ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

**ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς**
**Εαρινό Εξάμηνο 2016-17**
**Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής**

**Λύσεις Τέταρτης Σειράς Ασκήσεων**

## Άσκηση 1

(i) Είναι $T_0 = 2$, $X_1 = -1$, $X_3 = -1$ και λόγω του ότι $x(t) \in \Re$ θα είναι

$$X_{-1} = X_1^* = -1 \tag{1}$$
$$X_{-3} = X_3^* = -1 \tag{2}$$

οπότε:

$$x(t) = \sum_k X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_k X_k e^{j2\pi k \frac{1}{2} t} = \sum_k X_k e^{j\pi k t} \tag{3}$$
$$= 1e^{-j3\pi t} + (-1)e^{-j\pi t} + (-1)e^{j\pi t} + 1e^{j3\pi t} \tag{4}$$
$$= \cos(3\pi t) - 2\cos(\pi t) = 2\cos(3\pi t) + 2\cos(\pi t + \pi) \tag{5}$$

(ii) Είναι

$$X_1 = \frac{1}{j} = -j = e^{-j\frac{\pi}{2}} \Rightarrow X_{-1} = X_1^* = j = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}} \tag{6}$$
$$X_2 = -\frac{j}{2} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}} \Rightarrow X_{-2} = X_2^* = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}} \tag{7}$$
$$X_3 = \frac{j}{2} = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}} \Rightarrow X_{-3} = X_3^* = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}} \tag{8}$$
$$X_4 = -\frac{j}{2} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}} \Rightarrow X_{-4} = X_4^* = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}} \tag{9}$$

Άρα

$$x(t) = e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j2\pi t} + e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j2\pi t} + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j4\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j4\pi t} \tag{10}$$
$$+ \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j6\pi t} + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j6\pi t} + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j8\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j8\pi t} \tag{11}$$

Τελικά

$$x(t) = 2\cos(2\pi t - \frac{\pi}{2}) + \cos(4\pi t - \frac{\pi}{2}) + \cos(6\pi t + \frac{\pi}{2}) + \cos(8\pi t - \frac{\pi}{2}) \tag{12}$$

(iii) Είναι

$$X_2 = 2e^{j\frac{\pi}{3}} \Rightarrow X_{-2} = X_2^* = 2e^{-j\frac{\pi}{3}} \tag{13}$$

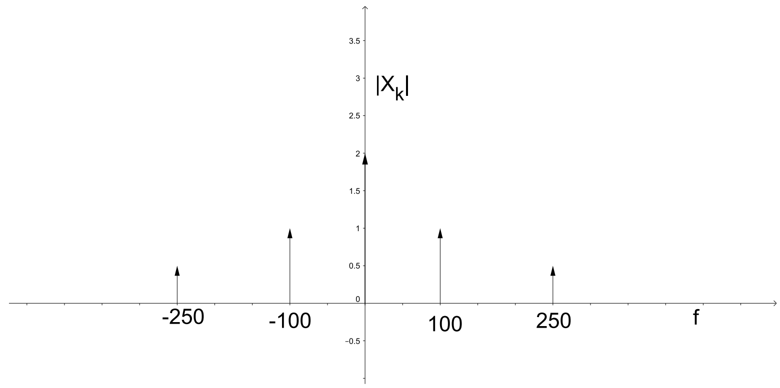
και

$$X_3 = -e^{-j\frac{\pi}{4}} = e^{j\pi}e^{-j\frac{\pi}{4}} = e^{j\frac{3\pi}{4}} \Rightarrow X_{-3} = X_3^* = -e^{j\frac{\pi}{4}} = e^{-j\frac{3\pi}{4}} \tag{14}$$

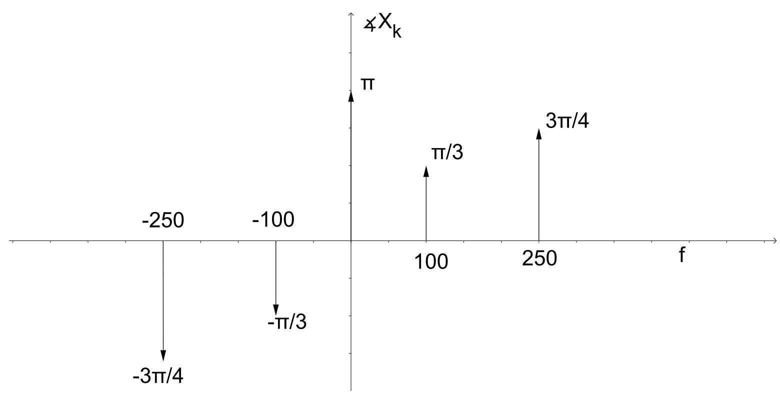
οπότε

$$x(t) = 4\cos(8\pi t + \frac{\pi}{3}) + 2\cos(12\pi t - \frac{3\pi}{4}) \tag{15}$$

**Άσκηση 2**




Σχήμα 1: άσκηση 2I




Σχήμα 2: άσκηση 2I

(I) Έχουμε

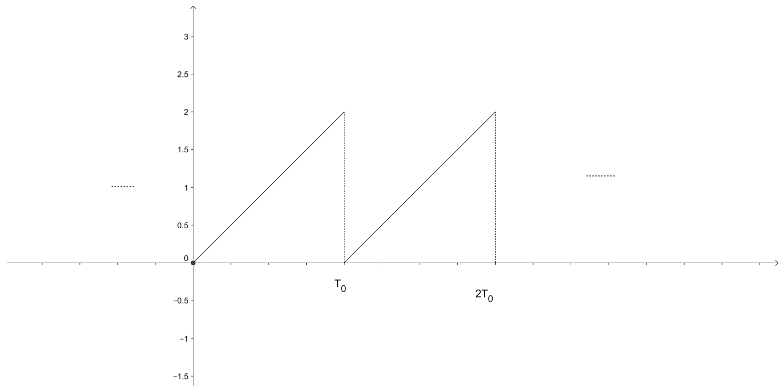
$$
\begin{aligned}
x(t) &= -2 + 2\cos(2\pi 100t + \frac{\pi}{3}) - \sin(2\pi 250t + \frac{\pi}{4}) && (16)\\
&= 2e^{j\pi} + e^{j\frac{\pi}{3}} \cdot e^{-j2\pi 100t} + e^{-j\frac{\pi}{3}} \cdot e^{-j2\pi 100t} - \frac{1}{2j}e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{j2\pi 250t} + \frac{1}{2j}e^{-j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-j2\pi 250t} && (17)\\
&= 2e^{j\pi} + e^{j\frac{\pi}{3}} \cdot e^{-j2\pi 100t} + e^{-j\frac{\pi}{3}} \cdot e^{-j2\pi 100t} + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{j2\pi 250t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-j2\pi 250t} && (18)\\
&= 2e^{j\pi} + e^{j\frac{\pi}{3}} \cdot e^{j2\pi 100t} + e^{-j\frac{\pi}{3}} \cdot e^{-j2\pi 100t} + \frac{1}{2}e^{j\frac{3\pi}{4}} \cdot e^{j2\pi 250t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{3\pi}{4}} \cdot e^{-j2\pi 250t} && (19)
\end{aligned}
$$

(II) Από τα φάσματα, έχουμε

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{3}{2}e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-j2\pi 150t} + \frac{3}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{j2\pi 150t} + 4e^{-j\pi} \cdot e^{j2\pi 50t} + 4e^{j\pi} \cdot e^{-j2\pi 50t} && (20)\\
&= 3\cos(2\pi 150t - \frac{\pi}{4}) + 8\cos(2\pi 250t - \pi) && (21)
\end{aligned}
$$

**Άσκηση 3**

(i) Δείτε το Σχήμα 3.




Σχήμα 3: Σχήμα Άσκησης 3i.

(ii) Θα έχουμε

$$\begin{aligned}
X_k &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \frac{2}{T_0} t e^{-j2\pi k f_0 t} dt && (22)\\
&= \frac{2}{T_0^2}\Big(\frac{e^{-j2\pi k f_0 t}}{-j2\pi k f_0}\big(t + \frac{1}{j2\pi k f_0}\big)\Big)\Big]_0^{T_0} && (23)\\
&= \Big(\frac{2}{T_0^2} t \frac{e^{-j2\pi k f_0 t}}{-j2\pi k f_0} + \frac{2}{T_0^2}\frac{e^{-j2\pi k f_0 t}}{-j2\pi k f_0}\frac{1}{-j2\pi k f_0}\Big)\Big]_0^{T_0} && (24)\\
&= \frac{2}{T_0^2} T_0 \frac{e^{-j2\pi k f_0 T_0}}{(-j2\pi k f_0)} + \frac{2}{T_0^2}\frac{e^{-j2\pi k f_0 T_0}}{(-j2\pi k f_0)} \cdot \frac{1}{j2\pi k f_0} - \frac{2}{T_0^2}\frac{1}{(-j2\pi k f_0)} \cdot \frac{1}{j2\pi k f_0} && (25)\\
&= \frac{2}{T_0}\frac{e^{-j2\pi k}}{(-j2\pi k f_0)} + \frac{2}{T_0^2}\frac{e^{-j2\pi k}}{(-j2\pi k f_0)} \cdot \frac{1}{j2\pi k f_0} + \frac{2}{T_0^2}\frac{1}{(j2\pi k f_0)^2} && (26)\\
&= \frac{2}{-j2\pi k f_0 T_0} - \frac{2}{T_0^2(-j2\pi k f_0)^2} + \frac{2}{T_0^2(j2\pi k f_0)^2} && (27)\\
&= -\frac{2}{-j2\pi k} = \frac{1}{\pi k} e^{j\frac{\pi}{2}} && (28)
\end{aligned}$$

ενώ

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \frac{2}{T_0} t dt = \frac{2}{T_0^2}\frac{t^2}{2}\Big]_0^{T_0} = 1 \tag{29}$$

(iii) Είναι

$$X_k = \frac{1}{\pi k} e^{j\frac{\pi}{2}} = \begin{cases} \frac{1}{\pi k} e^{j\frac{\pi}{2}}, & k > 0 \\ \frac{1}{\pi |k|} e^{-j\frac{\pi}{2}}, & k < 0 \end{cases} \Rightarrow |X_k| = \frac{1}{\pi |k|} \tag{30}$$

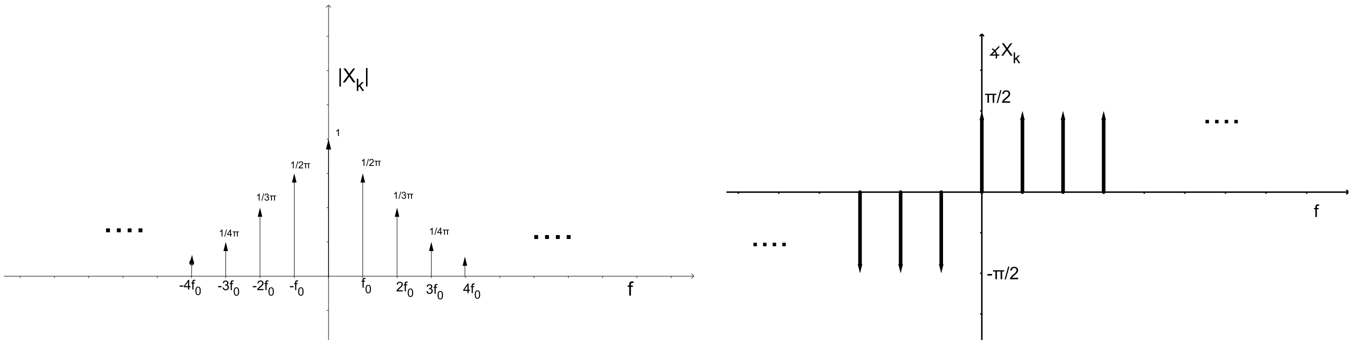
και

$$\phi_k = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & k > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & k < 0 \end{cases} \tag{31}$$

Άρα έχουμε τα Σχήματα 4.

(iv) Είναι

$$x(t) = 1 + \sum_{k=-\infty,\quad k\neq 0}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi k}\cos(2\pi k f_0 t + \frac{\pi}{2}) \tag{32}$$




Σχήμα 4: Σχήματα Άσκησης 3iii

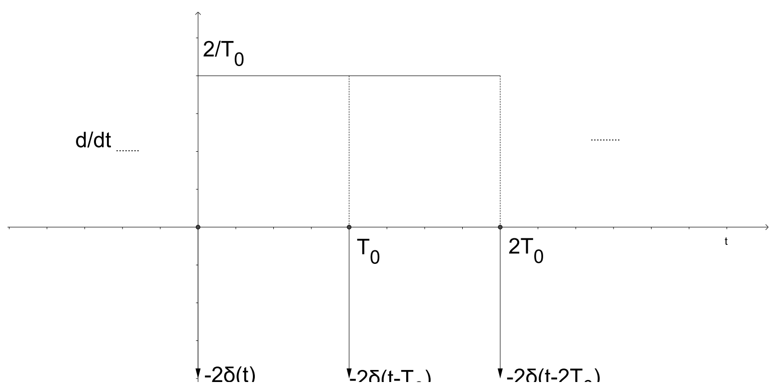
(v) Είναι

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \to Y_k = j2\pi k f_0 X_k = \frac{2}{T_0}e^{j\pi}, \;\; \forall k \neq 0 \tag{33}$$

Για $k = 0$, $Y_0 = 0$, άρα

$$y(t) = \sum_{k=-\infty, \quad k\neq 0}^{+\infty} \frac{2}{T_0}e^{j\pi}e^{j2\pi k f_0 t} \tag{34}$$

<u>Αλλιώς</u>: Δυο σήματα, όπως αυτά του Σχήματος 5.




Σχήμα 5: Σχήμα Άσκησης 3v

Διαχωρίζοντάς τα, θα είναι

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = \frac{2}{T_0}, \;\; \forall t \to \frac{2}{T_0}, \quad k = 0$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0) \to X_{k_2} = -\frac{2}{T_0} = \frac{2}{T_0}e^{j\pi}, \;\; \forall k.$$

από Παράδειγμα 4.4 σημειώσεων.
Άρα

$$\frac{dx(t)}{dt} = y(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} + \frac{dx_2(t)}{dt} \to Y_k = \frac{2}{T_0}e^{j\pi} \;\; , \;\; Y_0 = \frac{2}{T_0} - \frac{2}{T_0} = 0$$

Άρα

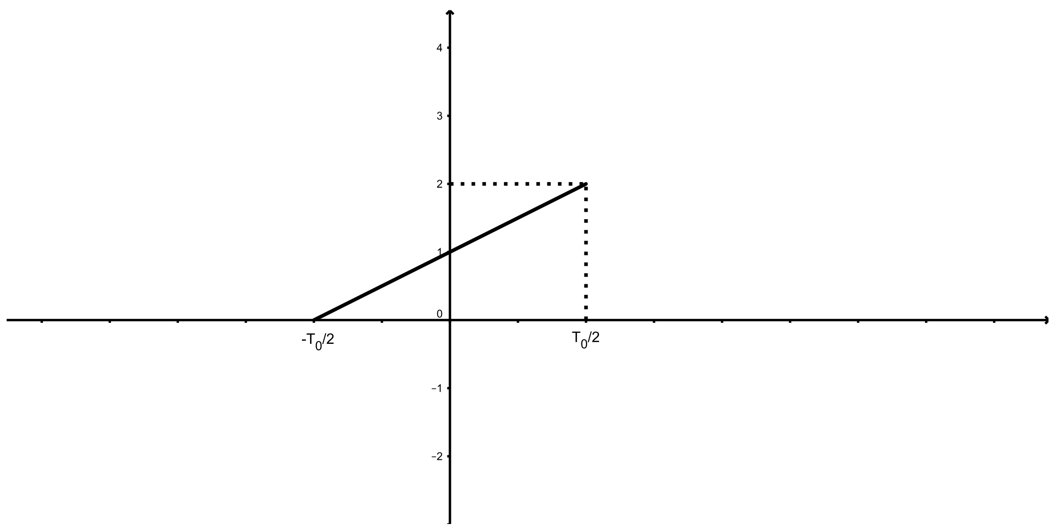
$$\frac{d}{dt}x(t) = y(t) = \frac{2}{T_0} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{T_0}e^{j\pi}e^{j2\pi k f_0 t}$$

(vi) Από το προηγούμενο ερώτημα και την ιδιότητα $Y_k = j2\pi k f_0 X_k$ για την παράγωγο ενός περιοδικού σήματος, θα έχουμε

$$X_k = \frac{Y_k}{j2\pi k f_0} = \frac{1}{j2\pi k f_0}\frac{2}{T_0}e^{j\pi} = \frac{2}{j2\pi k f_0 T_0}e^{j\pi} = \frac{1}{\pi k}e^{j\pi}\cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi k}e^{-j\frac{\pi}{2}},\ \ \forall k \neq 0 \tag{35}$$

**Άσκηση 4**

Το σήμα σε μια περίοδο φαίνεται στο Σχήμα 6.




Σχήμα 6: Άσκηση 4

Το παραπάνω σήμα είναι το σήμα της Άσκησης 3, μετατοπισμένο κατά $t_0 = -\frac{T_0}{2}$, και από την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης θα είναι

$$X_k = X_k \cdot e^{-j2\pi k f_0 \cdot (-\frac{T_0}{2})} = \frac{1}{\pi k}\cdot e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j\pi k} = \frac{1}{\pi k}e^{j\frac{\pi}{2}}(-1)^k \tag{36}$$

**Άσκηση 5**

Είναι

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\frac{1}{4}t^2 dt = \frac{1}{4T_0}\int_0^{T_0} t^2 dt = \frac{1}{4T_0}\frac{t^3}{3}\Big]_0^{T_0} = \frac{T_0^2}{12} \tag{37}$$

και με $T_0 = 2\pi$, είναι $X_0 = \frac{4\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{3}$.

Είναι

$$\begin{aligned}
X_k &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\frac{1}{4}t^2 e^{-j2\pi k f_0 t}dt && (38)\\
&= \frac{1}{4T_0}\int_0^{T_0} t^2 e^{-j2\pi k f_0 t}dt && (39)\\
&= \frac{1}{4T_0}\frac{e^{-j2\pi k f_0 t}}{(-j2\pi k f_0)^3}((-j2\pi k f_0)^2 + 2j2\pi k f_0 t + 2)\Big]_0^{T_0} && (40)\\
&= \frac{1}{4T_0}\frac{1}{(-j2\pi k f_0)^3}((-j2\pi k f_0 T_0)^2 + j4\pi k f_0 T_0 + 2) - \frac{1}{4T_0}\frac{1}{(-j2\pi k f_0)^3}\cdot 2 && (41)\\
&= \frac{1}{4T_0}\frac{1}{(-j2\pi k f_0)^3}((-j2\pi k)^2 + j4\pi k) && (42)\\
&= \frac{1}{4T_0}\frac{1}{(-j2\pi k)^3 f_0^3}(-j2\pi k)^2 + \frac{1}{4T_0}\frac{1}{(-j2\pi k f_0)^3}j4\pi k && (43)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4T_0}\frac{1}{-j2\pi k f_0^3} + \frac{1}{4T_0}\frac{j4\pi k}{(-j2\pi k f_0)^2(-j2\pi k f_0)} \tag{44}$$

$$= \frac{1}{8\pi k f_0^2}e^{j\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\frac{2}{4\pi^2 k^2 f_0^2} \tag{45}$$

και για $f_0 = \frac{1}{2\pi}$ είναι

$$X_k = \frac{1}{8\pi k \frac{1}{4\pi^2}}e^{j\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\frac{2}{2\pi^2 k^2 \frac{1}{4\pi^2}} \tag{46}$$

$$= \frac{\pi}{2k}e^{j\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2k^2} \tag{47}$$

**Άσκηση 6**

Ξέρουμε ότι

$$X_k = \frac{2}{\pi k}e^{j\frac{\pi}{2}(k-1)}$$

από το Παράδειγμα 4.13 για $k$ περιττό και $X_0 = 1$.

Η συνολική ισχύς είναι

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 = 1 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{4}{\pi^2 k^2} \tag{48}$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} X_{T_0}^2(t)dt = \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} 2^2 dt \tag{49}$$

$$= 4t\Big]_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} = 2 \tag{50}$$

Με δοκιμές βλέπουμε ότι για $k = 0, \pm 1$, είναι $P_k = 1.8106$, που αποτελεί το $90.53\%$ της συνολικής ενέργειας. Για $k = 0, \pm 1, \pm 3$, έχουμε ότι $P_k = 1.9006$, που αποτελεί το $95.03\%$ της συνολικής ισχύος. Με όμοιο τρόπο, για $k = 0, \pm 1, \pm 3, \pm 5 \pm 7$, είναι $P_k = 1.9496$, που αποτελεί το $97.48\%$ της συνολικής ισχύος του σήματος. Άρα απαιτούνται $k = 5$ θετικοί όροι $[0, 1, 3, 5, 7]$, δηλ. $9$ όροι της εκθετικής σειράς για να έχουμε το $97\%$ της συνολικής ισχύος του περιοδικού σήματος.

**Άσκηση 7**

Έχουμε $A_0 = 1$ , $A_k = \frac{1}{2k+1}$ άρα

$$P = 1^2 + \sum_{k=0}^{4} \frac{(\frac{1}{2k+1})^2}{2} = 1 + \sum_{k=0}^{4} \frac{1}{2(2k+1)^2} = 1.592 \tag{51}$$

Το ποσοστό του σταθερού όρου στη συνολική ισχύ των πρώτων πέντε όρων είναι $P_0 = \frac{1}{1.592} = 0.6282$, άρα είναι $62.82\%$.

**Άσκηση 8**

(α') Είναι $y(t) = x(t) + \alpha x(t - t_d)$. Θέτω $x(t) = \delta(t)$ και τότε $y(t) = h(t) = \delta(t) + \alpha\delta(t - t_d)$.

(β') Με όμοιο σκεπτικό ,

$$h(t) = \delta(t) + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \delta(t - t_k)$$

(γ') Κώδικας MATLAB.

(δ΄) Κώδικας MATLAB.

(ε΄) Κώδικας MATLAB.

**Άσκηση 9**
Κώδικας MATLAB.