ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2016-17
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Τρίτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 2/3/2017 Ημερομηνία Παράδοσης: 14/3/2017

Οι ασκήσεις με [$\star$] είναι **bonus**, $+10$ μονάδες η καθεμία στο βαθμό αυτής της σειράς ασκήσεων (δηλ. μπορείτε να πάρετε μέχρι $80/60$ σε αυτή τη σειρά.)

Άσκηση 1 - Ιδιότητες Συστημάτων
Ελέγξτε αν τα παρακάτω συστήματα είναι γραμμικά, χρονικά αμετάβλητα, αιτιατά, ευσταθή, και δυναμικά.

(α') $y(t) = x(t)\sin(t-1)$

(β') $y(t) = \frac{1}{x(t)}$

(γ') $y(t) = 4x(t-1) - x(1-t)$

Απ:

Α/Α	Γραμμικό	Χ.Α.	Αιτιατό	Ευσταθές	Δυναμικό
(α)	✓	✗	✓	✓	✗
(β)	✗	✓	✓	✗	✗
(γ)	✓	✓	✗	✓	✓

Άσκηση 2 - Απόκριση Μηδενικής Εισόδου
Υπολογίστε τις αποκρίσεις μηδενικής εισόδου για τα παρακάτω συστήματα και τις αρχικές τους συνθήκες.

(α') $\dfrac{d^2}{dt^2}y(t) + 7\dfrac{d}{dt}y(t) + 10y(t) = x(t) + \dfrac{d}{dt}x(t)$, με $y(0^-) = 2$, $y'(0^-) = -2$

(β') $\dfrac{d^2}{dt^2}y(t) - 8\dfrac{d}{dt}y(t) + 16y(t) = x(t) - 2\dfrac{d}{dt}x(t)$, με $y(0^-) = 0$, $y'(0^-) = -1$

Τι παρατηρείτε ότι συμβαίνει στις αποκρίσεις μηδενικής εισόδου όταν $t \to +\infty$; Μπορείτε να τα χαρακτηρίσετε ως προς την ευστάθειά τους;

Απ: (α) $y_{zi}(t) = \frac{8}{3}e^{-2t}u(t) - \frac{2}{3}e^{-5t}u(t)$
(β) $y_{zi}(t) = -te^{4t}u(t)$

Άσκηση 3 - Κρουστική Απόκριση
Υπολογίστε τις κρουστικές αποκρίσεις των παρακάτω συστημάτων.

(α') $2\dfrac{d}{dt}y(t) + 10y(t) = x(t)$

(β') $\dfrac{d^2}{dt^2}y(t) - 3\dfrac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = x(t) - \dfrac{d}{dt}x(t)$

Τι παρατηρείτε ότι συμβαίνει στις κρουστικές αποκρίσεις όταν $t \to +\infty$; Μπορείτε να τα χαρακτηρίσετε ως προς την ευστάθειά τους;

Απ: (α) $h(t) = (1/2)e^{-5t}u(t)$
(β) $h(t) = -e^{2t}u(t)$

Άσκηση 4 - Συνέλιξη - Ι

Υπολογίστε τη συνέλιξη μεταξύ των σημάτων

(α') $x(t) = e^{-t}u(t)$ και $h(t) = e^{-2t}u(t)$

(β') $x(t) = 6e^{-t}u(t)$ και $h(t) = 2u(t)$

Απ: (α) $c(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$
(β) $c(t) = 12(1 - e^{-t})u(t)$

Άσκηση 5 - Συνέλιξη - ΙΙ

Υπολογίστε τη συνέλιξη $c(t)$ μεταξύ των σημάτων

$$x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right) \tag{1}$$

και

$$h(t) = \begin{cases} t/3, & 0 \leq t \leq 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{2}$$

Απ: $c(t) = \begin{cases} (1/6)(t+1)^2, & -1 \leq t < 1 \\ (2/3)t, & 1 \leq t < 2 \\ (-1/6)(t^2 - 2t - 8), & 2 \leq t < 4 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

[⋆] **Άσκηση 6 - Έξοδος ΓΧΑ Συστημάτων**

Σχεδιάστε τα σήματα

$$x(t) = \frac{1}{t^2 + 1} \tag{3}$$

και

$$h(t) = u(t) \tag{4}$$

Αν το $h(t)$ αποτελεί την κρουστική απόκριση ενός συστήματος, υπολογίστε και σχεδιάστε την έξοδο του συστήματος.

Απ: $y(t) = \tan^{-1}(t) + \frac{\pi}{2}$

[⋆] **Άσκηση 7 - Συνέλιξη στο MATLAB**

Έχουμε συζητήσει τη συνέλιξη συνεχούς χρόνου στη θεωρία, καθώς και σε ασκήσεις. Ας δούμε σε αυτήν την άσκηση το πως σχεδιάζουμε και επιβεβαιώνουμε τα αποτελέσματα στο MATLAB. Υπάρχουν μερικά σημεία που χρειάζονται προσοχή όσον αφορά την αναπαρασταση σημάτων συνεχούς χρόνου σε ένα περιβάλλον διακριτού χρόνου, οπως το MATLAB, και αυτά θα συζητήσουμε πριν πάμε στην εφαρμογή.

Υπενθυμίζεται ότι η συνέλιξη είναι μια πράξη που σχετιζει την είσοδο ενός συστήματος, $x(t)$, με την κρουστική απόκριση του συστήματος, $h(t)$, και την έξοδο $y(t)$, και δίνεται από τη σχέση

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \tag{5}$$

Ας δούμε δυο χαρακτηριστικά παραδείγματα.

(αʹ) Έστω λοιπόν ότι έχουμε δυο σηματα συνεχούς χρόνου, τα

$$x(t) = \cos(\pi t/2), \;\; -5 \leq t \leq 5 \tag{6}$$

και

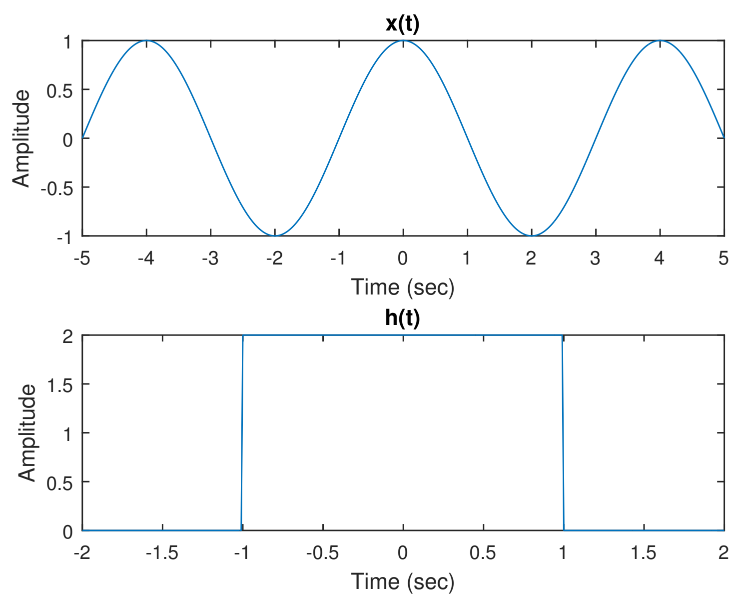
$$h(t) = 2\mathrm{rect}(t/2) \tag{7}$$

όπου $Arect(t/T)$ είναι ένα συμμετρικό τετραγωνικό παράθυρο με πλάτος A και διάρκεια T, από $-T/2$ ως $T/2$ s. Άρα το σήμα $2\mathrm{rect}(t/2)$ είναι ενα συμμετρικό τετραγωνικό παραθυρο με διάρκεια 2 s (από -1 ως 1 s) και πλάτος 2.

Θυμάστε ότι το MATLAB αναγνωρίζει όλες τις μεταβλητές του ως πίνακες. Οπότε ολα τα δεδομένα που θα εισάγουμε θα είναι μορφής πινάκων, και συγκεκριμένα, διανυσμάτων (πινάκων Nx1 ή 1xN). Παρακάτω δίνεται κώδικας για τη σχεδίαση των σημάτων στο MATLAB:

```
ts = 0.01;                      % Sampling step
tx = -5:ts:5;                   % Time vector for x(t)
x = cos(pi * tx/ 2);            % x(t)
th = -2:ts:2;                   % Time vector for h(t)
h = 2*rectpuls(th/2);           % h(t)
subplot(211); plot(tx, x);      % Plot x(t)
xlabel('Time (sec)');           % Make plot pretty :-)
ylabel('Amplitude');            % Make plot pretty :-)
title('x(t)');                  % Make plot pretty :-)
subplot(212); plot(th, h);      % Plot h(t)
xlabel('Time (sec)');           % Make plot pretty :-)
ylabel('Amplitude');            % Make plot pretty :-)
title('h(t)');                  % Make plot pretty :-)
```

Το αποτέλεσμα φαινεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Σήματα Παραδειγματος (α).

Μερικές παρατηρήσεις στον παραπάνω κώδικα...

(αʹ) Η πρώτη γραμμή μας καθορίζει το πόσο συχνά παίρνουμε δείγματα από το συνεχές σήμα, για να το αναπαραστήσουμε στο MATLAB. Όπως γνωριζετε, ένα σήμα συνεχούς χρόνου ορίζεται **κάθε** χρονική στιγμή, οι οποίες ειναι άπειρες το πλήθος, ακόμα και σε ένα κλειστο διάστημα όπως π.χ. το $[0, 1]$. Προφανώς δεν μπορούμε να αναπαραστησουμε όλες αυτές τις τιμές. Πρεπει να διαλέξουμε κάποιες. Εδώ, στην πρώτη γραμμή επιλέγουμε το βήμα με το οποίο θα παίρνουμε τιμές από τα σήματα μας. Το βημα εδώ ειναι 0.01 s, το οποίο στην περίπτωση μας είναι αρκετό – το βήμα αυτό εξαρτάται από το συχνοτικό περιεχόμενο των σημάτων, όπως θα δείτε προς το τελος του μαθήματος.

(β′) Στη δευτερη και τέταρτη γραμμή, ορίζουμε τα πεδία ορισμού των σημάτων. Το th δεν ειναι ανάγκη να ειναι διαφορετικό από το tx, όμως το tx δε θα μπορούσε να είναι ίδιο με το th, γιατι το $x(t)$ ορίζεται στο $[-5, 5]$. Επίσης, το $h(t)$ έχει διάρκεια από -1 ως 1, οπότε η επιλογή του διαστήματος $[-2, 2]$ μας δίνει μερικά μηδενικά εκατέρωθεν του παλμού.

(γ′) Η συνάρτηση `rectpuls` υλοποιεί έναν τετραγωνικό παλμό διάρκειας 1 δευτερολέπτου και πλάτους 1, στο όρισμα-άξονα που του δίνεται. Η κλήση που κάνουμε εδώ, `2*rectpuls(th/2)`, φτιάχνει ένα τετραγωνικό παράθυρο διάρκειας 2 δευτερολέπτων, και πλάτους 2.

Ας πούμε οτι θέλουμε να κάνουμε συνέλιξη αυτών των δυο σημάτων. Το ολοκλήρωμα της συνέλιξης δινεται ως

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{8}$$

Η συνέλιξη υλοποιείται στο MATLAB με τη συνάρτηση `conv`. Η συνάρτηση αυτή όμως υλοποιεί τη συνέλιξη για σήματα *διακριτού* χρόνου. Η Σχέση (8) όμως είναι σχέση συνεχούς χρόνου. Θα πρέπει να τη μετατρεψουμε σε μια κάπως πιο βολική, διακριτή μορφή, ώστε να χρησιμοποιήσουμε την έτοιμη συνάρτηση που μας δινει το MATLAB. Μπορει να δειχθεί οτι η Σχέση (8) μπορει να προσεγγιστεί από τη σχέση

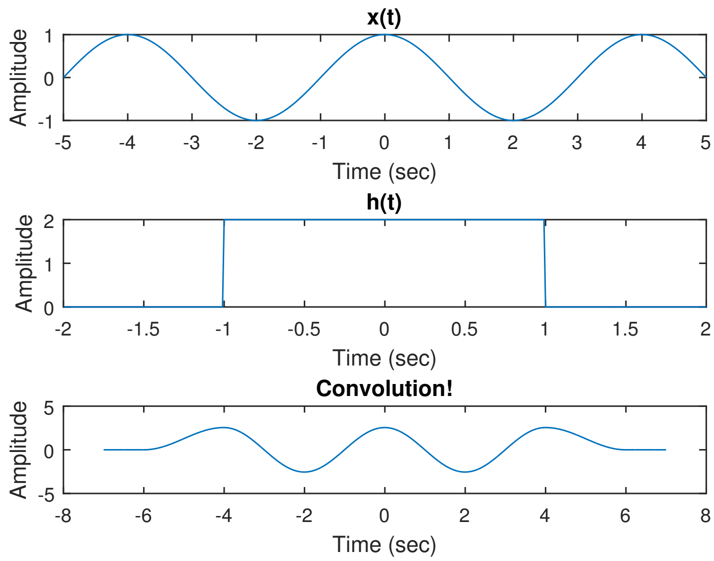
$$y(kT) = x(kT) * h(kT) = T \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(iT)h((k-i)T) \tag{9}$$

όπου kT είναι ακέραιες χρονικές στιγμές ανά T δευτερόλεπτα. Αυτή η προσέγγιση πρέπει να σας θυμίζει το ολοκλήρωμα Riemann - την είδαμε και στις διαλέξεις, όταν προσπαθήσαμε να βρούμε την απόκριση μηδενικής κατάστασης - και είναι όλο και πιο ακριβής όσο το T γίνεται όλο και πιο μικρό.

Η συνάρτηση `conv` υλοποιεί ακριβώς το άθροισμα που φαινεται παραπάνω (χωρίς τη σταθερά T). Άρα η συνέλιξη των δυο σημάτων θα δινεται από τον παρακάτω κώδικα:

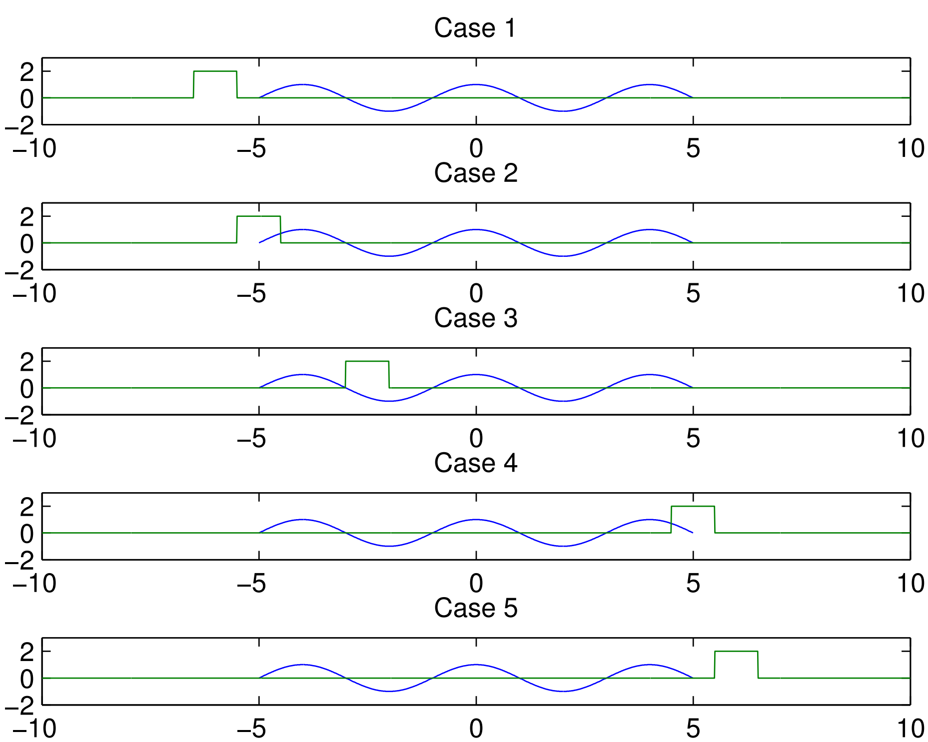
```
ts = 0.01;                      % Sampling step == T
tx = -5:ts:5;                   % Time vector for x(t)
x = cos(pi * tx/ 2);            % x(t)
th = -2:ts:2;                   % Time vector for h(t)
h = 2*rectpuls(th/2);           % h(t)

subplot(311); plot(tx, x);      % Plot x(t)
xlabel('Time (sec)'); ylabel('Amplitude'); title('x(t)');

subplot(312); plot(th, h);      % Plot h(t)
xlabel('Time (sec)'); ylabel('Amplitude'); title('h(t)');

ty = -7:ts:7;                   % Convolution time vector [tx1+th1, tx2+th2]
y = ts*conv(x,h);               % Convolution approximation y(t)

subplot(313); plot(ty, y);      % Plot y(t)
xlabel('Time (sec)'); ylabel('Amplitude'); title('Convolution!');
```

Το αποτέλεσμα φαινεται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: Σήματα και Συνέλιξη Παραδειγματος (α).

Ας λύσουμε θεωρητικά τη συνέλιξη, να δούμε αν συμπίπτουν τα σχήματα. Θα έχουμε πέντε περιπτώσεις, οι οποίες φαίνονται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3: Περιπτώσεις Συνέλιξης Παραδειγματος (α).

- Πρώτη περίπτωση:

$$t+1 < -5 \Leftrightarrow t < -6,\ \ y(t) = 0 \tag{10}$$

- Δευτερη περιπτωση:

$$\begin{aligned}
-5 \leq t+1 &\Leftrightarrow t \geq -6 \text{ και } t-1 \leq -5 \Leftrightarrow t \leq -4 \Rightarrow -6 \leq t < -4, \\
y(t) &= \int_{-5}^{t+1} 2\cos(\pi\tau/2)d\tau \\
&= 2\frac{2}{\pi}\sin(\pi\tau/2)\Big|_{-5}^{t+1} \\
&= \frac{4}{\pi}(\sin(\pi(t+1)/2) - \sin(-5\pi/2)) \\
&= \frac{4}{\pi}(\sin(\pi t/2 + \pi/2) + 1) \\
&= \frac{4}{\pi}(\cos(\pi t/2) + 1) \qquad (11)
\end{aligned}$$

- Τρίτη περίπτωση:

$$\begin{aligned}
-5 \leq t-1 &\Leftrightarrow t \geq -4 \text{ και } t+1 \leq 5 \Leftrightarrow t \leq 4 \Rightarrow -4 \leq t \leq 4, \\
y(t) &= \int_{t-1}^{t+1} 2\cos(\pi\tau/2)d\tau \\
&= \frac{4}{\pi}\sin(\pi\tau/2)\Big|_{t-1}^{t+1} \\
&= \frac{4}{\pi}(\sin(\pi(t+1)/2) - \sin(\pi(t-1)/2) \\
&= \frac{4}{\pi}(\cos(\pi t/2) + \cos(\pi t/2)) \\
&= \frac{8}{\pi}\cos(\pi t/2) \qquad (12)
\end{aligned}$$

- Τέταρτη περιπτωση:

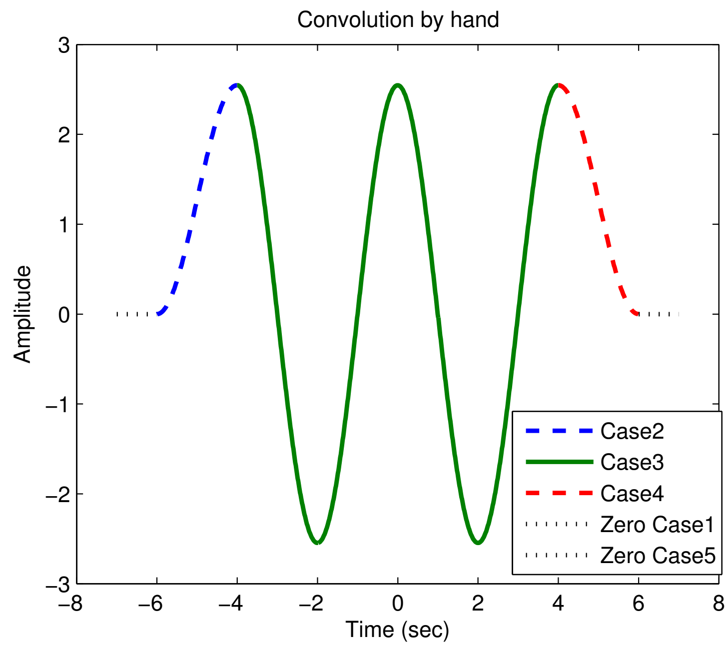
$$\begin{aligned}
t+1 > 5 &\Leftrightarrow t > 4 \text{ και } t-1 \leq 5 \Leftrightarrow t \leq 6 \Rightarrow 4 < t \leq 6 \\
y(t) &= \int_{t-1}^{5} 2\cos(\pi\tau/2)d\tau \\
&= \frac{4}{\pi}\sin(\pi\tau/2)\Big|_{t-1}^{5} \\
&= \frac{4}{\pi}(\sin(5\pi/2) - \sin(\pi(t-1)/2)) \\
&= \frac{4}{\pi}(\sin(5\pi/2) - \sin(\pi(t-1)/2)) \\
&= \frac{4}{\pi}(1 + \cos(\pi t/2)) \qquad (13)
\end{aligned}$$

- Πέμπτη περιπτωση:

$$t-1 > 5 \Leftrightarrow t > 6, \;\; y(t) = 0 \qquad (14)$$

Άρα συνολικά:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < -6, \\ \frac{4}{\pi}(\cos(\pi t/2)+1), & -6 \leq t < -4, \\ \frac{8}{\pi}\cos(\pi t/2), & -4 \leq t \leq 4, \\ \frac{4}{\pi}(\cos(\pi t/2)+1), & 4 < t \leq 6 \\ 0, & t > 6 \end{cases} \qquad (15)$$



Σχήμα 4: Συνέλιξη Παραδειγματος (α) - Θεωρητικό αποτέλεσμα

Ας σχεδιάσουμε αυτό το σήμα στο MATLAB. Δείτε το Σχήμα 4. Ο κώδικας που παράγει το Σχήμα 4 δίνεται παρακάτω:

```
t2 = -6:ts:-4;                       % Case 2 time vector
x2 = (4/pi)*(cos(pi*t2/2) + 1);      % Case 2 signal
t3 = -4:ts:4;                        % Case 3 time vector
x3 = (8/pi)*(cos(pi*t3/2));          % Case 3 signal
t4 = 4:ts:6;                         % Case 4 time vector
x4 = (4/pi)*(cos(pi*t4/2) + 1);      % Case 4 signal
t_zero1 = -7:ts:-6;                  % Zero time vector: case 1
t_zero2 = 6:ts:7;                    % Zero time vector: case 5
x_zero1 = zeros(1, length(t_zero1)); % Zero signal for case 1
x_zero2 = zeros(1, length(t_zero2)); % Zero signal for case 5
plot(t2, x2, t3, x3, t4, x4, t_zero1, x_zero1, t_zero2, x_zero2);
xlabel('Time (sec)');
ylabel('Amplitude');
title('Convolution by hand');
legend('Case2', 'Case3', 'Case4', 'Zero Case1', 'Zero Case5');
```

Παρατηρήστε οτι το θεωρητικό αποτέλεσμα του Σχήματος 4 και το αποτέλεσμα της συνάρτησης `conv` του Σχήματος 2 είναι ίδια! (κι ας μην πολυ-φαίνεται λόγω κλίμακας) :-)

(β') Έστω ότι έχουμε δυο σήματα συνεχούς χρόνου και άπειρης διάρκειας, τα

$$x(t) = u(t) \tag{16}$$

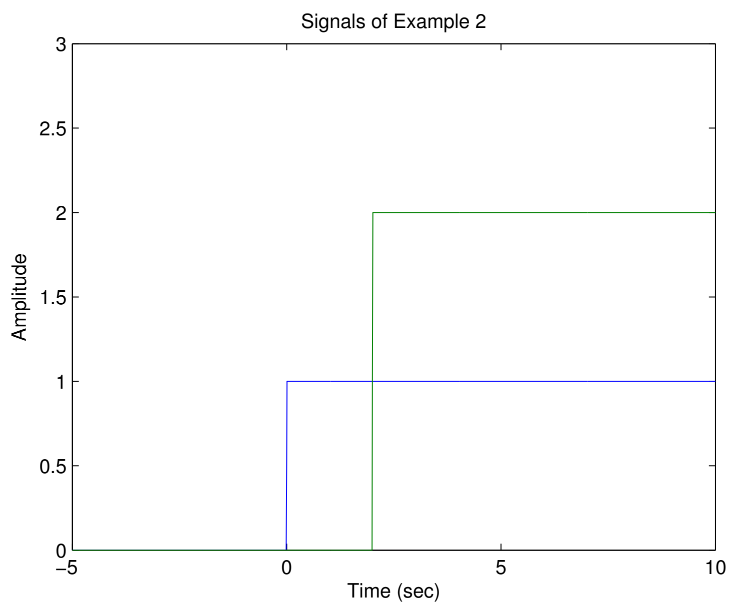
και

$$h(t) = 2u(t-2) \tag{17}$$

όπου $u(t)$ είναι η γνωστη σας βηματική συνάρτηση. Προφανώς, τα σήματα αυτά είναι άπειρα στο χρόνο, οπότε δε γίνεται να τα αναπαραστήσουμε με ακρίβεια στο MATLAB. Θα αναπαρασταθούν μέχρι ένα συγκεκριμένο χρονικό σημείο της επιλογής μας. Ας σχεδιάσουμε αυτά τα σήματα στο MATLAB ως εχουν:

```
ts = 0.01;
tx = -5:ts:10;                    % Up to 10 seconds
x = heaviside(tx);                % x(t) = u(t)
th = -5:ts:10;                    % Up to 10 seconds again
h = 2*heaviside(th - 2);          % h(t) = 2u(t-2)

plot(tx, x, th, h);               % Plot
xlabel('Time (sec)');
ylabel('Amplitude');
title('Signals of Example (b)');
axis([-5 10 0 3]);                % Rescale the axis of the figure
                                  % (prettier graph :-) )
```

Η συνάρτηση heaviside υλοποιεί μια βηματική συνάρτηση, ανάλογα με το ορισμα που της δίνεται. Η συνάρτηση axis προσαρμόζει τα όρια των αξόνων στο σχήμα. Στο Σχήμα 5 φαίνεται το αποτέλεσμα του παραπάνω κώδικα. Τώρα, η συνέλιξη των δυο αυτών σημάτων θα δινεται ως

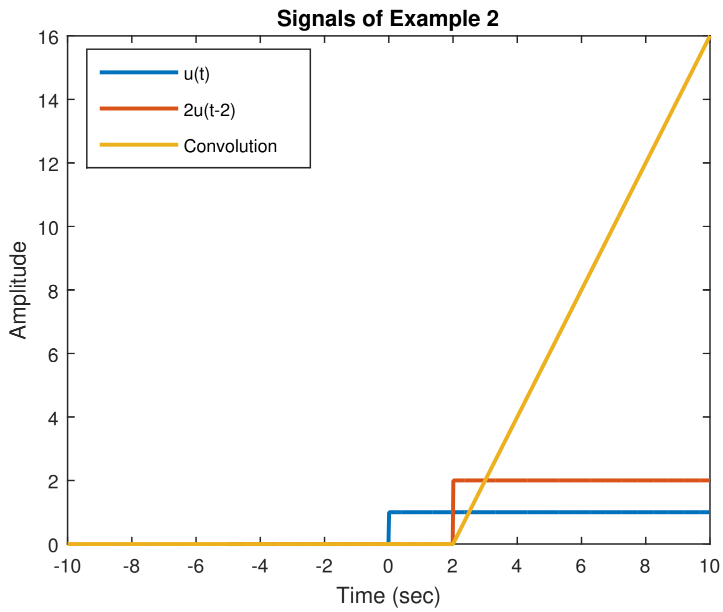


Σχήμα 5: Σήματα Παραδειγματος (β).

```
ty = -10:ts:10;             % Time vector for y(t)
y = ts*conv(x,h);           % Convolution (size [-10,20])
y = y(1:length(ty));        % Keep only meaningful result ([-10,10])

plot(tx, x, th, h, ty, y);  % Plot
xlabel('Time (sec)');
ylabel('Amplitude');
title('Signals of Example (b)');
legend('u(t)', '2u(t-2)', 'Convolution');
```

Το αποτέλεσμα φαίνεται στο Σχήμα 6. Προσέξτε στον παραπάνω κώδικα το εξής: το διάνυσμα που αντιπροσωπεύει τον άξονα του χρόνου, ty, για τη συνέλιξη, $y(t)$, δεν υπακούει στον κανόνα που γνωριζετε και που είδαμε και στο προηγούμενο παράδειγμα. Ποιόν κανόνα; Αυτόν που λέει οτι ένα πεπερασμένης διάρκειας σημα $x(t)$, που ειναι μη μηδενικό στο $[a, b]$, οταν "συνελίσσεται"[1] με ένα άλλο πεπερασμένης διάρκειας σή-

[1] Νέα λέξη! :-)



Σχήμα 6: Σήματα και Συνέλιξη Παραδειγματος (β).

μα $h(t)$, που ειναι μη μηδενικό στο $[c, d]$, τότε το αποτέλεσμά τους (η συνέλιξη δηλαδη) ειναι μη μηδενικό στο $[a + c, b + d]$. Εδώ, ορίσαμε και τα δυο σήματά μας στο $[-5, 10]$, παρ' ολο που δεν είναι πεπερασμένα θεωρητικά, οπως είπαμε. Αντί όμως να πάρουμε ως άξονα χρονου ty για τη συνέλιξη το $[-10, 20]$, πήραμε το $[-10, 10]$! Γιατί; Η απάντηση είναι ότι σε τέτοιες περιπτώσεις, όπου αναπαριστούμε άπειρα - θεωρητικά - σήματα στο MATLAB, πρεπει να ελέγχουμε/γνωρίζουμε μέχρι ποιό χρονικό σημείο τα αποτελέσματά μας έχουν νόημα (συμπίπτουν δηλαδή με αυτά της θεωρίας). Εν προκειμένω, ξέρουμε ότι μετά τη χρονική στιγμή 10 sec, το σημα μας θεωρείται (από το MATLAB) ότι μηδενίζεται, πράγμα που δε συμβαίνει στη θεωρία. Οπότε ό,τι αποτέλεσμα παίρνουμε μετά από το 10ο δευτερόλεπτο, δεν έχει νόημα! Θεωρούμε ότι η γραφική παράσταση της συνέλιξης ώς το 10ο δευτερόλεπτο συνεχίζεται επ' άπειρον στο μοτίβο που είχε ως εκείνη τη χρονική στιγμή (στο παράδειγμά μας, η ευθεία συνεχίζει να ανεβαίνει ως το άπειρο).

Προσέξτε οτι η γραμμή

```
y = y(1:length(ty));        % Keep only meaningful result ([-10,10])
```

αποθηκεύει στο διάνυσμα `y` τα στοιχεια του διανύσματος `y` από το πρώτο ως τον αριθμό που ισούται με το μήκος του άξονα `ty` που έχουμε επιλέξει. Η συνάρτηση `length` μας επιστρέφει το μήκος ενός διανύσματος (δηλ. πόσα στοιχεία περιέχει). Επειδή η συνάρτηση `conv` μας επιστρεφει την πλήρη συνέλιξη, θεωρώντας ότι τα σηματά μας μηδενίζονται μετα το 10ο δευτερόλεπτο, πρέπει εμείς να κρατήσουμε τα στοιχεία του `y` που έχουν νόημα. Αυτό κάνουμε στην παραπάνω γραμμή.

Ας λύσουμε τη συνέλιξη αναλυτικά, να δούμε αν συμπίπτουν τα αποτελέσματα μας. Θα ειναι

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} 2u(\tau)u(t-\tau-2)d\tau \tag{18}$$

Όμως παρατηρούμε οτι

$$u(t-\tau-2) = \begin{cases} 1, & t-\tau-2 > 0 \Leftrightarrow \tau < t-2, \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{19}$$

και

$$u(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0, \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{20}$$

Οπότε, από κοινού,

$$2u(\tau)u(t-\tau-2) = \begin{cases} 2, & 0 < \tau < t-2, \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{21}$$

Άρα το ολοκλήρωμά μας γίνεται

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} 2u(\tau)u(t-\tau-2)d\tau = \int_{0}^{t-2} 2d\tau \\ &= 2\tau\Big|_{0}^{t-2} = 2(t-2) = 2t-4, \quad \text{για } \ t > 2. \end{aligned} \tag{22}$$

Προφανώς, για $t \leq 2$, $y(t) = 0$.

Είδατε οτι κάποιες φορές, δεν είναι απαραιτητο να διαχωρίζουμε περιπτώσεις με σχήματα για τη συνέλιξη, αν και σιωπηλά κάναμε κάτι τέτοιο με μαθηματικά.

Μπορειτε να δείτε, τέλος, οτι το αποτέλεσμά μας ειναι το ίδιο με αυτό που μας έδωσε η συνάρτηση `conv` (η $2t-4$ περνάει από τα σημεία $(2,0), (10,16)$ που περνά και η ευθεία του Σχήματος 6).

Παραδώστε κώδικα MATLAB που εκτελεί και απεικονίζει τις συνελίξεις της Άσκησης 4.

Άσκηση 8 - Συστήματα στο MATLAB μέσω Διαφορικών Εξισώσεων

Το MATLAB έχει τη δυνατότητα να λύσει με συμβολικό τρόπο διαφορικές εξισώσεις. Ας δούμε πως: έστω ότι θέλουμε να βρούμε τη *συνολική έξοδο* (δηλ. και τις δυο αποκρίσεις, μηδενικής εισόδου και μηδενικής κατάστασης) ενός συστήματος που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = x(t) + 2\frac{d}{dt}x(t) \tag{23}$$

για είσοδο $x(t) = e^{-t}u(t)$ και με αρχικές συνθήκες $y(0^-) = 2$.

(i.) **Απόκριση μηδενικής εισόδου:** η απόκριση μηδενικής εισόδου είναι η έξοδος του συστήματος μόνο λόγω των αρχικών συνθηκών. Για να τη βρούμε στο MATLAB χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση `dsolve` και κάνουμε το εξης:

```
syms y(t)                                          % Symbolic function y(t)
yzi = dsolve(diff(y,t) + 2*y == 0, y(0) == 2)      % Find yzi(t)
```

και το MATLAB μας απαντά ότι

```
yzi =

2*exp(-2*t)
```

που είναι και η σωστή απάντηση (το $u(t)$ υπονοείται εδώ). Παρατηρήστε ότι η `dsolve` πήρε δυο ορίσματα: ένα που περιγράφει τη διαφορική εξίσωση (η συνάρτηση `diff` υποδηλώνει την παράγωγο ως προς t) και ένα όρισμα που δηλώνει την αρχική συνθήκη.

(ii.) **Απόκριση μηδενικής κατάστασης:** η απόκριση μηδενικής κατάστασης είναι η έξοδος του συστήματος για κάποια είσοδο, με μηδενικές αρχικές συνθήκες. Για να τη βρούμε στο MATLAB χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση `dsolve` με λίγο διαφορετικό τρόπο, ως εξης:

```
syms y(t)                                                   % Symbolic function y(t)
syms x(t)                                                   % Symbolic function x(t)
x(t) = exp(-t);                                             % Make x(t) specific
yzs = dsolve(diff(y,t) + 2*y == x(t) + 2*diff(x,t), y(0) == 0) % Find yzs(t)
```

και το MATLAB μας επιστρέφει

```
yzs =

exp(-2*t) - exp(-t)
```

όπου και εδώ το $u(t)$ στα εκθετικά υπονοείται. Παρατηρήστε ότι η `dsolve` πήρε δυο ορίσματα: ένα που περιγράφει τη διαφορική εξίσωση με τη δεδομένη είσοδο που μας ενδιαφέρει, και ένα όρισμα που δηλώνει την αρχική συνθήκη, η οποία εδώ είναι μηδενική, ως οφείλει.

(iii.) Άρα η συνολική έξοδος για την παραπάνω διαφορική εξίσωση με τη δεδομένη είσοδο $x(t) = e^{-t}u(t)$ είναι

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) = (2e^{-2t} - e^{-t} + e^{-2t})u(t) = (3e^{-2t} - e^{-t})u(t) \tag{24}$$

και αυτό μας το επιβεβαιώνει και το MATLAB:

```
ytotal = yzi + yzs

ytotal =

3*exp(-2*t) - exp(-t)
```

Παραδώστε κώδικα MATLAB που βρίσκει τη συνολική έξοδο για τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

1. $\dfrac{d^2}{dt^2}y(t) + 6\dfrac{d}{dt}y(t) + 9y(t) = 9x(t) + 2\dfrac{d}{dt}x(t),$

   για $x(t) = e^{-2t}u(t)$, και με αρχικές συνθήκες $y(0^-) = 1$, $y'(0) = -1$.

2. $\dfrac{d^2}{dt^2}y(t) + 2\dfrac{d}{dt}y(t) + y(t) = \dfrac{d}{dt}x(t),$

   για $x(t) = -e^{t}u(t)$, και με αρχικές συνθήκες $y(0^-) = 0$, $y'(0) = 1$.

   Hint: Για να βάλετε στο παιχνίδι τις αρχικές συνθήκες παραγώγων, δηλώστε μαζί με τις $x(t), y(t)$ μια νέα συμβολική συνάρτηση `Dy = diff(y,t)` η οποία αντιπροσωπεύει την παράγωγο της $y(t)$.