longleftrightarrow$ γινόμενο στη συχνότητα. Στη συνέχεια,

$$x(t) = -12\mathrm{sinc}(6t) * \delta(t - \frac{3}{2}) \quad (41)$$

$$= -12\mathrm{sinc}(6(t - 3/2)) \quad (42)$$

$$= -12\mathrm{sinc}(6t - 9)) \quad (43)$$

$$= -12\mathrm{sinc}(9 - 6t) \quad (44)$$

από την ιδιότητα της συνέλιξης σήματος με τη συνάρτηση δέλτα και λόγω αρτιότητας της συνάρτησης sinc. Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε με εφαρμογή του ορισμού ή με εφαρμογή της ιδιότητας της κλιμάκωσης και χρονικής μετατόπισης - όλες αυτές οι λύσεις είναι σωστές.

(γ΄) Προφανώς τα σημεία μηδενισμού είναι τα σημεία μηδενισμού του αριθμητή $\sin(\pi(9 - 6t))$, οπότε

$$\pi(9 - 6t) = k\pi \Longleftrightarrow t = \frac{9-k}{6}, \;\; k \in \mathrm{Z} \quad (45)$$

Άσκηση 6 - Αντίστροφος Μετασχ. Fourier - II

Ο μετασχηματισμός γράφεται ως

$$X(f) = \frac{1}{2 - (2\pi f)^2 + j6\pi f} = \frac{1}{(1 + j2\pi f)(2 + j2\pi f)} \quad (46)$$

Αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα θα έχουμε

$$X(f) = \frac{1}{(1 + j2\pi f)(2 + j2\pi f)} = \frac{A}{1 + j2\pi f} + \frac{B}{2 + j2\pi f} \quad (47)$$

με

$$A = X(f)(1 + j2\pi f)\Big]_{j2\pi f=-1} = \frac{1}{2 + j2\pi f}\Big]_{j2\pi f=-1} = 1 \quad (48)$$

$$B = X(f)(2 + j2\pi f)\Big]_{j2\pi f=-2} = \frac{1}{1 + j2\pi f}\Big]_{j2\pi f=-2} = -1 \quad (49)$$

και άρα

$$X(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f} - \frac{1}{2 + j2\pi f} \quad (50)$$

Από τα ζεύγη μετασχηματισμών στους Πίνακες μας καταλήγουμε ότι

$$x(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t) \quad (51)$$

[⋆] Άσκηση 7 - Συμβολικός Υπολογισμός Μετασχ. Fourier στο MATLAB[1]

Κώδικας MATLAB.

[1]Αυτή η άσκηση απαιτεί αποκλειστικά MATLAB - δεν είναι συμβατή με το Octave.

Άσκηση 8 - Αριθμητικός Υπολογισμός Μετασχ. Fourier στο MATLAB
Κώδικας MATLAB.

Άσκηση 9 - Μετασχηματισμός Fourier και Παθολογία Φωνής
Κώδικας MATLAB.

[⋆] Άσκηση 10 - Επέκταση της προηγούμενης άσκησης
Κώδικας MATLAB.

Άσκηση 11 - Μετασχηματισμός Fourier κι αφαίρεση θορύβου
Κώδικας MATLAB.