ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

**ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς**
**Εαρινό Εξάμηνο 2016-17**
**Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής**

## Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 2/3/2017 Ημερομηνία Παράδοσης: 14/3/2017

### Άσκηση 1 - Ιδιότητες Συστημάτων

Είναι

(α') $y(t) = x(t)\sin(t-1)$

- Το σύστημα είναι γραμμικό γιατί αν

$$ax_1(t) \to y(t) = ax_1(t)\sin(t-1) = ay_1(t)$$

και

$$bx_2(t) \to y(t) = bx_2(t)\sin(t-1) = by_2(t)$$

τότε

$$ax_1(t) + bx_2(t) \to y(t) = (ax_1(t) + bx_2(t))\sin(t-1) = ay_1(t) + by_2(t)$$

- Είναι

$$x(t-t_0) \to x(t-t_0)\sin(t-1)$$

αλλά

$$y(t-t_0) = x(t-t_0)\sin(t-t_0-1) \neq x(t-t_0)\sin(t-1)$$

άρα είναι χρονικά μεταβλητό.

- Είναι αιτιατό αφού η έξοδος εξαρτάται μόνο από την τωρινή τιμή της εισόδου.
- Είναι ευσταθές γιατί αν $|x(t)| < B_x$ τότε

$$|y(t)| = |x(t)\sin(t-1)| = |x(t)||\sin(t-1)| < B_x \cdot 1$$

αφού $|\sin(t-1)| \leq 1$.

- Δεν είναι δυναμικό αφού δε χρειάζεται μνήμη.

(β') $y(t) = \frac{1}{x(t)}$

- Το σύστημα δεν είναι γραμμικό γιατί

$$ax_1(t) \to y(t) = \frac{1}{ax_1(t)} = (1/a)y_1(t)$$

, οπότε δεν ικανοποιείται η ιδιότητα της ομογένειας.

- Είναι

$$x(t-t_0) \to \frac{1}{x(t-t_0)}$$

και

$$y(t-t_0) = \frac{1}{x(t-t_0)}$$

άρα είναι χρονικά αμετάβλητο.

- Είναι αιτιατό αφού η έξοδος εξαρτάται μόνο από την τωρινή τιμή της εισόδου.
- Δεν είναι ευσταθές γιατί αν $0 \leq |x(t)| < B_x$ τότε

$$|y(t)| = \frac{1}{|x(t)|} > \frac{1}{B_x}$$

  και $|y(t)| \to \infty$ αν $x(t) = 0$.
- Δεν είναι δυναμικό αφού δε χρειάζεται μνήμη.

(γ') $y(t) = 4x(t-1) - x(1-t)$

- Το σύστημα είναι γραμμικό γιατί αν

$$ax_1(t) \to y(t) = 4ax_1(t-1) - ax_1(1-t) = ay_1(t)$$

  και

$$bx_2(t) \to y(t) = 4bx_2(t-1) - bx_2(1-t) = by_2(t)$$

- Είναι

$$x(t-t_0) \to 4x(t-t_0-1) - x(1-t+t_0)$$

  και

$$y(t-t_0) = 4x(t-1-t_0) - x(1-t+t_0)$$

  άρα είναι χρονικά αμετάβλητο.
- Δεν είναι αιτιατό αφού η έξοδος εξαρτάται από μελλοντική τιμή της εισόδου (το $y(0)$ απαιτεί το $x(1)$).
- Είναι ευσταθές γιατί αν $|x(t)| < B_x$ τότε

$$|y(t)| = |4x(t-1) - x(1-t)| \leq 4|x(t-1)| + |x(1-t)| < 4B_x + B_x = 5B_x$$

- Είναι δυναμικό αφού χρειάζεται μνήμη (το $y(0)$ απαιτεί το $x(-1)$ και το $x(1)$).

**Άσκηση 2 - Απόκριση Μηδενικής Εισόδου**

(α') Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το

$$\lambda^2 + 7\lambda + 10$$

και οι χαρακτηριστικές ρίζες του είναι οι $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -5$. Άρα η απόκριση μηδενικής εισόδου θα είναι της μορφής

$$y_{zi}(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-5t}, \quad t > 0$$

Η παράγωγος είναι

$$\frac{d}{dt} y_{zi}(t) = -2c_1 e^{-2t} - 5c_2 e^{-5t}$$

και από τις αρχικές συνθήκες έχουμε

$$y(0^-) = c_1 + c_2 = 2$$

$$y'(0^-) = -2c_1 - 5c_2 = -2$$

Το παραπάνω σύστημα έχει λύση

$$c_1 = 8/3, \quad c_2 = -2/3$$

Άρα η απόκριση μηδενικής εισόδου δίνεται ως

$$y_{zi}(t) = \frac{8}{3} e^{-2t} u(t) - \frac{2}{3} e^{-5t} u(t)$$

(β΄) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το
$$\lambda^2 - 8\lambda + 16$$
και οι χαρακτηριστικές ρίζες του είναι οι $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 4$, διπλή ρίζα. Άρα η απόκριση μηδενικής εισόδου θα είναι της μορφής
$$y_{zi}(t) = (c_1 + c_2 t)e^{4t}, \quad t > 0$$
Η παράγωγος είναι
$$\frac{d}{dt} y_{zi}(t) = 4c_1 e^{4t} + c_2 e^{4t} + 4c_2 t e^{4t}$$
και από τις αρχικές συνθήκες έχουμε
$$y(0^-) = c_1 = 0$$
$$y'(0^-) = 4c_1 + c_2 = -1$$
Το παραπάνω σύστημα έχει λύση
$$c_1 = 0, \quad c_2 = -1$$
Άρα η απόκριση μηδενικής εισόδου δίνεται ως
$$y_{zi}(t) = -te^{4t} u(t)$$

Το πρώτο σύστημα είναι ευσταθές γιατί όταν $t \to \infty$, η απόκριση μηδενικής εισόδου "σβήνει" στο μηδεν. Αυτό επιβεβαιώνεται από τις χαρακτηριστικές ρίζες, που είναι αρνητικές. Το δεύτερο σύστημα είναι ασταθές γιατί όταν $t \to \infty$, η απόκριση μηδενικής εισόδου "φεύγει" στο άπειρο. Αυτό επιβεβαιώνεται από τη χαρακτηριστική ρίζα, που είναι θετική.

**Άσκηση 3 - Κρουστική Απόκριση**

(α΄) Έχουμε
$$2\frac{d}{dt} h(t) + 10h(t) = \delta(t)$$
η οποία ανάγεται στην
$$2\frac{d}{dt} h(t) + 10h(t) = 0$$
με αρχικές συνθήκες $h(0^+) = 1/a_1 = 1/2$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το
$$2\lambda + 10$$
και οι χαρακτηριστική ρίζα του είναι η $\lambda_1 = -5$. Άρα η απόκριση μηδενικής εισόδου θα είναι της μορφής
$$y_{zi}(t) = ce^{-5t}, \quad t > 0$$
Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε
$$h(0^+) = c_1 = 1/2$$
Άρα η κρουστική απόκριση δίνεται ως
$$h(t) = \frac{1}{2} e^{-5t} u(t)$$

(β΄) Εστω η διαφορική εξίσωση
$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) - 3\frac{d}{dt} y(t) + 2y(t) = x(t)$$
και έστω $h_o(t)$ η κρουστική της απόκριση. Έχουμε
$$\frac{d^2}{dt^2} h_o(t) - 3\frac{d}{dt} h_o(t) + 2h_o(t) = \delta(t)$$

η οποία ανάγεται στην

$$\frac{d^2}{dt^2}h_o(t) - 3\frac{d}{dt}h_o(t) + 2h_o(t) = 0$$

με αρχικές συνθήκες $h_o(0^+) = 0$, $h'_o(0^+) = 1$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2$$

και οι χαρακτηριστικές ρίζες του είναι οι $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$. Άρα η κρουστική απόκριση θα είναι της μορφής

$$h_o(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}, \quad t > 0$$

Η παράγωγος είναι

$$\frac{d}{dt}h_o(t) = c_1 e^t + 2c_2 e^{2t}$$

και από τις αρχικές συνθήκες έχουμε

$$h(0^+) = c_1 + c_2 = 0$$

$$h'(0^+) = c_1 + 2c_2 = 1$$

Το παραπάνω σύστημα έχει λύση

$$c_1 = -1, \quad c_2 = 1$$

Άρα η κρουστική απόκριση $h_o(t)$ δίνεται ως

$$h_o(t) = (-e^t + e^{2t})u(t)$$

Τέλος, η κρουστική απόκριση του αρχικού συστήματος δίνεται ως

$$\begin{aligned} h(t) = h_o(t) - \frac{d}{dt}h_o(t) &= -e^t u(t) + e^{2t}u(t) + \frac{d}{dt}e^t u(t) - \frac{d}{dt}e^{2t}u(t) \\ &= -e^t u(t) + e^{2t}u(t) + e^t u(t) + e^t\delta(t) - 2e^{2t}u(t) - e^{2t}\delta(t) \\ &= e^{2t}u(t) + \delta(t) - 2e^{2t}u(t) - \delta(t) \\ &= -e^{2t}u(t) \end{aligned}$$

Το πρώτο σύστημα είναι ευσταθές γιατί όταν $t \to \infty$, η απόκριση μηδενικής εισόδου “σβήνει” στο μηδεν. Αυτό επιβεβαιώνεται από τη χαρακτηριστική ρίζα που είναι αρνητική. Το δεύτερο σύστημα είναι ασταθές γιατί όταν $t \to \infty$, η απόκριση μηδενικής εισόδου “φεύγει” στο άπειρο. Αυτό επιβεβαιώνεται από τις χαρακτηριστικές ρίζες που είναι θετικές.

**Άσκηση 4 - Συνέλιξη - Ι**

(α΄) Έχουμε

$$\begin{aligned} y(t) = h(t) * x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\tau}u(\tau)e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\tau}u(\tau)e^{-t}e^{\tau}u(t-\tau)d\tau = e^{-t}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau}u(\tau)u(t-\tau)d\tau \\ &= e^{-t}\int_0^t e^{-\tau}d\tau \end{aligned}$$

αφού

$$u(\tau)u(t-\tau) = 1$$

για $0 < \tau < t$. Οπότε

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-t}\int_0^t e^{-\tau}d\tau = e^{-t}(-e^{-\tau})\Big]_0^t \\ &= -e^{-t}(e^{-t}-1) = e^{-t}-e^{-2t}, \quad t>0 \end{aligned}$$

Οπότε

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ e^{-t}-e^{-2t}, & t > 0 \end{cases}$$

(β΄) Έχουμε

$$\begin{aligned} y(t) = h(t) * x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} 6e^{-\tau}u(\tau)2u(t-\tau)d\tau \\ &= 12\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau}u(\tau)u(t-\tau)d\tau = 12\int_0^t e^{-\tau}d\tau \end{aligned}$$

αφού

$$u(\tau)u(t-\tau) = 1$$

για $0 < \tau < t$. Οπότε

$$\begin{aligned} y(t) &= 12\int_0^t e^{-\tau}d\tau = 12(-e^{-\tau})\Big]_0^t \\ &= 12(-e^{-t}+1) = 12(1-e^{-t}), \quad t>0 \end{aligned}$$

Οπότε

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 12(1-e^{-t}), & t > 0 \end{cases}$$

**Άσκηση 5 - Συνέλιξη - ΙΙ**

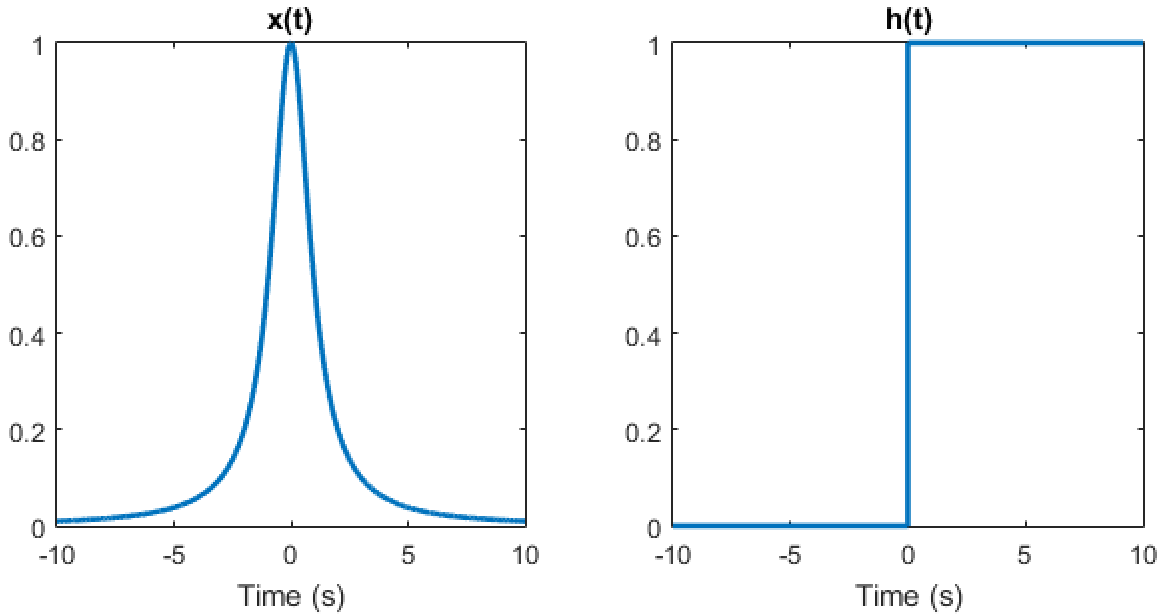
Επιλέγουμε να μετατοπίσουμε το $x(t)$, καθ' ότι ευκολότερο σήμα. Το $x(t)$ είναι ένας μοναδιαίος τετραγωνικός παλμός διάρκειας $T = 2$, στο διάστημα $(-1, 1)$, οπότε το σήμα $x(t-\tau)$ είναι ένας παλμός στο διάστημα $(t-1, t+1)$. Το τριγωνοειδές σήμα $h(t)$ έχει τιμές στο $[0, 3]$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $c(t) = 0, \;\; t+1 < 0 \Leftrightarrow t < -1$
- $c(t) = \int_0^{t+1}\frac{\tau}{3}d\tau = \frac{1}{3}\frac{\tau^2}{2}\Big]_0^{t+1} = \frac{1}{6}(t+1)^2$, για $t-1<0$ και $t+1 \geq 0$, δηλ. $-1 \leq t < 1$
- $c(t) = \int_{t-1}^{t+1}\frac{\tau}{3}d\tau = \frac{1}{3}\frac{\tau^2}{2}\Big]_{t-1}^{t+1} = \frac{1}{6}((t+1)^2-(t-1)^2) = \frac{1}{6}4t = \frac{2}{3}t$, για $t-1 \geq 0$ και $t+1 < 3$, δηλ. $1 \leq t < 2$.
- $c(t) = \int_{t-1}^{3}\frac{\tau}{3}d\tau = \frac{1}{3}\frac{\tau^2}{2}\Big]_{t-1}^{3} = \frac{1}{6}(9-(t-1)^2) = -\frac{1}{6}(t^2-2t-8)$, για $t-1<3$ και $t+1 \geq 3$, δηλ. $2 \leq t < 4$.
- $c(t) = 0, \;\; t-1 \geq 3 \Leftrightarrow t \geq 4$

Άρα συνολικά

$$c(t) = \begin{cases} (1/6)(t+1)^2, & -1 \leq t < 1 \\ \\ (2/3)t, & 1 \leq t < 2 \\ \\ (-1/6)(t^2-2t-8), & 2 \leq t < 4 \\ \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

[$\star$] **Άσκηση 6 - Έξοδος ΓΧΑ Συστημάτων**
Τα σήματα φαίνονται στο Σχήμα 1.




Σχήμα 1: Σχήματα Άσκησης 6.

Αφού το σύστημα είναι ΓΧΑ, η έξοδος θα αποτελείται μόνο από την απόκριση μηδενικής κατάστασης, δηλ. από τη συνέλιξη της εισόδου με την κρουστική απόκριση. Είναι

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\tau^2+1}u(t-\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\tau^2+1}d\tau
\end{aligned}
$$

αφού

$$u(t-\tau) = 1$$

για $\tau < t$. Οπότε

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\tau^2+1}d\tau = \tan^{-1}(\tau)\Big]_{-\infty}^{t} \\
&= \tan^{-1}(t) - \lim_{t\to-\infty} \tan^{-1}(t) = \tan^{-1}(t) + \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

αφού η αντίστροφη εφαπτομένη έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$ η οποία είναι η $y = -\pi/2$.

[$\star$] **Άσκηση 7 - Συνέλιξη στο MATLAB**
Κώδικας MATLAB

**Άσκηση 8 - Συστήματα στο MATLAB μέσω Διαφορικών Εξισώσεων**
Κώδικας MATLAB