ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2016-17
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

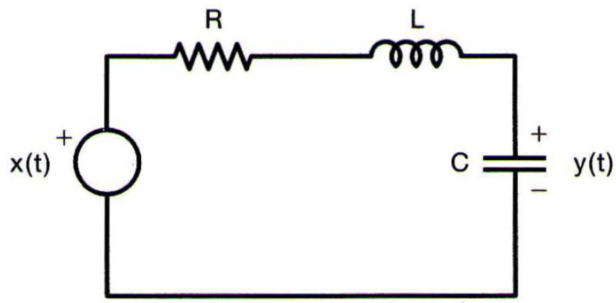
Έβδομη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 6/5/2017 Ημερομηνία Παράδοσης: 19/5/2017

Οι ασκήσεις με [$\star$] είναι **bonus**, $+10$ μονάδες η καθεμία στο βαθμό αυτής της σειράς ασκήσεων (δηλ. μπορείτε να πάρετε μέχρι $120/80$ σε αυτή τη σειρά.)

Άσκηση 1 - Κυκλώματα στο χώρο του Laplace

Έστω το κύκλωμα του Σχήματος 1, το οποίο αντιπροσωπεύει ένα ΓΧΑ σύστημα. Αν σας δίνεται ότι η



Σχήμα 1: Κύκλωμα RLC.

διαφορική εξίσωση που το περιγράφει[1] είναι η

$$LC\frac{d^2}{dt^2}y(t) + RC\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = x(t) \tag{1}$$

με $x(t)$ την τάση εισόδου (πηγή), $y(t)$ την τάση εξόδου (άκρα πυκνωτή), R η αντίσταση του αντιστάτη, L ο συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου, και C η χωρητικότητα του πυκνωτή, τότε

(α') υπολογίστε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ του κυκλώματος.

(β') βρείτε τι πρέπει να ισχύει για τις τιμές των R, L, C ώστε το σύστημα να είναι ευσταθές.

Άσκηση 2 - Αντίστροφος Μετασχ. Laplace

Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Laplace των παρακάτω συστημάτων

(α') $H(s) = \dfrac{s+2}{s^2-5s+6}$

(β') $H(s) = \dfrac{s^2-1}{2s^2+2s-2}$

(γ') $H(s) = \dfrac{2s-2}{s^2+2s+1}$

για όλα τα πιθανά πεδία σύγκλισης. Χαρακτηρίστε κάθε περίπτωση ως προς την ευστάθεια και την αιτιατότητα.

[1] Προσπαθήστε να την εξάγετε με τους νόμους του Kirchhoff αν θέλετε :-)

Άσκηση 3 - Μετασχ. Laplace και ΓΧΑ Συστήματα

Ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{(s+1)}{s^2+2s+2} \tag{2}$$

(α΄) Σχεδιάστε *όλους* τους πόλους και *όλα* τα μηδενικά της συνάρτησης.

(β΄) Υπολογίστε την κρουστική απόκριση του συστήματος, $h(t)$.

Απ.: $h(t) = e^{-t}\cos(t)u(t)$

(γ΄) Υπολογίστε την έξοδο του συστήματος για είσοδο $x(t) = e^{-|t|}$.

Απ.: $y(t) = \frac{2}{5}e^{t}u(-t) + \frac{2}{5}e^{-t}\cos(t)u(t) + \frac{4}{5}e^{-t}\sin(t)u(t)$

(δ΄) Μπορείτε να υπολογίσετε το μετασχ. Fourier του συστήματος (δηλ. την απόκριση σε συχνότητα $H(f)$) μέσω της συνάρτησης μεταφοράς $H(s)$; Αν ναι, βρείτε το $H(f)$. Αν όχι, εξηγήστε.

Άσκηση 4 - Διαφορικές Εξισώσεις και μετασχ. Laplace - I

Ένα σύστημα περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^3}{dt^3}y(t) + 6\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 11\frac{d}{dt}y(t) + 6y(t) = x(t) \tag{3}$$

1. Βρείτε την απόκριση μηδενικής κατάστασης για το σύστημα αυτό, δεδομένου ότι $x(t) = e^{-4t}u(t)$.

   Απ.: $y_{zs}(t) = \left(\frac{1}{6}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-4t} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t}\right)u(t)$

2. Βρείτε την απόκριση μηδενικής εισόδου για το σύστημα αυτό, αν για $t > 0^-$ γνωρίζετε ότι

$$y(0^-) = 1 \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}y(0^-) = -1 \tag{5}$$

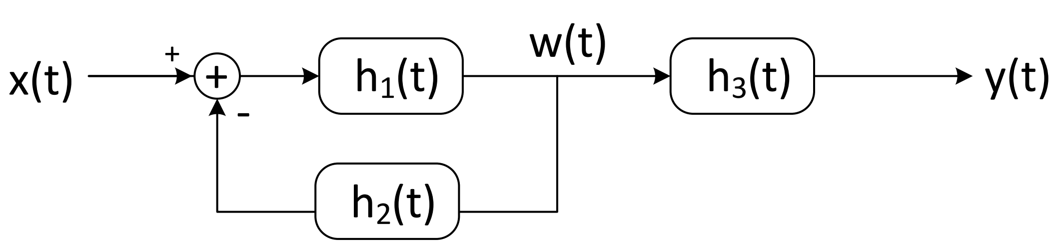
$$\frac{d^2}{dt^2}y(0^-) = 1 \tag{6}$$

   Απ.: $y_{zi}(t) = e^{-t}u(t)$

3. Βρείτε τη συνολική έξοδο του συστήματος όταν η είσοδος $x(t)$ είναι αυτή του πρώτου ερωτήματος και οι αρχικές συνθήκες είναι αυτές του δεύτερου ερωτήματος.

[⋆] Άσκηση 5 - Συστήματα Ανάδρασης στο χώρο του Laplace

Έστω το σύστημα του Σχήματος 2.



Σχήμα 2: Σύστημα Άσκησης 5.

Τέτοια συστήματα ονομάζονται *συστήματα ανάδρασης - feedback systems* και έχουν σπουδαίες εφαρμογές σε συστήματα αυτομάτου ελέγχου.

(α΄) Χρησιμοποιώντας την ενδιάμεση μεταβλητή $w(t)$, η οποία είναι έξοδος του $h_1(t)$ και είσοδος του $h_2(t)$ και του $h_3(t)$ (αλλά έμμεσα λειτουργεί και ως είσοδος στο $h_1(t)$), γράψτε τις *δυο* σχέσεις που περιγράφουν το σύστημα αυτό στο πεδίο του χρόνου. Στη μια εξίσωση, το αριστερό μέλος θα είναι $w(t)$, και στην άλλη θα είναι $y(t)$, δηλ.

$$\begin{aligned} w(t) &= f\{x(t), h_1(t), h_2(t), w(t)\} && (7) \\ y(t) &= f\{h_3(t), w(t)\} && (8) \end{aligned}$$

με $f\{\cdot\}$ να συμβολίζει τη σχέση συνάρτησης.

(β΄) Μετατρέψτε αυτές τις εξισώσεις στο χώρο του Laplace.

(γ΄) Απαλείψτε το $W(s)$ από τις παραπάνω εξισώσεις, και βρείτε μια εξίσωση που να περιλαμβάνει μόνο τα $Y(s), H_1(s), H_2(s), H_3(s), X(s)$. Ποιό είναι το συνολικό σύστημα $H(s)$ συναρτήσει των $H_1(s), H_2(s), H_3(s)$;

Απ.: $H(s) = \dfrac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)} H_3(s)$

(δ΄) Αν τα $H_1(s)$, $H_2(s)$, $H_3(s)$ δίνονται ως

$$\begin{aligned} H_1(s) &= \frac{1}{s+1}, \ \Re\{s\} > -1 && (9) \\ H_2(s) &= \frac{1}{s-1}, \ \Re\{s\} > 1 && (10) \\ H_3(s) &= \frac{1}{s+2}, \ \Re\{s\} > -2 && (11) \end{aligned}$$

χαρακτηρίστε τα ως προς την ευστάθεια και την αιτιατότητα.

(ε΄) Βρείτε το συνολικό σύστημα $H(s)$ για τα παραπάνω συστήματα, και σχεδιάστε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών του. Αποφανθείτε για το πεδίο σύγκλισής του (βρείτε πρώτα το πεδίο σύγκλισης του συστήματος χωρίς το $H_3(s)$ και συνεχίστε με βάση αυτό).

Απ.: $H(s) = \dfrac{s-1}{s^2(s+2)}, \ \Re\{s\} > 0$

(ϛ΄) Είναι το σύστημα ευσταθές και αιτιατό; Μόνο ευσταθές; Μόνο αιτιατό;

(ζ΄) Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος, $h(t)$.

Απ.: $h(t) = \frac{3}{4}u(t) - \frac{1}{2}tu(t) - \frac{3}{4}e^{-2t}u(t)$

(η΄) Αν η είσοδος του συστήματος είναι το σήμα $x(t) = e^{-t}u(-t)$, τότε μπορείτε να βρείτε την έξοδο $Y(s)$ στο χώρο του Laplace;

[$\star$] Άσκηση 6 - Διαφορικές Εξισώσεις και μετασχ. Laplace - II

Ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t)$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(α΄) Για είσοδο $x(t) = e^{2t}, \ \forall t$, παράγει έξοδο $y(t) = \frac{1}{6}e^{2t}, \ \forall t$.

(β΄) Η κρουστική του απόκριση ικανοποιεί την παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d}{dt}h(t) + 2h(t) = e^{-4t}u(t) + bu(t) \tag{12}$$

με b άγνωστη σταθερά.

Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος η οποία είναι συνεπής με τις παραπάνω πληροφορίες. Προσέξτε ότι στο αποτέλεσμά σας *δεν* πρέπει να υπάρχουν άγνωστες μεταβλητές (δηλ. η σταθερά b δεν πρέπει να υπάρχει στην απάντησή σας). Στη συνέχεια υπολογίστε την κρουστική απόκριση του συστήματος. Είναι το σύστημα ευσταθές;

$$\text{Απ.: } H(s) = \frac{2}{s(s+4)},\ \Re\{s\} > 0,\ h(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-4t}\right)u(t)$$

Άσκηση 7 - Δειγματοληψία και Διακριτά Σήματα - Ι

Θεωρήστε τα παρακάτω σήματα

$$x_1(t) = \cos(2\pi 10t) \quad (13)$$

$$x_2(t) = \cos(2\pi 50t) \quad (14)$$

τα οποία δειγματοληπτούνται με ρυθμό $f_s = 40$ Hz. Βρείτε τη μαθηματική μορφή των διακριτών σημάτων $x_1[n]$, $x_2[n]$. Σχεδιάστε τα ως προς το διακριτό χρόνο n. Τι παρατηρείτε; Εξηγήστε.

Άσκηση 8 - Δειγματοληψία και Διακριτά Σήματα ΙΙ

Θεωρήστε το σήμα

$$x_a(t) = 3\cos(2\pi 1000t) + 5\sin(2\pi 3000t) + 10\cos(2\pi 6000t) \quad (15)$$

(α΄) Ποιός είναι ο ρυθμός Nyquist για το παραπάνω σήμα;

(β΄) Έστω ότι δειγματοληπούμε το σήμα με ρυθμό $f_s = 5000$ Hz. Ποιά είναι η μαθηματική μορφή του διακριτού σήματος $x[n]$ μετά τη δειγματοληψία;

(γ΄) Ποιό είναι το σήμα συνεχούς χρόνου που μπορούμε να ανακατασκευάσουμε από τα δείγματα του $x[n]$; Είναι ίδιο με το $x_a(t)$; Γιατί;

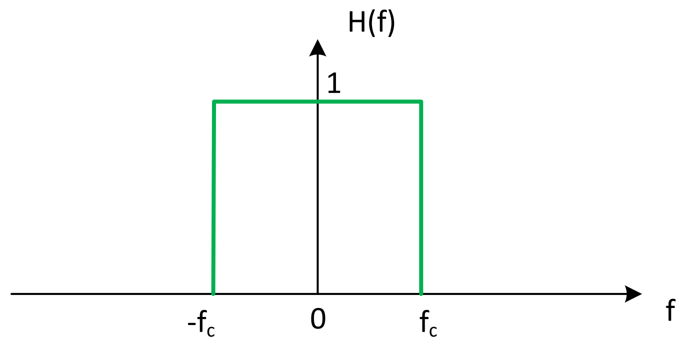
Άσκηση 9 - Σχεδίαση χαμηλοπερατού (lowpass) φίλτρου - MATLAB

Εργάζεστε σε μια από τις πρώτες εταιρίες κινητής τηλεφωνίας, και το πόστο σας είναι "μηχανικός σχεδίασης φίλτρων". Ο προϊστάμενός σας συγκαλεί σύσκεψη στην οποία αποφασίζεται ότι εσείς πρέπει να αναπτύξετε και να σχεδιάσετε ένα σύστημα με απόκριση συχνότητας $H(f)$ για εφαρμογές επικοινωνίας φωνής, το οποίο θα αποκόπτει τις συχνότητες μεγαλύτερες από κάποιο δοθέν f_c (η οποία λέγεται *συχνότητα αποκοπής - cut-off frequency*) ενώ θα κρατά όσο γίνεται ανέπαφες τις συχνότητες μικρότερες από f_c. Τέτοια συστήματα ονομάζονται *φίλτρα*, και για αυτήν την άσκηση θα αποκαλούμε έτσι το σύστημά μας.

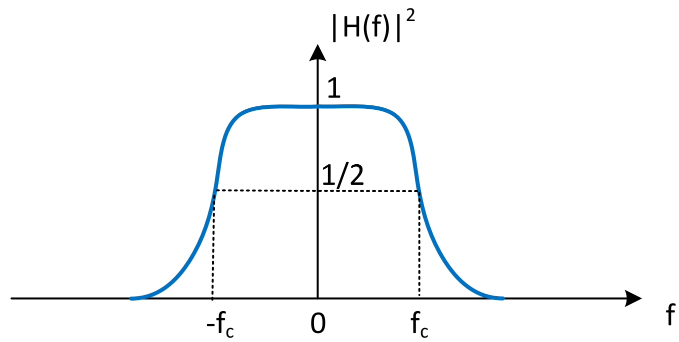
Ο προϊστάμενός σας, που δε γνωρίζει θεωρία σημάτων και συστημάτων, σας παραδίδει την απόκριση συχνότητας $H(f)$ που θέλει να φτιάξετε, στο Σχήμα 3, και σας αναφέρει ότι το ζητούμενο f_c ισούται με $f_c = 2000$ Hz, αφού το φίλτρο θα ενσωματωθεί σε στρατιωτικά ασύρματα τηλεφωνικά συστήματα, όπου το εύρος ζώνης επικοινωνίας - και το κόστος λειτουργίας (έχουμε κρίση! :-)) είναι περιορισμένο.

(α΄) Αποδείξτε του ότι η κρουστική απόκριση $h(t)$ του ζητούμενου φίλτρου είναι άπειρης διάρκειας και μη-αιτιατή, με αποτέλεσμα το φίλτρο που σας ζήτησε να μην είναι υλοποιήσιμο στην πράξη.

(β΄) Αφού τον πείσατε για την ορθότητα του παραπάνω ερωτήματος, σας αναθέτει να υλοποιήσετε ένα φίλτρο που να πλησιάζει όσο γίνεται αυτό που σας ζήτησε αρχικά, και να είναι υλοποιήσιμο. Στην προσπάθειά σας αυτή, ένας μαθηματικός φίλος σας αναφέρει ότι έχει υπόψη του μια συνάρτηση η οποία να πλησιάζει το ζητούμενο φίλτρο σας, και την οποία σχεδιάζει πρόχειρα στο χαρτί, όπως στο Σχήμα 4. Η συνάρτηση ονομάζεται *συνάρτηση Butterworth*.



Σχήμα 3: Φίλτρο $H(f)$ που θέλει ο προϊστάμενος.



Σχήμα 4: Συνάρτηση Butterworth.

Μη έχοντας καλύτερη εναλλακτική, του ζητάτε να σας δώσει τη μαθηματική περιγραφή της συνάρτησης. Σας δίνει μια περιγραφή στο χώρο της συχνότητας που βρήκε σε κάποιο μαθηματικό εγχειρίδιο, ως

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{j2\pi f}{j2\pi f_c}\right)^{2N}} \tag{16}$$

με N την τάξη της συνάρτησης, όπως σας ανέφερε. Μετατρέψτε τη συνάρτηση αυτή στο χώρο του μετασχ. Laplace, θέτοντας $s = j2\pi f$.

(γ΄) Θέλετε να μελετήσετε τη συμπεριφορά του φίλτρου - όπως το ονομάζετε πλέον - Butterworth, για να την κατανοήσετε καλύτερα. Βρείτε και σχεδιάστε τους πόλους του $|H(s)|^2$ στο s-επίπεδο.

Απ.: $s_k = 2\pi f_c e^{j\pi \frac{2k+N-1}{2N}}, \;\; k = 0, 1, 2, \cdots, 2N-1$

(δ΄) Γνωρίζετε από τη θεωρία σας ότι επειδή το φίλτρο σας είναι πραγματικό σήμα στο χρόνο, θα ισχύει

$$|H(f)|^2 = H(f)H^*(f) = H(f)H(-f) = H(s)H(-s)\Big|_{s=j2\pi f} \tag{17}$$

Επιλέξτε από τους πόλους που σχεδιάσατε ένα υποσύνολο πόλων ώστε το σύστημα που θα προκύψει από αυτά να είναι *ευσταθές και αιτιατό*. Προσέξτε ότι αν s_p είναι ένας πόλος του $H(s)$, τότε το $-s_p$ είναι πόλος του $H(-s)$.

(ε΄) Προσέξτε επίσης ότι $H(s)H(-s)\Big|_{s=0} = 1$. Υπολογίστε το $H(s)$ για $N = 1$ και $N = 2$.

Απ.: $H_{N=1}(s) = \dfrac{1}{s + 2\pi f_c}, \;\; H_{N=2}(s) = \dfrac{1}{(s - 2\pi f_c e^{j3\pi/4})(s - 2\pi f_c e^{j5\pi/4})}$

(ϛ΄) Βρείτε τη διαφορική εξίσωση *τρίτης τάξης* που περιγράφει ένα φίλτρο Butterworth με συχνότητα αποκοπής $f_c = \frac{1}{2\pi}$ Hz.

Απ.: $\dfrac{d^3}{dt^3}y(t) + 2\dfrac{d^2}{dt^2}y(t) + 2\dfrac{d}{dt}y(t) + y(t) = x(t)$

(ζ) Υλοποιήστε στο MATLAB την απόκριση φάσματος $|H(f)|$ του φίλτρου για $f_c = 2000$ Hz, δειγματοληπτώντας έναν άξονα συχνοτήτων $[-8000, 8000]$ ανά $Df = 1$ Hz, για $N = 6$, $N = 16$, και $N = 46$. Η εντολή `plot` θα σας δώσει, ως γνωστόν, τη γραφική παράσταση. Χρησιμοποιήστε την εντολή `hold on` για να τυπώσετε το ένα πάνω στο άλλο, και να παραδώσετε μαζί εκτυπωμένα τα φίλτρα σας. Η συνάρτηση `legend` θα σας βοηθήσει να κάνετε το γράφημά σας πιο περιγραφικό. Περιγράψτε τι επιρροή έχει η τάξη N του φίλτρου στο φάσμα πλάτους του γενικά, και γύρω από τη συχνότητα f_c ειδικά.

(η) Προτού παραδώσετε το φίλτρο σας στον προϊστάμενό σας ώστε να υλοποιηθεί σε κύκλωμα, θέλετε να βεβαιωθείτε ότι λειτουργεί όπως πρέπει, εξομοιώνοντάς το στο MATLAB και βάζοντας ως είσοδο μια τυπική στρατιωτική διαταγή, δωρεά του Υπουργείου Άμυνας. Θα τη βρείτε στο αρχείο military.wav, στο site του μαθήματος.

Φορτώστε το αρχείο στο MATLAB με τη - γνωστή πια - εντολή `wavread`. Η συνάρτηση `butter` υλοποιεί ένα χαμηλοπερατό φίλτρο Butterworth με τάξη N την οποία παρέχετε εσείς ως όρισμα, όπως και τη συχνότητα αποκοπής f_c, και επιστρέφει τα μηδενικά, τους πόλους, και το κέρδος (δηλ. τη σταθερά του αριθμητή) του φίλτρου $H(s)$. Με άλλα λόγια, δε μας δίνει απευθείας τη μορφή του $H(s)$, αλλά μας δίνει ό,τι χρειαζόμαστε για να το φτιάξουμε.

Τα παραπάνω γίνονται με τις εντολές

```
f = 2000;
N = 8;
[z, p, k] = butter(N, 2*pi*f, 's');
```

όπου το όρισμα `s` δηλώνει στη συνάρτηση ότι το φίλτρο μας αντιστοιχεί σε σήμα $h(t)$ συνεχούς χρόνου.

(θ) Στη συνέχεια, πρέπει από τους πόλους, τα μηδενικά, και το κέρδος, να γράψουμε το φίλτρο ως λόγο πολυωνύμων $H(s) = N(s)/D(s)$ ώστε να το χρησιμοποιήσουμε. Αυτό γίνεται εύκολα ως

```
[B, A] = zp2tf(z, p, k);
```

όπου η συνάρτηση `zp2tf`, που είναι συντομογραφία για τη φράση Zeros+Poles to Transfer Function, μετατρέπει τα μηδενικά, τους πόλους, και το κέρδος, σε ένα λόγο πολυωνύμων του s, που φυσικά δεν είναι άλλος από τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$. Η μεταβλητή `B` περιέχει τους συντελεστές του s-πολυωνύμου του αριθμητή, ενώ η μεταβλητή `A` τους αντίστοιχους του παρονομαστή.

(ι) Δείτε την απόκριση συχνότητας $H(f)$ του φίλτρου σας με χρήση των εντολών

```
W = 2*pi*[-5000:5000];
[H] = freqs(B, A, W);
subplot(211); plot(W, abs(H)); xlabel('Frequency (Hz)');
title('Magnitude Spectrum'); grid;
subplot(212); plot(W, angle(H)); xlabel('Frequency (Hz)');
title('Phase Spectrum'); grid;
```

Είναι το φάσμα πλάτους όπως περιμένατε να είναι;

(ια) Όμως ο υπολογιστής μας είναι ψηφιακός, και το σήμα military.wav που έχουμε είναι ψηφιακό. Πρέπει λοιπόν να μετατρέψουμε το φίλτρο $H(s)$ που έχουμε σε μορφή συντελεστών s-πολυωνύμου αριθμητή και παρονομαστή σε ένα *ψηφιακό* αντίστοιχό του, και να το χρησιμοποιήσουμε επάνω στο σήμα μας. Ευτυχώς για μας, κάθε αναλογικό φίλτρο μπορεί να μετατραπεί σε ψηφιακό (και ακριβέστερα, σε *διακριτού χρόνου*), με πολύ απλές τεχνικές, εκ των οποίων η απλούστερη ονομάζεται impulse invariance[2], και την οποία το MATLAB έχει έτοιμη.

```
[digital_num, digital_den] = impinvar(B, A, fs);
```

Πλέον στις μεταβλητές `digital_num` και `digital_den` έχουμε τους συντελεστές ενός ψηφιακού φίλτρου Butterworth $H_d(s)$ (που δεν περιγράφεται πλέον στο χώρο του s, δηλ. του Laplace, αλλά χάριν ευκολίας ας διατηρήσουμε το συμβολισμό).

(ιβ΄) Ας χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση `filter`, η οποία συντάσσεται ως

```
y = filter(Num, Den, x);
```

με `x` το σήμα εισόδου, και `Num, Den` τον αριθμητή και τον παρονομαστή του φίλτρου $H_d(s)$, αντίστοιχα, στη μορφή συντελεστών πολυωνύμου όπως σας επιστρέφονται από την `impinvar`. Εκτελέστε την εντολή, ακούστε το αποτέλεσμα με την εντολή `soundsc(y, fs);` και σχολιάστε το αποτέλεσμα σε σχέση με το αρχικό σήμα. Πώς θα χαρακτηρίζατε την ποιότητα του σήματος εξόδου σε σχέση με το αρχικό;

(ιγ΄) Παραδώστε ένα `plot` του τελικού σήματος, παρέα με το αρχικό σήμα.

Παραδώστε κώδικα MATLAB που εκτελεί το φιλτράρισμα επάνω στο σήμα που σας δίνεται, όποια plots και κώδικα σας ζητούνται στα υποερωτήματα, καθώς και τις απαντήσεις στις θεωρητικές ερωτήσεις σε ξεχωριστό χαρτί.

[$\star$] Άσκηση 10 - Ασύρματη Μετάδοση Δεδομένων - MATLAB

Έστω ότι θέλουμε να μεταδώσουμε ένα σήμα της μορφής

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \tag{18}$$

μέσα από ένα ασύρματο κανάλι. Ως εκ τούτου, το σήμα στο δέκτη θα έχει επηρεαστεί από το φαινόμενο *πολλαπλών διαδρομών (multipath)*[3], καθώς κι από το φαινόμενο Doppler.

Για λόγους απλότητας, έστω ότι οι πιθανές διαδρομές είναι δυο, και έστω ότι ο πομπός είναι κινούμενος (όπως το κινητό σας τηλέφωνο μέσα σε ένα αυτοκίνητο), οπότε και συμβαίνει μια μετατόπιση Doppler στη συχνότητα. Ας υποθέσουμε ότι ο δέκτης λαμβάνει το σήμα

$$r(t) = a_0 \cos\Big(2\pi(f_0 - v)\big(t - \frac{L_0}{c}\big)\Big) + a_1 \cos\Big(2\pi(f_0 - v)\big(t - \frac{L_1}{c}\big)\Big) \tag{19}$$

με $0 \leq a_i \leq 1$ η εξασθένιση του πλάτους των σημάτων, L_i οι αποστάσεις που διανύει το σήμα από τον πομπό στο δέκτη, $c = 3 \times 10^8$ m/s η ταχύτητα διάδοσης του σήματος, και v η μετατόπιση συχνότητας λόγω του φαινομένου Doppler.

(α΄) Θεωρήστε ότι $f_0 = 2000$ Hz, $v = 50$ Hz, $a_0 = 1$, $a_1 = 0.5$, και $L_0 = L_1 = 10^4$ μέτρα. Θέλουμε να σχεδιάσουμε το σήμα στο MATLAB, για διάρκεια $T = 0.1$ s. Για να το αναπαραστήσουμε, έστω ότι τμηματοποιούμε τον άξονα του χρόνου ανά $Dt = 1/10000$ s. Άρα στο MATLAB:

```
Fs = 10000;
Dt = 1/Fs;
T = 0.1;
t = 0:Dt:T;
```

[2] Λεπτομέρειες στο HY370... :-)

[3] Όπως καταλαβαίνετε, ένα σήμα στον ασύρματο χώρο δεν ακολουθεί ευθεία πορεία προς το δέκτη αλλά διαδίδεται στο χώρο, ανακλάται σε τοίχους, κτήρια, κλπ, ενώ επίσης εξασθενεί το πλάτος του. Ο δέκτης λαμβάνει ένα άθροισμα τέτοιων σημάτων.

Συμπληρώστε τις υπόλοιπες αρχικοποιήσεις, ορίστε το σήμα ως `r` και κάντε `plot(t,r)` το σήμα στο MATLAB.

(β') Χρησιμοποιώντας το γνωστό κώδικα για το μετασχ. Fourier (δίνεται πλέον ως συνάρτηση στο site του μαθήματος - `ctft`, για δική σας ευκολία[4]), αναλύστε το σήμα σας στο εύρος συχνοτήτων $[-5000, 5000]$ Hz. Επιλέξτε ανάλυση 1 Hz, δηλ.

```
Df = 1;
f = -5000:Df:5000;
```

Επιλέξτε τον Data Cursor για να βρείτε τη συχνότητα των δυο ισχυρών κορυφών στο φάσμα πλάτους. Ποιά είναι η συχνότητα που βρήκατε; Συμφωνεί με τη συχνότητα που έχετε θεωρητικά;

(γ') Θεωρήστε την εξής περίπτωση: έστω ότι η συχνότητα f_0 παραμένει στα 2 kHz, αλλά οι υπόλοιπες παράμετροι είναι *τυχαίες*, ώστε να προσομοιώσουμε μια πιο ρεαλιστική κατάσταση, όπου αυτές οι παράμετροι είναι μη προβλέψιμες (αν και σχετίζονται με κάποιο τρόπο). Θεωρήστε λοιπόν ξανά το σήμα

$$r(t) = a_0 \cos\Big(2\pi(f_0 - v)\big(t - \frac{L_0}{c}\big)\Big) + a_1 \cos\Big(2\pi(f_0 - v)\big(t - \frac{L_1}{c}\big)\Big) \quad (20)$$

με

$$\begin{aligned} v &= 50\eta \\ L_0 &= 1000\eta \\ L_1 &= 10000\eta \\ a_0 &= 1 - \eta \\ a_1 &= a_0/10 \end{aligned}$$

και το η παραπάνω αντιπροσωπεύει *τυχαία μεταβλητή* ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[0, 1]$. Η συνάρτηση `rand` του MATLAB παράγει τυχαίους αριθμούς με ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, 1]$. Γράψτε `doc rand` για να δείτε το documentation της και να δείτε πως συντάσσεται.

Δημιουργήστε 10 διαφορετικά σήματα $r(t)$ σε ένα `for` loop και προσθέστε τα μεταξύ τους, για να προσομοιώσετε μια ακραία - αλλά ρεαλιστική - κατάσταση μετάδοσης. Τυπώστε το σήμα στο χρόνο, για να παρατηρήσετε τα συσσωρευτικά φαινόμενα multipath και Doppler. Ο παρακάτω κώδικας θα σας βοηθήσει:

```
N = 10;                    % We want 10 signals
r = zeros(N, length(t));   % Memory allocation

for i = 1:N
    eta = % INSERT CODE HERE
    u = % INSERT CODE HERE
    L0 = % INSERT CODE HERE
    L1 = % INSERT CODE HERE
    a0 = % INSERT CODE HERE
    a1 = % INSERT CODE HERE
    r(i,:) = % INSERT CODE HERE
end

r_tot = sum(r,1);
```

[4] Γράψτε doc ctft για να δείτε πως συντάσσεται.

(δ') Ελέγξτε το φάσμα πλάτους του τελικού σήματος που παράξατε, με τη χρήση της συνάρτησης `ctft`. Μπορεί κανείς να ανακτήσει με σχετική ακρίβεια τη συχνότητα του σήματος εκπομπής, $x(t)$;

Παραδώστε κώδικα MATLAB για κάθε υποερώτημα όπου ζητείται. Απαντήστε σε σχόλια μέσα στον κώδικα MATLAB όποιες ερωτήσεις όπου ζητούνται.

[$\star$] Άσκηση 11 - Φιλτράρισμα - MATLAB

Γνωρίζετε το περίφημο πλέον ζεύγος μετασχηματισμού Fourier

$$A\mathrm{rect}\Big(\frac{t}{T}\Big) \longleftrightarrow AT\mathrm{sinc}(fT) \tag{21}$$

Στην Άσκηση 1 της 5ης σειράς ασκήσεων είδατε την επιρροή του τετραγωνικού παλμού στο χώρο του χρόνου, και πως η διάρκειά του επηρεάζει το χώρο της συχνότητας. Θα ήταν ενδιαφέρον να δούμε τη σχέση αυτή αντίστροφα, δηλ. με τον τετραγωνικό παλμό στο πεδίο της συχνότητας. Ας θεωρήσουμε λοιπόν τον τετραγωνικό παλμό στο χώρο της συχνότητας ως

$$H(f) = \mathrm{rect}\Big(\frac{f}{T}\Big) \tag{22}$$

και ας τον θεωρήσουμε ως ένα σύστημα, που μπορεί να δέχεται εισόδους και να παράγει εξόδους. Προφανώς, λόγω της ιδιότητας της δυικότητας, η έκφραση του συστήματος - δηλ. η *κρουστική απόκριση* - στο χώρο του χρόνου θα είναι

$$h(t) = T\mathrm{sinc}(Tt) \tag{23}$$

Ο τετραγωνικός παλμός θα λειτουργήσει ως συχνοτικό *φίλτρο*, το οποίο θα επιτρέπει τη διέλευση των συχνοτήτων που βρίσκονται εντός του διαστήματος που είναι μη μηδενικός. Το πλάτος αυτών των συχνοτήτων θα είναι μοναδιαίο. Επίσης, θα αποκόπτει τις συχνότητες που θα βρίσκονται εκτός αυτού του διαστήματος. Γιατί όμως θα έχει αυτή τη συμπεριφορά; Γιατί όπως ξέρετε (ΠΛΕΟΝ), η σχέση εισόδου-εξόδου ενός συστήματος στο χώρο της συχνότητας εκφράζεται με τη σχέση του *γινομένου* των μετασχηματισμών Fourier της εισόδου και του συστήματος. Άρα στην περίπτωσή μας, αφού ο τετραγωνικός παλμός έχει μοναδιαίο πλάτος στο διάστημα $f \in [-T/2, T/2]$ (στη συχνότητα δηλαδή!), η έξοδος στο χώρο του μετασχ. Fourier για κάθε είσοδο θα είναι.

$$Y(f) = X(f)H(f) = \begin{cases} X(f), & |f| \leq \frac{T}{2} \\ 0, & |f| > \frac{T}{2} \end{cases} \tag{24}$$

Ας δοκιμάσουμε το νέο φίλτρο μας.

(α') Υλοποιήστε στο MATLAB ένα σήμα ως άθροισμα από τρια ημίτονα, με συχνότητες $f_1 = 200, f_2 = 600, f_3 = 750$ Hz, με πλάτη και φάσεις της επιλογής σας. Σας δίνονται οι εντολές:

```
Dt = 0.0001;
t = -1:Dt:1;
Df = 1;
f = -1500:1500;
f1 = 200;
f2 = 600;
f3 = 750;
A1 = % INSERT CODE HERE
A2 = % INSERT CODE HERE
A3 = % INSERT CODE HERE
phi1 = % INSERT CODE HERE
phi2 = % INSERT CODE HERE
phi3 = % INSERT CODE HERE
x = [A1 A2 A3]*cos(2*pi*[f1 f2 f3]'*t + [phi1 phi2 phi3]'*ones(size(t)));
```

(β') Τυπώστε και παραδώστε τα τρια γραφήματα που σας επιστρέφει η συνάρτηση `ctft` (την οποία κατεβάζετε από το site του μαθήματος) για το σήμα `x`. Γράψτε `doc ctft` για να δείτε τη σύνταξη. Είναι ίδιο με αυτό που θεωρητικά αναμένατε; (αν εξαιρέσετε τα σφάλματα στα πλάτη του μετασχηματισμού)

(γ') Υλοποιήστε το φίλτρο σας στο *χρόνο*, δηλ. υλοποιήστε την κρουστική απόκριση $h(t)$. Το MATLAB έχει έτοιμη συνάρτηση `sinc`. Για να την υλοποιήσετε, χρειάζεστε την παράμετρο T:

i. Βρείτε στο χαρτί και ορίστε την παράμετρο T να είναι τέτοια ώστε αν δοθεί στο σύστημα η είσοδος `x` που δημιουργήσατε, να μένει στην έξοδο μόνο το ημίτονο των 200 Hz. Εφαρμόστε το φίλτρο στο σήμα σας με χρήση της συνάρτησης `conv`, που όπως θυμάστε, πραγματοποιεί τη συνέλιξη μεταξύ των δυο σημάτων που δέχεται ως όρισμα. Θυμίζεται ότι για σήματα συνεχούς χρόνου η συνέλιξη υλοποιείται ως `y = Dt*conv(x,h);` . Τυπώστε και παραδώστε τα γραφήματα της εξόδου `y`, με χρήση της `ctft`. Ακούστε το αποτέλεσμα με την εντολή `soundsc(y,1/Dt);` .

ii. Επαναλάβατε όλα τα παραπάνω με T τέτοιο ώστε να μένουν στην έξοδο μόνο τα ημίτονα των 200 και 600 Hz.

iii. Επαναλάβατε όλα τα παραπάνω με T τέτοιο ώστε να μένουν όλα τα ημίτονα στην έξοδο.

iv. Επαναλάβατε όλα τα παραπάνω με T τέτοιο ώστε να μη μένει κανένα ημίτονο στην έξοδο! Παρατηρείτε κάτι περίεργο στο φάσμα πλάτους; Εξηγήστε, προσέχοντας την κλίμακα πλάτους του μετασχηματισμού.

(δ') Υλοποιήστε το φίλτρο σας στη *συχνότητα*, δηλ. αντι να κάνετε συνέλιξη στο χρόνο υλοποιήστε το ισοδύναμό της στη συχνότητα, δηλ. το *γινόμενο* των μετασχηματισμών Fourier! Η συνάρτηση `ctft` επιστρέφει ως όρισμα εξόδου το μετασχηματισμό Fourier του σήματος που της δίνετε. Χρησιμοποιήστε τον τελεστή `.*` του MATLAB για να υλοποιήσετε το γινόμενο των μετασχηματισμών. Παραδώστε *μόνο* τον κώδικα που υλοποιεί το φιλτράρισμα στη συχνότητα για κάθε περίπτωση από τις παραπάνω.

Παραδώστε κώδικα MATLAB που υλοποιεί τα ερωτήματα παραπάνω, όποια plots σας ζητούνται στα υποερωτήματα, καθώς και τις απαντήσεις στις θεωρητικές ερωτήσεις σε ξεχωριστό χαρτί ή σε σχόλια στον κώδικα MATLAB.

Άσκηση 12 - Δειγματοληψία στο MATLAB

Η δειγματοληψία στο MATLAB είναι πολύ απλή υπόθεση - ουσιαστικά σε όλες τις ασκήσεις MATLAB που κάνατε ως τώρα, χρησιμοποιούσατε δειγματοληψία χωρίς να το ξέρετε! Για παράδειγμα, ένας άξονας χρόνου της μορφής

```
t = 0:0.001:1;
```

σημαίνει ότι δειγματοληπτείτε το συνεχές διάστημα $[0, 1]$ με ρυθμό $f_s = 1/0.001 = 1000$ Hz. Φροντίζαμε εμείς για σας στις προηγούμενες σειρές ασκήσεων ώστε η συχνότητα δειγματοληψίας να είναι η κατάλληλη για τα παραδείγματα που λύνατε. Τώρα θα αναλάβετε εσείς τη διαδικασία αυτή, και θα δείτε τι αποτελέσματα έχει μια δειγματοληψία που δεν υπακούει στο θεώρημα του Shannon.

(α') Έστω μια συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 2000$ Hz, σταθερή σε όλη την άσκηση. Άρα με αυτή τη συχνότητα μπορούμε να αναπαραστήσουμε συχνότητες μέχρι και 1000 Hz χωρίς aliasing.

(β') Δειγματοληπτήστε με αυτή τη συχνότητα δειγματοληψίας το συνεχές διάστημα $[0, 0.05]$.

(γ') Δημιουργήστε ένα ημίτονο των 200 Hz σε αυτό το διάστημα.

(δ') Τυπώστε το δειγματοληπτημένο σήμα με την εντολή `stem`, η οποία λειτουργεί ακριβώς όπως η `plot`. Παραδώστε τη γραφική παράσταση.

(ε') Ορίστε έναν άξονα `f` από `-fs/2` ώς `fs/2` για να αναλύσετε το σήμα σας στο χώρο της συχνότητας. Το βήμα ανάλυσής σας θα είναι `Df = 0.1` Hz.

(ϛ΄) Χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση `ctft` (την οποία κατεβάζετε από το site του μαθήματος) για να ελέγξετε το φάσμα πλάτους του. Είναι το συχνοτικό του περιεχόμενο σωστό (εξαιρουμένων των τιμών του φάσματος πλάτους);

(ζ΄) Δημιουργήστε ένα ημίτονο των 1200 Hz σε αυτό το διάστημα.

(η΄) Τυπώστε το δειγματοληπτημένο σήμα με την εντολή `stem`. Παραδώστε τη γραφική παράσταση.

(θ΄) Χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση `ctft` για να ελέγξετε το φάσμα πλάτους του. Είναι το συχνοτικό του περιεχόμενο σωστό (ξανά εξαιρουμένων των τιμών του φάσματος πλάτους); Αν ναι, γιατί; Αν όχι, γιατί;

Παραδώστε κώδικα MATLAB και όποια plots σας ζητούνται στα υποερωτήματα, καθώς και τις απαντήσεις στις θεωρητικές ερωτήσεις σε ξεχωριστό χαρτί ή σε σχόλια μέσα στον κώδικα MATLAB.