ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2016-17
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Πέμπτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 1/4/2017 Ημερομηνία Παράδοσης: 25/4/2017

Οι ασκήσεις με [$\star$] είναι **bonus**, $+10$ μονάδες η καθεμία στο βαθμό αυτής της σειράς ασκήσεων (δηλ. μπορείτε να πάρετε μέχρι $100/80$ σε αυτή τη σειρά.)

Άσκηση 1 - Μετασχηματισμός Fourier

Γνωρίζετε εδώ και αρκετές διαλέξεις το ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier, και πρόσφατα μάθατε το μετασχηματισμό Fourier αυτού. Εδώ θα δούμε πως η γνώση των δυο αυτών θεωριών εφαρμόζεται στην πράξη.

(α΄) Έστω ένα περιοδικό σήμα

$$x(t) = \sum_{k=1}^{2} \frac{A}{\pi k} \cos(2\pi 100 k t) \tag{1}$$

Βρείτε το Μετασχ. Fourier του, $X(f)$, και σχεδιάστε τον.

(β΄) Το παραπάνω σήμα είναι περιοδικό, και ως εκ τούτου δεν υπάρχει στην πράξη. Μπορούμε όμως στην πράξη να φτιάξουμε ένα τμήμα του παραπάνω σήματος, που ξεκινά μια χρονική στιγμή και τελειώνει μετά από ένα διάστημα. Για να μελετήσουμε ένα τέτοιο σήμα, θεωρούμε ότι πολλαπλασιάζουμε το παραπάνω σήμα $x(t)$ με ένα τετραγωνικό παλμό $r(t)$ διάρκειας T, δηλ. έχουμε το σήμα

$$x_r(t) = x(t)r(t) = x(t)\mathrm{rect}\Big(\frac{t}{T}\Big) \tag{2}$$

Σχεδιάστε το σήμα $r(t)$ στο χρόνο. Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του, $R(f)$, και σχεδιάστε τον.

(γ΄) Έχουμε λοιπόν το $x_r(t)$ ως

$$x_r(t) = x(t)r(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{2} \frac{A}{\pi k} \cos(2\pi 100 k t), & t \in [-T/2, T/2] \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{3}$$

Σχεδιάστε μερικές περιόδους του $x(t)$ με τη βοήθεια του MATLAB (μην παραδώσετε κώδικα ή γράφημα, απλά αντιγράψτε στο χαρτί το γράφημα που θα σας δώσει το MATLAB), και μετά σχεδιάστε το $x_r(t)$.

(δ΄) Γνωρίζουμε λοιπόν όλη την απαραίτητη πληροφορία στη συχνότητα για το $x(t)$ και το $r(t)$ αλλά δε γνωρίζουμε τίποτα - ακόμα - για το συχνοτικό περιεχόμενο του $x_r(t)$. Ας ξεκινήσουμε από το γεγονός ότι το γινόμενο $x_r(t) = x(t)r(t)$ γίνεται συνελιξη στο χώρο της συχνότητας, $X_R(f) = X(f) * R(f)$. Βρείτε το $X_R(f)$ χρησιμοποιώντας γνωστές ιδιότητες της συνέλιξης.

(ε΄) Σχεδιάστε ποιοτικά το $X_R(f)$, υποθέτωντας ότι η διάρκεια του παλμού, T, είναι "αρκετά" μεγάλη. Προσέξτε ότι το T ελέγχει τα σημεία μηδενισμού του μετασχ. Fourier του τετραγωνικού παλμού. Τι παρατηρείτε; Τι συνέβη σε σχέση με το "ιδανικό" φάσμα του $X(f)$; Συγκρίνετε και σχολιάστε. Το φαινόμενο που παρατηρείτε ονομάζεται *φασματική διαρροή - spectral leakage*.

(ϛ΄) Σχεδιάστε ξανά ποιοτικά το $X_R(f)$, υποθέτωντας τώρα ότι η διάρκεια του παλμού, T, είναι "αρκετά" μικρή. Τι πρόβλημα παρατηρείτε;

Άσκηση 2 - Μετασχηματισμός Fourier και Ιδιότητες - I
Χρησιμοποιήστε τις ιδιότητες και τους πίνακες με ζεύγη μετασχ. Fourier των σημειώσεών σας για να υπολογίσετε το μετασχ. Fourier των παρακάτω σημάτων:

(α΄) $x(t) = \sin(2\pi t)e^{-t}u(t)$

(β΄) $x(t) = te^{-3|t-1|}$

(γ΄) $x(t) = \dfrac{2\sin(3\pi t)}{\pi t}\dfrac{\sin(2\pi t)}{\pi t}$

(δ΄) $x(t) = \dfrac{d}{dt}(te^{-2t}\sin(t)u(t))$

(ε΄) $x(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} \frac{\sin(2\pi\tau)}{\pi\tau}d\tau$

(ϛ΄) $x(t) = e^{-t+2}u(t-2)$

(ζ΄) $x(t) = \dfrac{\sin(t)}{\pi t} * \dfrac{d}{dt}\dfrac{\sin(2t)}{\pi t}$

[⋆] **Άσκηση 3 - Μετασχηματισμός Fourier και Ιδιότητες - II**
Χρησιμοποιήστε τις ιδιότητες και τους πίνακες με ζεύγη μετασχ. Fourier των σημειώσεών σας για να υπολογίσετε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier των παρακάτω σημάτων:

(α΄) $X(f) = \dfrac{j2\pi f}{(1+j2\pi f)^2}$

(β΄) $X(f) = \dfrac{1}{j2\pi f(j2\pi f+2)} - \dfrac{1}{2}\delta(f)$

(γ΄) $X(f) = \dfrac{4\sin^2(2\pi f)}{(2\pi f)^2}$

Άσκηση 4 - Γρίφος! :-)
Έστω ένα σήμα $x(t)$ με μετασχ. Fourier $X(f)$. Έστω ότι μας δίνουν τα παρακάτω στοιχεία:

1. Το $x(t)$ είναι πραγματικό και έχει μόνο θετικές τιμές.
2. $\mathrm{F}^{-1}\{(1+j2\pi f)X(f)\} = Ae^{-2t}u(t)$, με σταθερό A.
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = 1$

Βρείτε μια κλειστή έκφραση για το $x(t)$.

<u>Απ.:</u> $x(t) = \sqrt{12}e^{-t}u(t) - \sqrt{12}e^{-2t}u(t)$

Άσκηση 5 - ΓΧΑ συστήματα στο χώρο του Fourier
Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα το οποίο παράγει έξοδο

$$y(t) = (2e^{-t} - 2e^{-4t})u(t) \tag{4}$$

όταν στην είσοδο εμφανίζεται το σήμα

$$x(t) = (e^{-t} + e^{-3t})u(t) \tag{5}$$

(α΄) Βρείτε την απόκριση συχνότητας $H(f)$ του συστήματος.

<u>Απ.:</u> $H(f) = \frac{3(3+j2\pi f)}{(4+j2\pi f)(2+j2\pi f)}$

(β΄) Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος, $h(t)$.

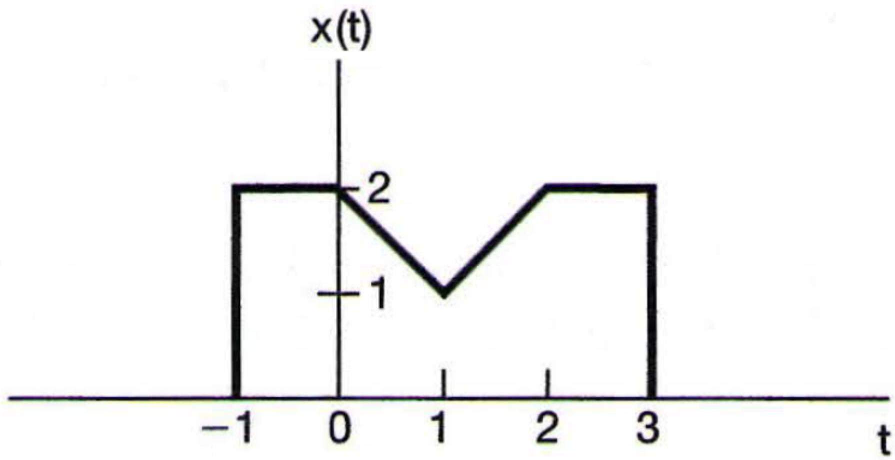
<u>Απ.:</u> $h(t) = \frac{3}{2}(e^{-4t} + e^{-2t})u(t)$

(γ΄) Μπορείτε να βρείτε μια διαφορική εξίσωση που να σχετίζει την παραπάνω είσοδο με την παραπάνω έξοδο;

<u>Απ.:</u> $\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 6\frac{d}{dt}y(t) + 8y(t) = 9x(t) + 3\frac{d}{dt}x(t)$

Άσκηση 6 - Ιδιότητες Μετασχ. Fourier - III

Έστω $X(f)$ ο μετασχ. Fourier του σήματος $x(t)$, το οποίο φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Σήμα $x(t)$ Άσκησης 6.

(α΄) Ο μετασχηματισμός μπορεί να γραφεί στη μορφή $A(f)e^{j\Theta(f)}$, με $A(f)$ και $\Theta(f)$ πραγματικές συναρτήσεις. Βρείτε τη $\Theta(f)$.

(β΄) Υπολογίστε το $X(0)$.

(γ΄) Υπολογίστε το $\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)df$.

(δ΄) Υπολογίστε το $\int_{-\infty}^{+\infty} 2X(f)\frac{\sin(2\pi f)}{2\pi f}e^{j4\pi f}df$.

(ε΄) Υπολογίστε το $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$.

Άσκηση 7 - Υπολογισμός Μετασχ. Fourier στο MATLAB

Συζητήσαμε αρκετά στις διαλέξεις για τον μετασχ. Fourier και βρήκαμε τη μαθηματική του έκφραση για αρκετά γνωστά μας σήματα. Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα του μετασχ. Fourier στο MATLAB, θα πρεπει να πάρουμε δείγματα από τον άξονα του χρονου και τον άξονα της συχνότητας, ώστε να κατασκευάσουμε το γινόμενο $x(t)e^{-j2\pi ft}$ και να το ολοκληρώσουμε.

Το MATLAB φυσικά έχει δική του συνάρτηση που υπολογίζει τον μετ. Fourier ενός σήματος, και λέγεται `fft` . Παρ' όλα αυτά, εμείς θα φτιάξουμε τη δική μας, για να έχουμε απόλυτο έλεγχο και γιατι η `fft` απαιτεί κάποιες γνώσεις παραπάνω για να τη χρησιμοποιήσετε.

Θυμηθείτε, στο MATLAB, όλα είναι πίνακες, άρα έχουν διακριτές τιμές. Έχετε δει σε προηγούμενη σειρά ασκήσεων πώς υπολογίζουμε στο MATLAB ένα ολοκλήρωμα. Παρόμοια θα δουλέψουμε και εδώ, μόνο που το ολοκλήρωμά μας δε θα είναι τιμή, αλλά ένας πίνακας $[1 \times L]$, που θα περιέχει μερικές τιμές της συνάρτησης $X(f)$, δηλ. του μετασχ. Fourier που ψάχνουμε.

(α') Έστω ότι θέλουμε να δημιουργήσουμε ένα σήμα διάρκειας 10 δευτερολέπτων. Όπως γνωρίζετε ήδη, ο χρόνος των 10 δευτερολέπτων έχει άπειρες χρονικές στιγμές, οπότε θα πρέπει να διαλέξουμε κάποιες τιμές του σήματος. Έστω ότι θέλουμε να παίρνουμε τιμές ανά 0.01 δευτερόλεπτα. Ας δημιουργήσουμε πρώτα τον άξονα του χρόνου που θα χρησιμοποιηθεί για να πάρουμε τιμές από το σήμα μας. Θα είναι:

```
Dt = 1/100;      % To bhma mas
D = 10;          % H diarkeia tou shmatos sto xrono
t = 0:Dt:D;      % O a3onas tou xronou (opws ton 3erete)
```

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε το συχνοτικό περιεχόμενο ενός σήματος στο διάστημα $[-3\pi, 3\pi]$, με ίδια "ανάλυση" όπως και στο πεδιο του χρόνου, δηλ. 0.01 Hz. Κατασκευάζουμε τον άξονα των συχνοτήτων ως:

```
Df = 0.01;            % To bhma mas sth syxnothta
f = -3*pi:Df:3*pi;    % O a3onas twn syxnothtwn [-3pi, 3pi]
```

Θεωρούμε λοιπόν ότι μας ενδιαφέρουν μόνο οι παραπάνω συχνότητες $[-3\pi, 3\pi]$, με ανάλυση Df, και ότι σε αυτό το διάστημα θα υπολογίσουμε τον μετασχ. Fourier. Άρα ουσιαστικά θα βλέπουμε τον μετασχ. Fourier μόνο στο διάστημα $[-3\pi, 3\pi]$. Γνωριζοντας τα δείγματα του χρόνου και της συχνότητας μπορούμε να κατασκευάσουμε το λεγόμενο *πίνακα ανάλυσης* του μετασχ. Fourier:

```
M = exp(-j*2*pi*f'*t);
```

Δείτε τη διάστασή του στο MATLAB και προσπαθήστε να καταλάβετε τι περιέχει σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη του. Αναφέρετε τα συμπεράσματά σας.

(β') Έστω ότι θέλουμε να βρούμε το φάσμα πλάτους του γνωστού σήματος

$$x(t) = e^{-at}u(t), \ \ a > 0 \tag{6}$$

του οποίου γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι είναι

$$|X(f)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4\pi^2 f^2}} \tag{7}$$

Ας δημιουργήσουμε και σχεδιάσουμε το σημα μας, για $a = 1$:

```
a = 1;
x = exp(-a*t);
plot(t,x);
xlabel('Time (s)');
title('Signal x(t) = exp(-at)');
```

Για να υπολογίσουμε τον μετασχ. Fourier, θα δουλέψουμε όπως για το ολοκλήρωμα Riemann σε προηγούμενη σειρά ασκήσεων, δηλ. θα δημιουργήσουμε την προσέγγιση του μετασχ. Fourier ως

$$X(f) = \lim_{\Delta t_i \to 0} \Delta t_i \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \Big(x(\Delta t_i) e^{-j2\pi f \Delta t_i} \Big) \tag{8}$$

και όπως έχουμε δει σε προηγούμενες σειρές ασκήσεων, αυτό στο MATLAB υλοποιείται ως

```
X = Dt*x*M.';    % Prosoxh sto .' !
```

(γ΄) Ας συγκρίνουμε το φάσμα πλάτους του παραπάνω με το θεωρητικό φάσμα πλάτους που ξέρουμε.

```
Xtheoretic = 1./(a + j*2*pi*f);
plot(f, abs(X)); grid;
hold on; plot(f, abs(Xtheoretic), 'r--');
hold off;
```

Μοιάζουν τα δυο φάσματα;

(δ΄) Για να προσπαθήσουμε τώρα να συνθέσουμε το σήμα στο χρόνο μέσω του αντίστροφου μετασχ. Fourier, δηλ. ας προσπαθήσουμε να βρούμε το σήμα στο χρόνο, το $x(t)$! Ο μετασχ. Fourier που έχουμε βρει ορίζεται μόνο στο διάστημα $[-3\pi, 3\pi]$, αρα σίγουρα θα έχουμε κάποιο σφάλμα στον υπολογισμό του $x(t)$. Για να δούμε όμως...
Γνωριζοντας τα δείγματα του χρόνου και της συχνότητας μπορούμε να κατασκευάσουμε το λεγόμενο *πίνακα σύνθεσης* του μετασχ. Fourier:

```
Minv = exp(j*2*pi*t'*f);
```

Δείτε τη διάστασή του στο MATLAB και προσπαθήστε να καταλάβετε τι περιέχει σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη του. Αναφέρετε τα συμπεράσματά σας.

(ε΄) Για να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier, θα δουλέψουμε όπως για το ολοκλήρωμα Riemann προηγουμένως, με μικρές διαφοροποιήσεις, δηλ. θα δημιουργήσουμε την προσέγγιση του αντίστροφου μετασχ. Fourier ως

$$x(t) = \lim_{\Delta f_i \to 0} \Delta f_i \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \Big(X(\Delta f_i) e^{j2\pi \Delta f_i t} \Big) \tag{9}$$

Η σύνθεση του σήματος στο χρόνο γίνεται ως

```
x_est = Df*X*Minv.';    % Prosoxh sto .' !
```

Λόγω αριθμητικών σφαλμάτων, θα δείτε ότι το σήμα που λαμβάνετε είναι μιγαδικό (ενώ προφανώς δεν πρέπει να είναι). Επιβεβαιώστε το, ελέγχοντας τις τιμές του φανταστικού μέρους (συνάρτηση `imag`) του `x_est`. Ουσιαστικά λοιπόν, μόνο το πραγματικό μέρος έχει σημασία. Τυπώστε στον ίδιο άξονα το γράφημα του πραγματικού μέρους (συνάρτηση `real`) και το κανονικό $x(t)$. Είναι τα ίδια; Αν όχι, γιατί;

Παραδωστε κώδικα και γραφήματα για όλα τα παραπάνω ερωτήματα, και απαντήστε και σε όσα θεωρητικά ερωτήματα έχουν τεθεί.

Άσκηση 8 - Μετασχηματισμός Fourier και Παθολογία Φωνής

Ο Μετασχ. Fourier είναι ένα εξαιρετικά χρήσιμο εργαλείο σε πολλούς τομείς της Επεξεργασίας Σήματος. Ένας τομέας είναι η ανίχνευση παθολογίας φωνής.

(α΄) Ηχογραφήστε τη φωνή σας όταν εκφέρετε το φώνημα /α/, σταθερά, για περιπου 3 δευτερόλεπτα. Φροντίστε να βρίσκεστε σε ήσυχο περιβάλλον, και προσπαθήστε να χρησιμοποιήσετε κανονικό μικρόφωνο (όχι τα ενσωματωμένα των laptops). Χρησιμοποιήστε ένα προγραμμα ηχογράφησης της επιλογής σας και φροντίστε η ηχογράφηση να είναι μονοφωνική (δηλ. όχι στέρεο - δικαναλική) και να γίνει σε συχνότητα δειγματοληψίας 16000 Hz, και ακρίβεια αποθήκευσης 16 bits σε μορφη .WAV. Σας δίνεται και ένα ενδεικτικό σήμα στο site του μαθήματος.

(β΄) Χρησιμοποιήστε τον κώδικα ανάλυσης μετασχ. Fourier που σας δόθηκε στην προηγούμενη άσκηση για να αναλύσετε το σήμα όπως περιγράφεται παρακάτω:

- Επιλέξτε ένα τμήμα (ή, όπως λέμε στην ορολογία της Επεξεργασίας Σήματος, ένα *παράθυρο*) φωνής, με διάρκεια περίπου 50 ms, κατά προτίμηση από τη μέση περιπου της ηχογράφησης. Στο MATLAB, αυτό μπορεί να γίνει ως:

```
[s, fs] = wavread('myvoice.wav');  % Fortwnw to shma fwnhs pou
                                   % hxografhsa
start = 1                          % Estw oti to para8uro mou 8elw
                                   % na 3ekinaei ap'to 1 sec...
finish = 1.05 ;                    % ...kai na teleiwnei meta apo
                                   % 50 ms
start_s = round(start*fs);         % Metatrepw to xrono se deigmata
finish_s = round(finish*fs);       % Omoia
segment = s(start_s:finish_s);     % Kobw to kommati pou 8elw
plot([start_s:finish_s]./fs, segment); % As to doume! :)
```

- Στη μεταβλητή `segment` έχετε ένα τμήμα φωνής σας διάρκειας 50 ms. Χρησιμοποιήστε κώδικά ανάλυσης Fourier για να αναλύσετε το σήμα σας στην περιοχή 2000 ως 4000 Hz. Βρειτε το μετασχ. Fourier και απεικονίστε γραφικά το φάσμα πλάτους, με χρήση των εντολών `abs, plot`, όπως στην προηγούμενη άσκηση. Στον κώδικα της ανάλυσης, χρησιμοποιήστε μικρό βήμα στη συχνότητα, της τάξης του 1 Hz, δηλ.

```
Df = 1;
f = 2000:Df:4000;
```

- Αν το φάσμα πλάτους που θα δείτε, παρουσιάσει μια συμμετρία ως προς τη συχνότητα 3000 Hz, τότε υπάρχει μια πιθανότητα 30% να αναπτύξετε ασθένεια στο φάρυγγά σας τα επόμενα 5 χρόνια. :-(Αν δείτε κάτι, στείλτε e-mail στους βοηθούς για να σας καθησυχάσουν. :-)

Παραδωστε κώδικα που υπολογίζει το μετασχ. Fourier ενός τυχαίου παραθύρου φωνής, και τυπώνει το φάσμα πλάτους του, μαζί με ένα plot αυτού του φάσματος.

[$\star$] Άσκηση 9 - Επέκταση της προηγούμενης άσκησης

Ίσως να σκεφτήκατε ότι το να πάρουμε ένα τυχαίο κομμάτι απ΄ το σήμα φωνής μας και αφού το αναλύσουμε, να βγάλουμε απόφαση για κάτι τόσο σοβαρό όπως μια πιθανή παθολογία, είναι λίγο ριψοκίνδυνο και επιπόλαιο. Κάτι πιο ασφαλές θα ήταν το εξής:

(α΄) Χωρίστε όλο το σήμα σε παράθυρα διάρκειας 50 ms, με μια επικάλυψη γειτονικών παραθύρων της τάξης του 50%, δηλ. "προχωράτε" το παράθυρό σας πάνω στο σήμα της φωνής κάθε 25 ms, ωστε τα παράθυρά σας να επικαλύπτονται κατά μισό παράθυρο. Αν σας φαίνεται δύσκολο, μπορείτε να μη χρησιμοποιήσετε επικάλυψη. Αυτό μπορείτε να το κάνετε με χρήση βρόχων επανάληψης όπως τους γνωρίζετε από τη C (for, while) - δε διαφέρουν πολύ. Γράψτε help for, help while για να δείτε πως συντάσσονται. Σκεφτείτε οτι απλά πρέπει να διατρέχετε ένα πίνακα-γραμμή (που είναι το σήμα σας) ανά κάποιο αριθμό στοιχείων.

(β΄) Υπολογίστε το μετασχ. Fourier για τις συχνότητες $2000 - 4000$ Hz και βρείτε το φάσμα πλάτους του κάθε παραθύρου. Αποθηκεύστε το φάσμα πλάτους κάθε παραθύρου σε μια γραμμή ενός πίνακα X. Αυτό μπορεί να γίνει ως εξής:

```
% Estw N to plh8os twn para8yrwn se olo to shma
for i = 1:N
    % Estw oti sth metablhth seg exw to
    % twrino para8yro pou epe3ergazomai
    MF = dt*seg*M.';           % Ypologizw to MF opws gnwrizw
    Fasma_platous = abs(MF);   % Briskw to fasma platous
    Y(i, :) = Fasma_platous;   % To apo8hkeuw sthn i-osth grammh
                               % tou pinaka Y
end
```

(γ΄) Να υπολογίσετε το "μέσο φάσμα πλάτους ", δηλ. μια μέση τιμή όλων των φασμάτων πλάτους που έχετε βρει, έτσι ώστε στο τελος να έχουμε μόνο ένα φάσμα πλάτους, και να αποφασίσετε για την παθολογία βασει αυτού. Χρήσιμη θα σας φανεί η εντολή `mean` του MATLAB.

(δ΄) Ακολουθώντας μια τέτοια διαδικασία έχουμε πιο ευσταθή, με τη στατιστική έννοια, συμπεράσματα.

Παραδωστε κώδικα που υπολογίζει και τυπώνει το μέσο φάσμα πλάτους του μετασχ. Fourier.

Άσκηση 10 - Μετασχηματισμός Fourier κι αφαίρεση θορύβου

Στις πρώτες γραμμές των σημειώσεών σας, συζητήσατε ένα πραγματικό πρόβλημα αποθορυβοποίησης φωνής, ως εφαρμογή-κίνητρο της Ανάλυσης Fourier. Ήρθε η ώρα να το δείτε να γίνεται στην πράξη! :)

Σας δίνεται στο site του μαθήματος ένα σήμα μουσικής sample-noise.wav. Πρόκειται για ένα γνωστό τραγούδι "μολυσμένο" με ένα ισχυρό σήμα ημιτόνου σε κάποια υψηλή, σταθερή, συχνότητα μεταξύ 1000 και 3000 Hz. Σκοπός της άσκησης είναι να αναλύσετε το σήμα και να αφαιρέσετε το θόρυβο. Ακολουθήστε τα παρακάτω βήματα.

(α΄) Αρχικά, ακούστε το σήμα.

```
[s, fs] = wavread('sample-noise.wav');   % Fortwnw to shma fwnhs
soundsc(s, fs);                          % Akouw
t = 0:1/fs:(length(s)-1)/fs;             % O a3onas xronou se sec
plot(t, s);                              % Optikopoihsh
```

(β΄) Παρατηρήστε - και ακούστε - ότι η συνιστώσα του ημιτόνου είναι ισχυρή, και εύκολα διακρίνεται μέσα στον ήχο της ηχογράφησης. Γνωρίζετε όμως ότι λόγω της ισχύος της, θα πρέπει να "ξεχωρίζει" σχετικά στο φάσμα πλάτους του σήματος απο το υπόλοιπο σήμα. Επίσης, επειδή είναι σταθερής συχνότητας, μπορούμε να την εντοπίσουμε σε οποιοδήποτε σημείο (παράθυρο) του σήματος κι αν επιλέξουμε.

(γ΄) Διαλέξτε ένα τυχαίο παραθυρο σήματος, διάρκειας 30 ms και αναλύστε το στις παραπάνω συχνότητες ($1000 - 3000$ Hz) με τον μετασχ. Fourier, χρησιμοποιώντας φυσικά το φάσμα πλάτους[1]. Προσπαθήστε να εντοπίσετε το ημίτονο. Σκεφτείτε ότι ο μετασχ. Fourier του ημιτόνου πλησιάζει

[1]Σε σχέση με τις προηγούμενες δυο ασκήσεις, στην πραγματική ρέουσα ομιλία και στον ήχο, το σήμα αλλάζει πιο γρηγορα απ' ότι όταν λέμε ένα απλό /α/. Έτσι, χρησιμοποιούμε μικρότερο παράθυρο ανάλυσης για να είμαστε σχετικά ασφαλείς ότι το περιεχόμενό του δεν αλλάζει σημαντικά.

τη συνάρτηση Δέλτα που έχει γίνει συνέλιξη με το μετασχ. Fourier του παραθύρου σας (όπως ακριβώς είδατε στην Άσκηση 1). Πρακτικά, θα περιμένετε να δείτε κάποιο ισχυρό peak (κορυφή) στο φάσμα πλάτους. Όμως επειδη το περιεχόμενο του σήματος ειναι μουσική και φωνή, το φάσμα πλάτους θα περιέχει και άλλες συχνότητες. Οπότε η αναγνώριση του peak από ένα και μόνο παράθυρο δε θα είναι εύκολη, εκτός αν είστε τυχεροί/ες. :-) Στην ανάλυσή σας, χρησιμοποιήστε ενδεικτικά τον παρακάτω κώδικα:

```
T = 30;                                 % Diarkeia para8urou 30ms
Ts = T*10^(-3)*fs;                      % Diarkeia para8urou 30ms se deigmata
x = s(45213:45213 + Ts);                % Pairnw tyxaia ena para8yro 30 ms
                                        % apo to shma pou 3ekinaei apo to
                                        % deigma 45213
                                        % (tyxaia epilegmeno)
plot(x);                                % As to doume!
Dt = 1/fs;                              % Bhma analyshs sto xrono
Df = 1;                                 % Bhma analyshs sth syxnothta
f = 1000:Df:3000;                       % A3onas syxnothtwn pou mas
                                        % endiaferoun
t = 0:(1/fs):(Ts/fs);                   % A3onas xronou diarkeias 30ms
M = exp(-j*2*pi*f'*t);                  % Pinakas M tou metasx. Fourier
x = reshape(x, 1, length(x));           % Bebaiwnoume oti to x einai
                                        % pinakas-grammh
X = Dt*x*M.';                           % Metasx. Fourier
figure; plot(f, abs(X));                % Psaxnw kapoio dynato peak sto
                                        % [1000, 3000]
```

(δ΄) Επιλέξτε διάφορα παράθυρα μέσα στο σήμα $(4-5)$, όλα ίδιας διάρκειας, μέχρι να εντοπίσετε τη συχνότητα του ημιτόνου με κάποια βεβαιότητα. Προς διευκόλυνσή σας, δίνεται οτι η συχνότητα είναι ακέραιος αριθμός, πολλαπλάσιος του 100, στο διάστημα $[1000, 3000]$ Hz. Σε κάθε plot που κάνετε, στο πάνω μέρος υπάρχουν κάποια εικονίδια. Ένα από αυτά, ο Data Cursor, σας δίνει τις συντεταγμένες του σημείου του σήματος που θα κάνετε κλικ. Έτσι, μπορειτε να βρίσκετε εύκολα τη συχνότητα ενός σημείου στο φάσμα σας. Παραδωστε μερικά plots από τα παράθυρα που διαλέξατε, τόσο στο χρόνο όσο και στο φάσμα πλάτους.

(ε΄) Σας δίνουμε επιπλέον ότι το ισχυρό αυτό ημίτονο έχει πλάτος $A = 0.01$ και αρχική φάση $\phi = 0$, δηλ. είναι της μορφής

$$n(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$$

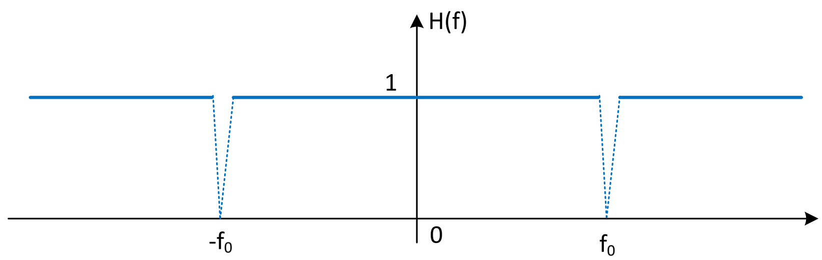
Σε προηγούμενες ασκήσεις, έχετε δει πώς δημιουργούμε ενα απλό ημίτονο. Δημιουργήστε ένα ημίτονο στο MATLAB με πλάτος και φάση που σας δινεται παραπάνω, και με συχνότητα αυτήν που βρήκατε από την ανάλυσή σας στο προηγούμενο ερώτημα. Φροντίστε να έχει ίδια διάρκεια με ολόκληρο το σήμα s του τραγουδιού. Για να βρείτε τη διάρκεια αυτή, χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση `length` του MATLAB. Για παραδειγμα, αν θέλετε να φτιάξετε ενα ημίτονο διάρκειας 100 δειγμάτων, δηλ. $1/160 = 0.00625$ sec (με συχνότητα δειγματοληψίας 16000 Hz), πλάτους 1 και συχνότητας 200 Hz, θα κάνετε το εξής:

```
A = 1;
f0 = 200;
fs = 16000;
n = A*cos(2*pi*f0*[1:100]/fs); % Paradeigma
```

(ϛ΄) Αφαιρέστε το σήμα ημιτόνου που φτιάξατε παραπάνω από το σήμα της ηχογράφησης s, απλώς αφαιρώντας μεταξύ τους το διάνυσμα s και το διάνυσμα ημιτόνου που μόλις φτιάξατε, όπως παρακάτω. Ακούστε το αποτέλεσμα. Θα πρέπει να ακούγεται πλέον καθαρό το σήμα. :-)

```
clean_sig = s - n';        % s = shma, n = hmitono
soundsc(clean_sig, fs);
```

(ζ΄) Το παραπάνω παράδειγμα ήταν πολύ "εκπαιδευτικό" :-). Στην πράξη, το ημίτονο μπορεί να μην έχει σταθερό πλάτος ή μηδενική φάση, ή ακόμα κι αν έχει, δεν μπορούμε να γνωρίζουμε εκ των προτέρων τις τιμές τους. Έτσι, μια μέθοδος όπως η παραπάνω, στο πεδίο του χρόνου δηλαδή, δε θα δουλέψει. Συνήθως χρησιμοποιούμε μεθόδους στο χώρο της συχνότητας για να αφαιρέσουμε τον ενοχλητικό θόρυβο, εφαρμόζοντας τα λεγόμενα *notch* φίλτρα, τα οποία είναι συστήματα που μηδενίζουν το πλάτος μιας συγκεκριμένης συχνότητας από ένα σήμα που δέχονται ως είσοδο. Ένα ιδανικό, πραγματικό notch φίλτρο φαίνεται στο Σχήμα 2. Βλέπετε ότι μηδενίζει μόνο μια συγκεκριμένη συχνότητα, καθώς και την αρνητική της (το σήμα είναι πραγματικό, άρα θα έχει θετικές και αρνητικές συχνότητες στο φάσμα πλάτους, όπως ξέρετε) ενώ όλες οι άλλες παραμένουν ως έχουν. Η εφαρμογή μιας τέτοιας τεχνικής ξεφεύγει από τα



Σχήμα 2: Notch φίλτρο.

πλαίσια του μαθήματος[2]. Σας δίνεται όμως η κρουστική απόκριση $h(t)$ ενός τέτοιου φίλτρου στο αρχείο MATLAB `notch.mat`.

(η΄) Φορτώστε το αρχείο στο MATLAB με την εντολή `load`. Θα σας επιστρέψει κάποιους συντελεστές στο διάνυσμα `hr`.

(θ΄) Θεωρώντας το `hr` ως ένα σύστημα, κάντε συνέλιξη (εντολή `conv`, γράψτε `doc conv` για να δείτε πως συντάσσεται) μεταξύ του σήματος εισόδου (σήμα `s` με θόρυβο) και του συστήματος (`hr`). Ακούστε το αποτέλεσμα.

Παραδωστε όσα plots ζητούνται στη διάρκεια της εκφώνησης, και κώδικα MATLAB που καθαρίζει το ηχητικό σήμα από το θόρυβο και με τις δυο τεχνικές.

[2]Είναι αντικείμενο του μαθήματος ΗΥ370-Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος.