

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2016-17

Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Έκτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 25/4/2017

Ημερομηνία Παράδοσης: 5/5/2017

Οι ασκήσεις με [*] είναι **bonus**, +10 μονάδες η καθεμία στο βαθμό αυτής της σειράς ασκήσεων (δηλ. μπορείτε να πάρετε μέχρι 100/70 σε αυτή τη σειρά.)

Άσκηση 1 - Συσχετίσεις

Υπολογίστε την ετεροσυσχέτιση $\phi_{yx}(\tau)$ των δυο παρακάτω σημάτων.

$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t - \frac{1}{2}}{1}\right) \quad (1)$$

$$y(t) = \begin{cases} 1 - t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Απ.: } \phi_{yx}(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\tau^2, & 0 \leq \tau < 1 \\ \frac{1}{2} + \tau + \frac{1}{2}\tau^2, & -1 < \tau < 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Βρείτε την ετεροσυσχέτιση $\phi_{xy}(\tau)$ χωρίς να κάνετε ξανά πράξεις.

Άσκηση 2 - Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας και Αυτοσυσχέτιση

Η Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας ενός σήματος δίνεται ως

$$\Phi_{xx}(f) = \frac{2\text{sinc}(2f)}{j2\pi f + 2} \quad (3)$$

Βρείτε την αυτοσυσχέτιση του σήματος, $\phi_{xx}(\tau)$.

$$\text{Απ.: } \phi_{xx}(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < -1 \\ \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2(\tau+1)}\right), & -1 \leq \tau < 1 \\ \frac{1}{2}e^{-2(\tau-1)} - \frac{1}{2}e^{-2(\tau+1)}, & \tau \geq 1 \end{cases}$$

Άσκηση 3 - Απεριοδικές Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες

Έστω τα γνωστά σας σήματα

$$x(t) = e^{-2t}u(t) \quad (4)$$

$$y(t) = e^t u(-t) \quad (5)$$

(α) Υπολογίστε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $\phi_{xx}(\tau)$ του σήματος $x(t)$.

$$\text{Απ.: } \phi_{xx}(\tau) = \frac{1}{4}\left(e^{-2\tau}u(\tau) + e^{2\tau}u(-\tau)\right)$$

(β) Υπολογίστε τη Φασματική Πυκνότητα Ενέργειάς του $y(t)$, $\Phi_{yy}(f)$.

$$\text{Απ.: } \Phi_{yy}(f) = \frac{1}{1 + 4\pi^2 f^2}$$

(γ) Υπολογίστε τη συνάρτηση ετεροσυσχέτισης $\phi_{xy}(\tau)$ και τη Διαφασματική Πυκνότητα Ενέργειας, $\Phi_{xy}(f)$.

$$\text{Απ.: } \phi_{xy}(\tau) = (e^\tau - e^{2\tau})u(-\tau)$$

$$\Phi_{xy}(f) = \frac{1}{(2 - j2\pi f)(1 - j2\pi f)}$$

Άσκηση 4 - Μετασχηματισμός Laplace - I

Με χρήση του ορισμού, βρείτε το μετασχ. Laplace των παρακάτω σημάτων, καθώς και τα πεδία σύγκλισής τους και σχεδιάστε τα στο s -επίπεδο. Για ποιό/ά από τα παρακάτω σήματα μπορεί να υπολογιστεί ο μετασχ. Fourier μέσω του μετασχ. Laplace που βρήκατε; Σε όσα αυτό είναι δυνατό, βρείτε τον, ειδάλως εξηγήστε γιατί δεν μπορεί να υπολογιστεί.

(α) $x(t) = u(-t + 3)$

(β) $x(t) = e^{-t}u(t + 2)$

(γ) $x(t) = \sin(t)u(t)$

$$\text{Απ.: (α) } X(s) = \frac{-e^{-3s}}{s}, \quad \Re\{s\} < 0$$

$$\text{(β) } X(s) = \frac{e^{2(1+s)}}{1+s}, \quad \Re\{s\} > -1$$

$$\text{(γ) } X(s) = \frac{1}{(1+s^2)}, \quad \Re\{s\} > 0$$

[★] Άσκηση 5 - Μετασχηματισμός Laplace - II

Έστω το σήμα

$$x(t) = e^{-5t}u(t - 1) \quad (6)$$

και ο μετασχ. Laplace του, $X(s)$.

1. Βρείτε το μετασχηματισμό με χρήση του ορισμού και ορίστε την περιοχή σύγκλισής του, την οποία και πρέπει να σχεδιάσετε στο s -επίπεδο.

$$\text{Απ.: } X(s) = \frac{e^{-(s+5)}}{s+5}, \quad \Re\{s\} > -5$$

2. Βρείτε τις τιμές των A και t_0 έτσι ώστε ο μετασχ. Laplace $G(s)$ του σήματος

$$g(t) = Ae^{-5t}u(-t - t_0) \quad (7)$$

να έχει την ίδια αλγεβρική μορφή με το $X(s)$. Ποιό το πεδίο σύγκλισης του $G(s)$;

$$\text{Απ.: } G(s) = -A \frac{e^{(s+5)t_0}}{s+5}, \quad \Re\{s\} < -5$$

Άσκηση 6 - Μετασχηματισμός Laplace - III

Χρησιμοποιώντας τους πίνακες με τα ζεύγη μετασχ. Laplace, βρείτε το μετασχ. Laplace $X(s)$ και σχεδιάστε τους πόλους και τα μηδενικά μαζί με το πεδίο σύγκλισης για τα ακόλουθα σήματα:

i. $x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-3t}u(t)$

ii. $x(t) = e^{-3t}u(t) + e^{2t}u(-t)$

iii. $x(t) = e^{2t}u(t) + e^{-3t}u(-t)$

[*] **Άσκηση 7 - Μετασχηματισμός Laplace - IV**

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό δείξτε ότι

$$tu(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s^2} \quad (8)$$

με $\Re\{s\} > 0$.

[*] **Άσκηση 8 - Συμβολικός Μετασχηματισμός Fourier και Laplace**

Στην προηγούμενη σειρά ασκήσεων είδατε πως μπορεί κανείς να υπολογίσει και να χρησιμοποιήσει το μετασχ. Fourier αριθμητικά στο MATLAB. Μια εναλλακτική μορφή υπολογισμού μετασχηματισμών στο MATLAB είναι η *συμβολική μορφή*, όπου οι απαντήσεις δίνονται σε μορφή εξίσωσης και όχι αριθμητικά. Είχατε δει κάτι παρόμοιο όταν λύνατε διαφορικές εξισώσεις στο MATLAB.

Ας δούμε εδώ πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το συμβολικό υπολογισμό για να βρούμε μετασχηματισμούς Fourier και Laplace. Το MATLAB παρέχει τις συναρτήσεις `fourier`, `laplace` οι οποίες μπορούν να σας δώσουν τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς σε κλειστή μορφή.

Γνωρίζουμε ότι

$$e^{-at}u(t) \longleftrightarrow X(f) = \frac{1}{a + j2\pi f} \quad (9)$$

και

$$e^{-at}u(t) \longleftrightarrow X(s) = \frac{1}{a + s} \quad (10)$$

Ο παρακάτω κώδικας βρίσκει το μετασχ. Fourier του παραπάνω σήματος.

```
syms t f a; % Oi symbolikes metablhtes mas
a = 2; % Dinoume mia timh sto a
x = exp(-a*t)*heaviside(t); % To shma mas sto xrono
X = fourier(x, 2*pi*f) % O metasx. Fourier
```

Το MATLAB μας απαντά ότι

X =

1/(pi*f*2i + 2)

που είναι και το σωστό αποτέλεσμα. Το όρισμα $2\pi f$ είναι απαραίτητο στην κλήση της `fourier` γιατί αλλιώς θα μας επιστρέψει το αποτέλεσμα με μεταβλητή την κυκλική συχνότητα $\omega = 2\pi f$.

Ο παρακάτω κώδικας βρίσκει το μετασχ. Laplace του παραπάνω σήματος.

```
syms t f a; % Oi symbolikes metablhtes mas
a = 2; % Dinoume mia timh sto a
x = exp(-a*t)*heaviside(t); % To shma mas sto xrono
X = laplace(x) % O metasx. Laplace
```

Το MATLAB μας απαντά ότι

X =

1/(s + 2)

που είναι και το σωστό αποτέλεσμα.

Παραδώστε κώδικα MATLAB που υπολογίζει τους μετασχηματισμούς Fourier και Laplace των παρακάτω σημάτων:

- i. $x(t) = u(t - 2)$
- ii. $x(t) = e^{-t}u(t - 2)$
- iii. $x(t) = e^{-3t} \cos(2\pi t)u(t)$

iv. $x(t) = \delta(t - 2)$ (χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση dirac)

v. $x(t) = (e^{-t} + e^{-3t})u(t)$

Συμπεριλάβετε στον κωδικά σας την απάντηση που σας δίνει το MATLAB.

Δοκιμάστε να βρείτε τους μετασχηματισμούς για το σήμα

$$x(t) = (e^{-t} + e^{3t})u(t) \quad (11)$$

Τι παρατηρείτε και πώς εξηγείτε τα αποτελέσματα ;

Άσκηση 9 - Αφαίρεση ηχούς - MATLAB

Σε προηγούμενη σειρά ασκήσεων, προσθέσατε με τη βοήθεια του MATLAB ηχώ σε μια ηχογράφιση. Ένα πολύ σημαντικό - και ακόμα ερευνητικά ενεργό - πρόβλημα στην Επεξεργασία Σήματος είναι η αφαίρεση της ηχούς - (echo cancellation) από μια ηχογράφιση. Σε αυτήν την άσκηση θα προσπαθήσουμε να αφαιρέσουμε την ηχώ με τη βοήθεια της αυτοσυσχέτισης.

(α) Σας δίνονται δυο αρχεία της μορφής `echo-type_echo.wav`, στα οποία ξεκινά η ηχώ από ένα χρονικό σημείο. Σε καθένα από αυτά η ηχώ καθυστερεί όλο και περισσότερο, κάνοντας το αποτέλεσμα πολύ ενοχλητικό. Φορτώστε τα στο MATLAB και ακούστε τα - διαδοχικά, εκτελώντας τις εντολές ανά ζεύγος - με τις εντολές

```
[x1, fs] = wavread('medium_echo.wav');
soundsc(x1, fs);
```

```
[x2, fs] = wavread('heavy_echo.wav');
soundsc(x2, fs);
```

Στη συζήτηση που ακολουθεί θα αναφερόμαστε σε ένα αρχείο εξ' αυτών, για λόγους απλότητας. Εσείς πρέπει να επαναλάβετε τη διαδικασία που θα ακολουθήσουμε και για τα δυο.

(β) Γνωρίζετε από άσκηση προηγούμενης σειράς ασκήσεων ότι το σύστημα που μοντελοποιεί την ηχώ δίνεται μέσω της κρουστικής απόκρισής του ως

$$h(t) = \delta(t) + a\delta(t - t_d) \quad (12)$$

του οποίου η απόκριση σε συχνότητα $H(f)$ είναι

$$H(f) = 1 + ae^{-j2\pi f t_d} \quad (13)$$

Εμείς θέλουμε ένα σύστημα που να ακυρώνει το παραπάνω σύστημα, δηλ. ένα λεγόμενο *αντίστροφο* σύστημα $h^{inv}(t)$, το οποίο αν το συνδέσουμε σε σειρά με το παραπάνω σύστημα $h(t)$ (ή αλλιώς, αν πάρουμε την έξοδο του $h(t)$ και την βάλουμε είσοδο στο $h^{inv}(t)$), θα ακυρώνει την επίδραση του $h(t)$ σε μια οποιαδήποτε είσοδο $x(t)$. Αυτή η διαδικασία περιγράφεται με όρους συστημάτων ως εξής

$$y_{final}(t) = x(t) * h(t) * h^{inv}(t) = x(t) \quad (14)$$

Από αυτήν την σχέση εύκολα βλέπουμε ότι για να ισχύει, θα πρέπει

$$h(t) * h^{inv}(t) = \delta(t) \quad (15)$$

Το αντίστροφο σύστημα μπορεί εύκολα να βρεθεί στο χώρο της συχνότητας. Έχουμε

$$h(t) * h^{inv}(t) = \delta(t) \longleftrightarrow H(f)H^{inv}(f) = 1 \quad (16)$$

και άρα

$$H^{inv}(f) = \frac{1}{H(f)} = \frac{1}{1 + ae^{-j2\pi f t_d}} \quad (17)$$

Όμως ξέρουμε ότι

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} \quad (18)$$

και άρα

$$\frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{1}{1 + ae^{-j2\pi f t_d}} \iff Y(f) + aY(f)e^{-j2\pi f t_d} = X(f) \quad (19)$$

και εύκολα βρίσκουμε, με χρήση ιδιοτήτων μετασχ. Fourier, ότι

$$y(t) + ay(t - t_d) = x(t) \quad (20)$$

Αυτό είναι λοιπόν το σύστημα που αν πάρει ως είσοδο $x(t)$ ένα σήμα με ηχώ που ξεκινά τη χρονική στιγμή t_d και έχει πλάτος ηχούς a , θα αναλάβει να την ακυρώσει, και να μας επιστρέψει ως έξοδο $y(t)$ ένα σήμα καθαρό από ηχώ!

(γ) Όμως για να μπορέσουμε να το υλοποιήσουμε, χρειαζόμαστε να ξέρουμε πότε ξεκινά η ηχώ στο σήμα μας, δηλ. τη χρονική στιγμή t_d - αν υποθέσουμε ότι το πλάτος a της ηχούς μας είναι γνωστό¹. Παρατηρώντας το σήμα στο χρόνο, είναι αδύνατο να βρούμε πότε ξεκινά η ηχώ. Όμως, γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι μια συνάρτηση που συγκρίνει ένα σήμα με τον εαυτό του και μας βοηθά να βρούμε ομοιότητες. Επίσης γνωρίζουμε ότι η αυτοσυσχέτιση λειτουργεί συγκρίνοντας μετατοπισμένες εκδόσεις ενός σήματος με τον εαυτό του, και δίνει μεγάλες τιμές όταν υπάρχουν μεγάλες ομοιότητες.

Θα μπορούσε κανείς λοιπόν να σκεφτεί ότι η ηχώ, ως καθυστερημένο και μικρότερου πλάτους αντίγραφο του σήματος, σίγουρα θα έχει ομοιότητες με το τμήμα του σήματος που δεν έχει ηχώ (αυτό το μικρό κομμάτι στην αρχή της ηχογράφησης που ακούτε ότι είναι καθαρό - δηλ. δεν του έχει προστεθεί ηχώ γιατί ακόμα δεν έχει φτάσει στο μικρόφωνο). Οπότε αν εκτελέσουμε την πράξη της αυτοσυσχέτισης, σίγουρα θα βρούμε μια υψηλή τιμή της όταν το κομμάτι του σήματος πριν αρχίσει η ηχώ συμπέσει με το κομμάτι του σήματος που αρχίζει η ηχώ. Πότε συμβαίνει αυτό όμως; Μα φυσικά τη χρονική στιγμή t_d !

(δ) Η συνάρτηση `xcorr` του MATLAB υπολογίζει την αυτοσυσχέτιση δυο (διακριτού χρόνου) σημάτων, και επιστρέφει τις τιμές της αυτοσυσχέτισης για τις διάφορες μετατοπίσεις τ . Γράψτε `doc xcorr` για να δείτε το documentation, και χρησιμοποιήστε τη για να βρείτε το αποτέλεσμα της αυτοσυσχέτισης. Μια και οι ηχογραφήσεις που σας δίνονται είναι ψηφιακά σήματα, μπορείτε να τη χρησιμοποιήσετε κατευθείαν, χωρίς προσεγγίσεις συνεχούς χρόνου. Χρησιμοποιήστε τη σύνταξη της `xcorr` που επιστρέφει δυο ορίσματα: την αυτοσυσχέτιση και τον άξονα του χρόνου (`lags`).

(ε) Κάντε `plot` τη γραφική παράσταση της αυτοσυσχέτισης συναρτήσει των `lags`. Αναζητήστε (οπτικά) κάποιο ισχυρό `peak`, που να ξεχωρίζει από τα άλλα, για κάποια **θετική** χρονική στιγμή. Χρησιμοποιήστε τον `Data Cursor` για να βρείτε τη χρονική στιγμή αυτού του ισχυρού `peak`. Θα χρειαστεί να κάνετε μεγέθυνση κοντά στην αρχή των αξόνων. Αυτή είναι η χρονική στιγμή t_d της ηχούς!

(ς) Η συχνότητα δειγματοληψίας του σήματος είναι $f_s = 16000$ Hz. Αυτό σημαίνει ότι σε ένα δευτερόλεπτο ήχου, έχουν καταγραφεί στον υπολογιστή 16000 δείγματα-τιμές του αναλογικού σήματος που ακούτε. Σε ποίο δείγμα n_d αντιστοιχεί η χρονική στιγμή t_d που βρήκατε;

(ζ) Το σύστημα

$$y(t) + ay(t - t_d) = x(t) \quad (21)$$

είναι ένα *αναδρομικό* σύστημα συνεχούς χρόνου. Όμως εσείς έχετε τιμές του σήματος εισόδου $x(t)$ για κάποιες χρονικές στιγμές (16000 τιμές ανά ένα δευτερόλεπτο), άρα το σήμα σας είναι διακριτού χρόνου. Άρα για να υλοποιήσουμε το σύστημα αυτό στο MATLAB, το μετατρέπουμε σε διακριτού χρόνου σύστημα ως

$$y(n) + ay(n - n_d) = x(n) \iff y(n) = x(n) - ay(n - n_d) \quad (22)$$

¹Φυσικά ποτέ δεν είναι, στην πράξη!

όπου n είναι ακέραιοι αριθμοί, $x(n)$ είναι ο πίνακας - διάνυσμα της ηχογράφησης που έχετε (με ηχώ), $y(n)$ ένας πίνακας - διάνυσμα που θα παράξετε και θα περιέχει το καθαρό σήμα, και n_d η χρονική στιγμή σε δείγματα που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα.

- (η) Χρησιμοποιήστε ένα βρόχο επανάληψης για να υλοποιήσετε το παραπάνω σύστημα. Θεωρήστε ότι $y(n) = 0$, $n < n_d$ και ότι το πλάτος της ηχούς, a , είναι $a = 0.5$. Θυμηθείτε ότι η αρίθμηση των πινάκων στο MATLAB ξεκινά από το 1 (ένα). Ενδεικτικός ψευδοκώδικας παρατίθεται παρακάτω:

```
N = length(shma_me_hxw); % Diarkeia shmatos me hxw (se deigmata)

nd = % INSERT CODE HERE % To nd pou brhkate

a = 0.5; % To platos ths hxous

y = zeros(1, N); % Arxikopoihsh (san th calloc sth C)

for n = nd+1:N % Broxos opou ylopoieite to systhma
    %%%%%%%%%%%
    % INSERT CODE HERE %
    %%%%%%%%%%%
end
```

- (θ) Υλοποιήστε τη διαδικασία και για τα δυο σήματα που σας δίνονται. Ακούστε το αποτέλεσμα και σχολιάστε.

Παραδώστε κώδικα MATLAB που να καθαρίζει την ηχώ και από τα δυο σήματα.

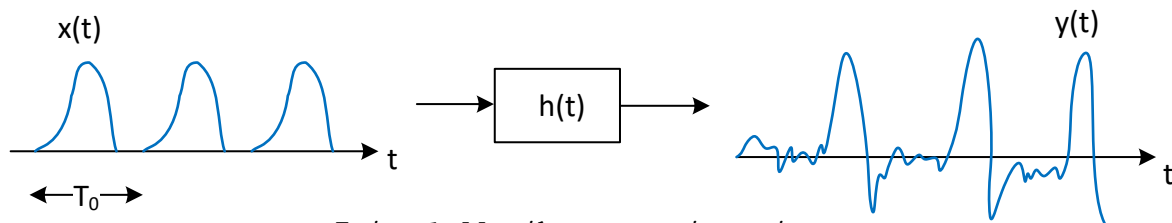
[*] Άσκηση 10 - Εύρεση θεμελιώδους συχνότητας στην ανθρώπινη φωνή - MATLAB

Ένα πολύ σημαντικό - και ερευνητικά ενεργό - πρόβλημα στην επεξεργασία σήματος φωνής είναι η ακριβής εκτίμηση της θεμελιώδους συχνότητας f_0 της ανθρώπινης φωνής, καθώς η θεμελιώδης συχνότητα χρησιμοποιείται σε πολλές εφαρμογές, όπως για παράδειγμα στη σύνθεση ομιλίας από κείμενο (text-to-speech synthesis). Μια απλή τέτοια μέθοδος εκτίμησης είναι η μέθοδος της αυτοσυσχέτισης, που δίνεται ως γνωστόν ως

$$\phi_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau)dt$$

Ας πούμε όμως μερικές ενδιαφέρουσες λεπτομέρειες πριν περάσουμε στην άσκηση.

Η ανθρώπινη φωνή - και συγκεκριμένα, ο έμφωνος λόγος - μπορεί να παρασταθεί ως ένα σύστημα $h(t)$, που στην είσοδό του υπάρχει ενέργεια (προερχόμενη από τους πνεύμονες) σε μορφή μιας περιοδικής σειράς από παλμούς, $x(t)$, η οποία καθορίζεται από τις φωνητικές χορδές, όπως στο Σχήμα 1. Πληροφοριακά και μόνο, το σήμα $x(t)$ αντιπροσωπεύει την ταχύτητα ροής του αέρα ακριβώς επάνω από τις φωνητικές μας χορδές. Η είσοδος αυτή περνά σε ένα σύστημα $h(t)$, το οποίο περιγράφει τη



Σχήμα 1: Μοντέλο παραγωγής φωνής.

φωνητική μας οδό, δηλ. τη θέση του στόματος, της γλώσσας, και των δοντιών, ανάλογα με το φώνημα που θέλουμε να εκφέρουμε. Το σύστημα $h(t)$ λειτουργεί σαν φίλτρο, που ενισχύει ή καταστέλλει συγκεκριμένες συχνότητες του σήματος εισόδου $x(t)$. Η έξοδος αυτού του συστήματος $y(t)$, είναι το σήμα

φωνής που παράγεται, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1, και αντιπροσωπεύει την πίεση των μορίων του αέρα ακριβώς έξω από το στόμα μας.

Η απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών παλμών της εισόδου $x(t)$ ονομάζεται *περίοδος* T_0 του σήματος εισόδου. Ο λόγος $f_0 = \frac{1}{T_0}$ ονομάζεται θεμελιώδης συχνότητα της φωνής μας, και αντιπροσωπεύει το ρυθμό με τον οποίο ανοιγοκλείνουν οι φωνητικές μας χορδές. Ένα άνοιγμα και κλείσιμο των φωνητικών χορδών αντιστοιχεί σε ένα παλμό του σήματος $x(t)$, όπως το βλέπετε στο Σχήμα 1. Βλέπετε ότι η περιodicότητα των φωνητικών χορδών διατηρείται και στο τελικό σήμα φωνής. Παρ'όλο που καταλαβαίνετε ότι τα σήματα δεν είναι αυστηρώς περιοδικά, μπορούμε να τα θεωρήσουμε ως τέτοια, θεωρώντας ότι συνεχίζονται επ' άπειρο, αλλά εμείς έχουμε "κόψει" ένα τμήμα τους (όπως κάνατε στην Άσκηση 1 της 5ης σειράς ασκήσεων) με χρήση ενός τετραγωνικού παλμού.

Επιστρέφοντας στην άσκηση, η εκτίμηση της απόστασης T_0 , δηλ. της περιόδου, και κατά συνέπεια της θεμελιώδους συχνότητας f_0 , μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους και σε πολλούς χώρους (χρόνο, συχνότητα, άλλους). Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή μας αυτοσυσχέτιση ώστε να βρούμε ομοιότητες του σήματος της φωνής με τον εαυτό του. Οι χρονικές θέσεις ομοιότητας θα συμβαίνουν σε πολλαπλάσια της T_0 , αφού ένα τμήμα περιοδικού σήματος παρουσιάζει ομοιότητες σε πολλαπλάσια της περιόδου του. Άρα η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης περιμένουμε να παρουσιάζει τοπικά μέγιστες τιμές (δηλ. ομοιότητα) σε αυτές τις χρονικές στιγμές.

Ας δούμε πως θα υπολογίσουμε αυτήν την τιμή της θεμελιώδους συχνότητας.

(α) Ηχογραφήστε ένα σήμα της φωνής σας όταν εκφέρετε ένα σταθερό φώνημα /α/ για περίπου τρία (3) δευτερόλεπτα. Εναλλακτικά, χρησιμοποιήστε την ηχογράφησή σας από προηγούμενη σειρά ασκήσεων.

(β) Φορτώστε το σήμα στο MATLAB με την εντολή `[s, fs] = wavread('myvoice.wav');` .

(γ) Κόψτε ένα τυχαίο τμήμα από τη φωνή σας, διάρκειας 40 ms. Αυτό μπορεί να γίνει ως

```
% As paroume ena tmhma apo th mesh
% tou shmatos
middle = round(length(s)/2);

% Diarkeias 40 ms
T = round(40*10^(-3)*fs);

% To apo8hkeuoume sto dianysma tmhma
tmhma = s(middle:middle + T);
```

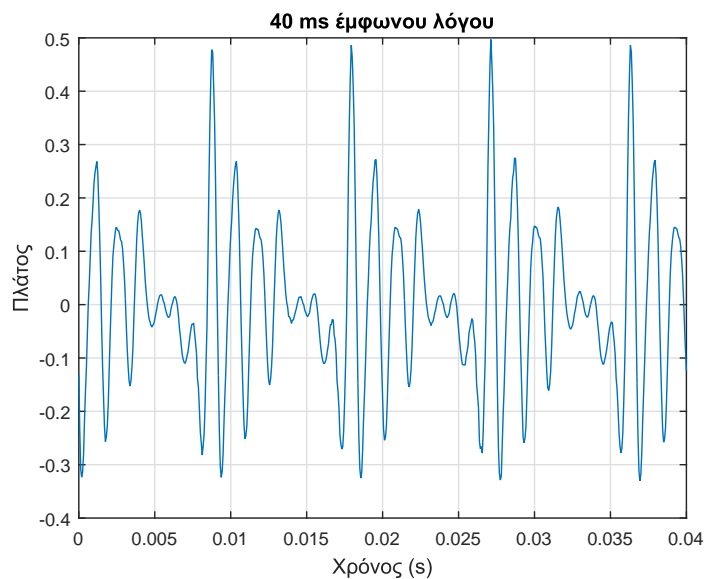
όπου εδώ κόψαμε ένα τμήμα που ξεκινούσε από τη μέση του σήματος.

(δ) Κάντε τη γραφική παράσταση αυτού του τμήματος με χρήση της συνάρτησης `plot`, ορίζοντας κατάλληλα τον άξονα του χρόνου. Αν το κάνετε σωστά, θα πρέπει να δείτε κάτι σαν το Σχήμα 2. Οι γυναίκες θα έχουν περισσότερες περιόδους μέσα σε αυτά τα 40 ms απ' αυτές που φαίνονται στο Σχήμα 2. Οι άνδρες θα έχουν περίπου τέσσερις, όπως δείχνει και το σχήμα. Είναι φυσιολογικό, μην ανησυχείτε. :-) Τυπώστε και παραδώστε ένα τμήμα του δικού σας σήματος φωνής.

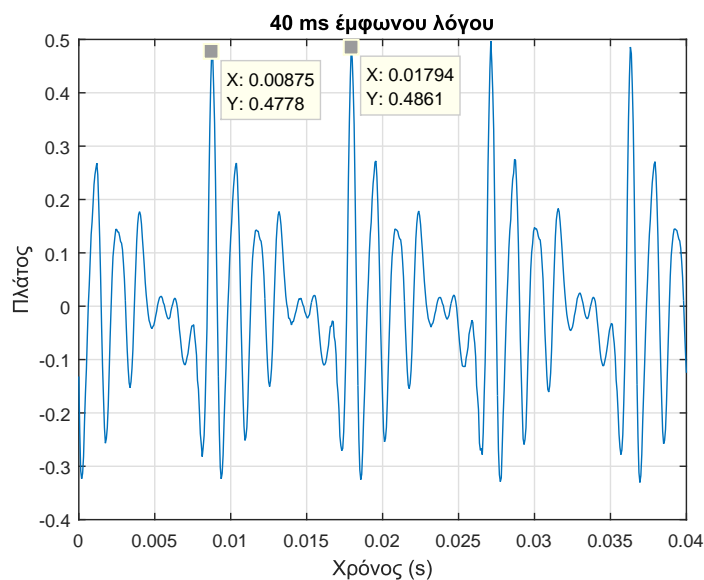
(ε) Μετρήστε με τον Data Cursor την απόσταση μεταξύ δυο περιόδων του σήματός σας. Ένας ασφαλής τρόπος είναι να μετρήσετε την απόσταση δυο διαδοχικών μεγίστων. Για το σήμα του παραδείγματος, έχουμε τις τιμές του Σχήματος 3.

Βλέπετε ότι η απόσταση είναι $T_0 = 0.00919$ s. Άρα η θεμελιώδης συχνότητα f_0 είναι $f_0 = 1/T_0 = 108.8$ Hz. Ποιά η θεμελιώδης συχνότητα στο δικό σας τμήμα φωνής;

(ς) Ας δούμε πως μπορούμε να αυτοματοποιήσουμε τη διαδικασία εύρεσης της θεμελιώδους συχνότητας. Υπολογίστε την αυτοσυσχέτιση $\phi_{xx}(\tau)$ με χρήση της συνάρτησης του MATLAB `xcorr` ως



Σχήμα 2: Σήμα (ανδρικής) φωνής για το φώνημα /α/.



Σχήμα 3: Υπολογισμός περιόδου.

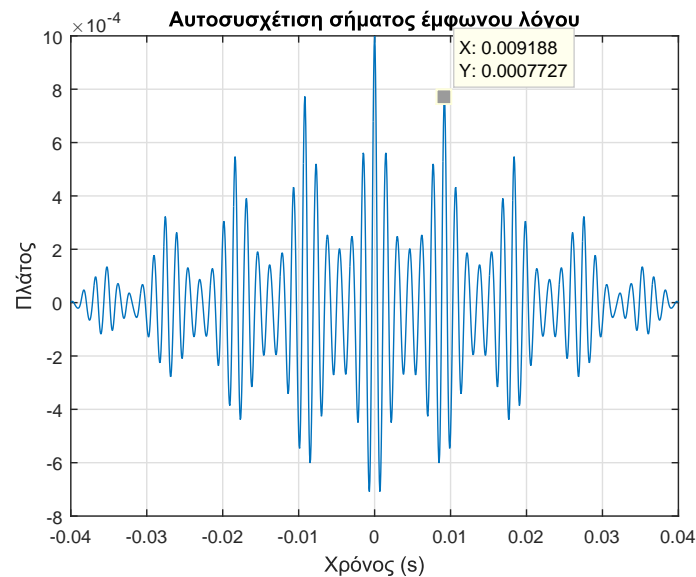
```
% Autosysxetish
Dt = 1/fs;
r = Dt*xcorr(tmhma);

% Αξονας χρόνου
t_r = % INSERT CODE HERE

% Grafikh parastash
plot(t_r, r);
```

Αν το κάνετε σωστά, θα πρέπει να βρείτε κάτι σαν το Σχήμα 4. Τυπώστε και παραδώστε την αυτοσυσχέτιση του δικού σας σήματος φωνής.

(ζ) Παρατηρήστε στο Σχήμα 4 ότι το πρώτο μέγιστο (πλην της τιμής $\phi_{xx}(0)$), όπου ξέρετε ότι αντιπρο-



Σχήμα 4: Αυτοσυσχέτιση σήματος (ανδρικής) φωνής.

σωπεύει την ενέργεια του σήματος) βρίσκεται τη θετική χρονική στιγμή $\tau = 0.009188$ s. Αυτή η χρονική στιγμή είναι μια στιγμή μεγάλης ομοιότητας του σήματος με τον εαυτό του, άρα σίγουρα θα συμβαίνει όταν το $x(t + \tau)$ της αυτοσυσχέτισης έχει μετατοπιστεί κατά διάστημα τ διάρκειας μιας περιόδου. Αντίστοιχα, το δεύτερο μέγιστο βρίσκεται τη χρονική στιγμή $\tau = 0.01837$ s, όπου αντιστοιχεί σε μετατόπιση του $x(t + \tau)$ κατά διάστημα τ δυο περιόδων, κ.ο.κ.

(η) Η θεμελιώδης συχνότητα f_0 με χρήση της τιμής του πρώτου μεγίστου είναι $f_0 = 1/0.009188 = 108.8$ Hz, που συμφωνεί με τη μέτρησή μας στην αρχική κυματομορφή.

(θ) Όμως η μέθοδος της αυτοσυσχέτισης, όπως τη δείξαμε, βασίζεται ξανά σε “χειροκίνητη” εύρεση του πρώτου μεγίστου, μέσω του Data Cursor. Επίσης, παρατηρήστε ότι υπάρχουν κι άλλες σημαντικές κορυφές (peaks) πριν το πρώτο μέγιστο που επιλέξαμε. Πώς θα επιλέξουμε αυτόματα το σωστό peak; Γράψτε κώδικα MATLAB που χρησιμοποιεί τη συνάρτηση `max` του MATLAB και βρίσκει το σωστό peak της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης, αν γνωρίζετε ότι τα όρια θεμελιωδών συχνοτήτων στους ενήλικες είναι στο διάστημα [70, 260] Hz. Υπόδειγμα κώδικα δίνεται παρακάτω:

```
% Oria syxnohtwn
Fr_limits = [70 , 260];

% Metatroph se seconds
Time_limits = flipplr(1./Fr_limits); % Dinei [0.004 0.0143]

% Metatroph seconds se deigmata
% Se 1 sec antistoixoun fs deigmata
% Se 0.0143 h' 0.004 sec, posa deigmata?
Sample_limits = % INSERT CODE HERE

% Mono to 8etiko miso ths
% autosysxetishs mas endiaferei
middle = round(length(r)/2);

% Koboume to diasthma pou brhkame
tr_new = tr(middle + [Sample_limits(1):Sample_limits(end)]);
```

```

r_new = r(middle + [Sample_limits(1):Sample_limits(end)]);

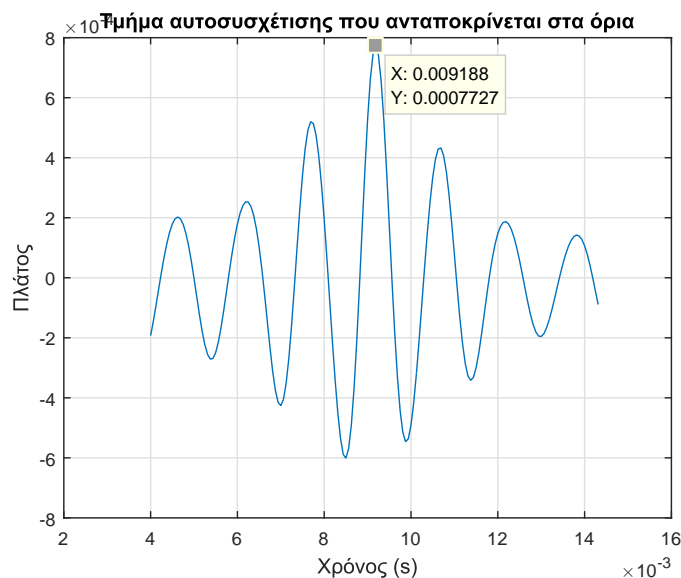
% As to doume
plot(tr_new, r_new);

% Xrhsh ths max gia na broume to megisto kai th 8esh tou
% sto do8en diasthma-tmhma ths r_new
% Grapste doc max gia na deite pws na th xeiristeite

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%           INSERT CODE HERE           %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

Αν το κάνετε σωστά, θα πρέπει να βρείτε ένα τμήμα όπως στο Σχήμα 5, και αν γράψετε σωστά τον κώδικα που λείπει, θα πρέπει να έχετε σε μια μεταβλητή τη σωστή χρονική στιγμή ($t = 0.009188$).



Σχήμα 5: Τμήμα αυτοσυσχέτισης που ανταποκρίνεται στα όρια συχνοτήτων.

(ι) Τα όρια που δόθηκαν παραπάνω αφορούν τους ενήλικες. Μια πιο ακριβής τμηματοποίηση του εύρους της θεμελιώδους συχνότητας f_0 είναι

- $[70 - 150]$ Hz για τους άνδρες.
- $[150 - 250]$ Hz για τις γυναίκες.

Η συχνότητα που βρήκατε εσείς ανταποκρίνεται στο σωστό διάστημα του φύλου σας;

Παραδώστε κώδικα MATLAB που να υπολογίζει αυτόματα τη θεμελιώδη συχνότητα f_0 του δικού σας σήματος φωνής, μαζί με όσα σχετικά plots ζητούνται στα υποερωτήματα παραπάνω. Γράψτε όποιες απαντήσεις ζητούνται σε σχόλια μέσα στον MATLAB κώδικα.