ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2016-17
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 17/2/2017 Ημερομηνία Παράδοσης: 28/2/2017

Οι ασκήσεις με [$\star$] είναι **bonus**, $+10$ μονάδες η καθεμία στο βαθμό αυτής της σειράς ασκήσεων (δηλ. μπορείτε να πάρετε μέχρι $80/60$ σε αυτή τη σειρά.)

Άσκηση 1 - Σχεδίαση Βασικών Σημάτων Ι
Σχεδιάστε τα παρακάτω σήματα

(α') $e^{-2t}u(t-2)$

(β') $u(t^2-4)$

(γ') $4\text{rect}\left(\frac{t-2}{5}\right)$

(δ') $\text{tri}\left(\frac{t+1}{2}\right)+\text{rect}\left(\frac{2t-1}{2}\right)$

Άσκηση 2 - Σχεδίαση Βασικών Σημάτων ΙΙ
Θεωρήστε το σήμα

$$x(t)=\begin{cases} t, & 0\le t<1 \\ \frac{1}{2}(3-2t), & 1\le t<3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{1}$$

Σχεδιάστε το σήμα $x(t)$ καθώς και τα σήματα $x(2t)$, $x(t/2)$, $x(-t+1)$, $x(t)u(2-t)$.

[$\star$] Άσκηση 3 - Σχεδίαση Βασικών Σημάτων ΙΙΙ
Έστω το σήμα

$$x(t)=\begin{cases} t+1, & -1\le t<0 \\ 1, & 0\le t<1 \\ 2, & 1\le t<2 \\ t-3, & 2\le t<3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{2}$$

Σχεδιάστε τα σήματα

(α') $x(t-2)$

(β') $x(1-t)$

(γ') $x(2t+2)$

(δ') $x(2-t/3)$

(ε') $(x(t)+x(2-t))u(1-t)$

(ϛ') $x(t)\Big(\delta(t+3/2)-\delta(t-3/2)\Big)$

Άσκηση 4 - Συνάρτηση Δέλτα
Αποδείξτε ότι

(α') $(t^4+4)\delta(t) = 4\delta(t)$

(β') $e^{-3t}\delta(t-4) = e^{-12}\delta(t-4)$

(γ') $\cos(t^2-\pi)\delta(t) = -\delta(t)$

(δ') $\dfrac{t^3+1}{t^2+15}\delta(t-1) = \dfrac{1}{8}\delta(t-1)$

(ε') $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j2\pi ft}dt = 1$

(ϛ') $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5(x-t)}\delta(2-t)dt = e^{-5(x-2)}$

(ζ') $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-8)\cos(\pi t)dt = 1$

Άσκηση 5 - Γενικευμένη Παραγώγιση

I. Βρείτε και σχεδιάστε τις πρώτες παραγώγους των παρακάτω σημάτων:

(α') $x(t) = u(t) - u(t-a),\ \ a > 0$

(β') $x(t) = t\Big[u(t) - u(t-a)\Big],\ \ a > 0$

(γ') $x(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$

Απ: (α') $dx/dt = \delta(t) - \delta(t-a)$
(β') $dx/dt = \mathrm{rect}\Big(\frac{t-\frac{a}{2}}{a}\Big) - a\delta(t-a)$
(γ') $dx/dt = 2\delta(t)$

II. Ο γνωστός τριγωνικός παλμός διάρκειας $2T$ και πλάτους A δίνεται από τη σχέση

$$x(t) = A\mathrm{tri}\Big(\frac{t}{T}\Big) \tag{3}$$

(α') Δείξτε ότι η πρώτη παράγωγος του τριγωνικού παλμού ισούται με

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{A}{T}\mathrm{rect}\Big(\frac{t+\frac{T}{2}}{T}\Big) - \frac{A}{T}\mathrm{rect}\Big(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\Big) \tag{4}$$

(β') Δείξτε ότι η δεύτερη παράγωγος του τριγωνικού παλμού ισούται με

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = \frac{A}{T}\delta(t+T) + \frac{A}{T}\delta(t-T) - \frac{2A}{T}\delta(t) \tag{5}$$

Hint: Δουλέψτε με σχήματα.

Άσκηση 6 - Ενέργεια και Ισχύς
Σχεδιάστε και ελέγξτε ποιά από τα παρακάτω σήματα είναι *ενέργειας, ισχύος, ή τίποτε από τα δύο.* Αρχικά αποφασίστε με βάση τα κριτήρια που αναπτύξαμε (αφορούν το πλάτος, τη διάρκεια, και τη συμπεριφορά του σήματος όταν $|t| \to \infty$) αν τα σήματα είναι ενέργειας, ισχύος, ή τίποτε από τα δυο, και στη συνέχεια βρείτε την ενέργεια ή την ισχύ καθενός από αυτά.

(α') $x(t) = 3e^{\frac{1}{2}t}u(t)$

(β') $x(t) = -\frac{1}{3}e^{-2(t-2)}u(t-2)$

(γ') $x(t) = \sin(2\pi 100t) - \frac{1}{2}\cos(2\pi 200t)$

(δ') $x(t) = 2u(t) - 1$

(ε') $x(t) = 2\mathrm{rect}\left(\frac{2t}{2}\right)$

Απ:

	Ενέργεια	Ισχύς
(α)	✗	✗
(β)	✓$E_x = 1/36$	✗
(γ)	✗	✓$P_x = 0.625$
(δ)	✗	✓$P_x = 1$
(ε)	✓$E_x = 4$	✗

Άσκηση 7 - Ολοκληρώματα στο MATLAB

Στην παραπάνω άσκηση, στο (β) ερώτημα, σας ζητήθηκε να δείξετε ότι

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \frac{1}{36} \tag{6}$$

για $x(t) = -\frac{1}{3}e^{-2(t-2)}u(t-2)$. Η τιμή του παραπάνω ολοκληρώματος μπορεί να υπολογιστεί με αρκετή ακρίβεια με χρήση του MATLAB. Ας δούμε πρώτα τι λέει η θεωρία.

Ολοκλήρωμα Riemann

Ο Riemann πρότεινε την προσέγγιση ενός ολοκληρώματος από τμηματικά σταθερές συναρτήσεις, των οποίων το αθροιστικό εμβαδό δίνει μια τιμή για το ολοκλήρωμα. Με μαθηματικά

$$\int_a^b x(t)dt = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{N} x(\Delta t_i)\Delta t \tag{7}$$

Τι μας λέει η παραπάνω σχέση; Μας λέει ότι η τιμή ενός ορισμένου ολοκληρώματος μπορεί να βρεθεί αν κάνουμε τα εξής:

(i) Χωρίζουμε το διάστημα $[a, b]$ σε N ίσα μέρη μήκους Δt το καθένα. Αυτή η διαμέριση του διαστήματος λέγεται *ομοιόμορφη*.

(ii) Παίρνουμε ένα σημείο Δt_i σε κάθε ένα από αυτά τα διαστήματα. Για παράδειγμα, το μέσο του διαστήματος Δt ή όποιο άλλο θέλουμε.

(iii) Υπολογίζουμε την τιμή της συνάρτησης $x(t)$ στα σημεία Δt_i.

(iv) Έχουμε τώρα N τιμές της $x(t)$ και N τμήματα μήκους Δt.

(v) Πολλαπλασιάζουμε τις N τιμές της $x(t)$, δηλ. τις $x(\Delta t_i)$, με τα N το πλήθος Δt, και τις προσθέτουμε όλες μαζί, για να πάρουμε το αποτέλεσμα.

Για να είναι ακριβές το αποτέλεσμα, πρέπει το Δt να είναι όσο μικρότερο γίνεται, δηλ. ιδανικά να ισχύει $\Delta t \to 0$, ώστε να υπάρχει ισότητα μεταξύ ολοκληρώματος και αθροίσματος.

I. Ας δούμε πως θα υλοποιούσαμε αριθμητικά στο MATLAB το ολοκλήρωμα της Άσκησης 6(β), δηλ. τη Σχέση (6). Έχουμε

```
%%%%%%%%%%%%% ARI8MHTIKH OLOKLHRWSH %%%%%%%%%%%%%%%
% Orizoume ton a3ona tou xronou apo 2 (logw ths bhmatikhs)
% ws mia megalh timh (p.x. 1000) tmhmatopoiwntas ton ana Dt = 0.001;
Dt = 0.001;
t = 2:Dt:1000;

% H synarthsh x(t) orizetai ws e3hs:
x = (-1/3)*exp(-2*(t-2));

% Ypswnoume sto tetragwno
x_sq = x.^2;

% Ypologizoume to oloklhrwma Riemmann
apotelesma = Dt * sum(x_sq)

apotelesma =

    0.0278
```

Ας το επιβεβαιώσουμε:

```
% Epibebaiwsh
1/36

ans =

    0.0278
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

II. Ας υπολογίσουμε τώρα το (διάσημο) ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi/2} \left(\frac{t}{\sin(t)}\right)^2 dt = \pi \ln(2) \tag{8}$$

Αρχικά πρέπει να προσέξουμε ότι η συνάρτηση μέσα στο ολοκλήρωμα δεν ορίζεται για $t = 0$. Οπότε:

```
%%%%%%%%%%%%% ARI8MHTIKH OLOKLHRWSH %%%%%%%%%%%%%%%
% Orizoume ton a3ona tou xronou apo 0+Dt ws pi/2 gia na mh mhdenizetai
% o paronomasths ths synarthshs. H tmhmatopoihsh einai 3ana ana Dt.
Dt = 0.001;
t = Dt:Dt:pi/2;

% Orizoume th synarthsh
x = (t./sin(t)).^2;

% Ypologizoume to oloklhrwma Riemmann
apotelesma = Dt * sum(x)

apotelesma =
```

```
    2.1764

% Epibebaiwsh
pi*log(2)

ans =

    2.1776
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

III. Μια πολύ σπουδαία ιδιότητα που έχει το MATLAB είναι η ικανότητά του να εκτελεί (μερικώς) *συμβολικούς* υπολογισμούς, δηλ. υπολογισμούς χωρίς αριθμητικές τιμές! Ας δούμε πως θα υλοποιούσαμε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\frac{5}{4} - \cos(t)} = \frac{8\pi}{3} \tag{9}$$

όχι αριθμητικά αυτή τη φορά, αλλά συμβολικά.

```
%%%%%%%%%%%% SYMBOLIKH OLOKLHRWSH %%%%%%%%%%%%%%
% Orizoume th symbolikh metablhth t
syms t;

% Orizoume th synarthsh
x = 1./(5/4 - cos(t));

% Zhtame apo th symbolikh synarthsh int() tou MATLAB na ypologisei
% gia emas to oloklhrwma!
apotelesma = int(x, t, 0, 2*pi)

apotelesma =

(8*pi)/3
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

Βλέπετε ότι όχι μόνο μας υπολογίζει το σωστό αποτέλεσμα αλλά μας το δίνει και σε κλειστή μορφή!!

IV. Με βάση τα παραπάνω, επιβεβαιώστε αριθμητικά και συμβολικά στο MATLAB τα ολοκληρώματα:

I. $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t} dt = -\frac{\pi^2}{12}$

II. $\int_1^2 \frac{(t+2)(t-2)}{t^2} dt = -1$

III. $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \frac{\pi^2}{6}$

IV. $\int_0^a \sqrt{a^2 - t^2} dt = \frac{\pi a^2}{4}$, για $a = 5$

V. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a}$, για $a = 2$

Παραδώστε τυπωμένο τον κώδικα MATLAB που γράψατε.

[$\star$] **Άσκηση 8 - Σύνθεση Μουσικής στο MATLAB**

Αν θελήσουμε να δημιουργήσουμε στο MATLAB ένα ημιτονοειδές σήμα συχνότητας $f = 440$ Hz (νότα ΛΑ), διάρκειας 0.5 sec (δηλ. 500 ms), με μηδενική φάση μετατόπισης ϕ και μοναδιαίου πλάτους A, με συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 16000$ Hz (που αντιστοιχεί σε καλής ποιότητας ηχογράφηση) θα γράψουμε τις ακόλουθες εντολές:

```
fs = 16000;
f = 440;
dur = 500;
t = 0:1/fs:dur/1000;
signal = sin(2*pi*f*t);
```

Για να ακούσουμε αυτό που φτιάξαμε, πληκτρολογούμε

```
soundsc(signal, fs);
```

Στην άσκηση αυτή θα συνθέσουμε τμήμα από το πολύ γνωστό κομμάτι του Beethoven, Fur Elise[1], από νότες πλήκτρων πιάνου.

(α΄) Με χρήση της εντολής

```
load('FurEliseData');
```

φορτώνετε το αρχείο `FurEliseData.mat` που σας δίνεται στο MATLAB.

Παρατηρήστε ότι δημιουργούνται 4 πίνακες - διανύσματα, `lefthand`, `lhdur`, `righthand`, `rhdur` οι οποίοι ανταποκρίνονται σε αριθμούς πλήκτρων πιάνου που παίζονται από το αριστερό χέρι (`lefthand`), με τις αντίστοιχες διάρκειές τους σε ms (`lhdur`), και σε αριθμούς πλήκτρων πιάνου που παίζονται με το δεξί χέρι (`righthand`), με τις αντίστοιχες επίσης διάρκειές τους σε ms (`rhdur`).

(β΄) Μετατρέψτε σε κάθε χέρι, κάθε αριθμό πλήκτρου πιάνου n στην αντίστοιχη συχνότητα με τη σχέση

$$f(n) = f_{LA} \times 2^{\frac{n-49}{12}} = 440 \times 2^{\frac{n-49}{12}} \tag{10}$$

Στο MATLAB αυτό γίνεται εύκολα ως

```
freq = 440*2.^((lefthand - 49)/12)
```

με αποτέλεσμα έναν πίνακα - διάνυσμα `freq` με τις αντίστοιχες συχνότητες. Οι παύσεις αναπαρίστανται στους πίνακες με τα πλήκτρα ως (0). Θα μετατραπούν κι αυτές - ενώ δεν πρέπει - όμως αυτό δε θα μας επηρεάσει.

(γ΄) Οι πίνακες `lhdur`, `rhdur` περιέχουν τη διάρκεια κάθε νότας σε ms για το αριστερό και το δεξί χέρι, αντίστοιχα. Ακολουθώντας τον παρακάτω κώδικα, δημιουργήστε τα αντίστοιχα ημίτονα με τη σωστή διάρκεια. Για τις παύσεις, θα δημιουργήσουμε ένα μηδενικό διάνυσμα με την ανάλογη διάρκεια.

```
% Poses notes exoume sto aristero xeri?
N = length(lefthand);

% Syxnothta deigmatolhpsias
fs = 16000;

% As ftia3oume ta hmitona
for i = 1:N
    % o a3onas tou xronou
```

[1] https://www.youtube.com/watch?v=_mVW8tgGY_w

```
    t = 0:1/fs:lhdur(i)/1000;
    if lefthand(i) == 0
    % exoume paush, dhmiourgoume ena dianysma me
    % mhdenika stoixeia, diarkeias lhdur(i) ms
        s{i} = zeros(1, length(t));
    else
    % ftia3te to antistoixo hmitono me xrhsh tou pinaka
    % freq pou dhmiourghsate nwritera
        freq = % INSERT CODE HERE;
        s{i} = % INSERT CODE HERE;
    end
end
```

(δ΄) Η δομή `s{}` ονομάζεται cell structure, και σε κάθε θέση της `i` μπορεί να αποθηκευτεί οποιαδήποτε μεταβλητή, οποιουδήποτε μεγέθους. Αυτό είναι βολικό γιατί οι νότες δεν έχουν όλες την ίδια διάρκεια, και ένας πίνακας $N \times L$ θα ήταν δύσχρηστος.

(ε΄) Όμως εδώ κάθε ημίτονο που φτιάξαμε βρίσκεται σε μια διαφορετική θέση στα cells. Πρέπει να τα βάλουμε διαδοχικά για να μπορέσουμε να ακούσουμε τη μελωδία. Άρα θα χρειαστούμε ένα αρκετά μεγάλο πίνακα - διάνυσμα που θα περιέχει το ένα μετά το άλλο τα σήματα που φτιάξαμε (ημίτονα και παύσεις). Ευτυχώς στο MATLAB αυτό γίνεται εύκολα, χωρίς να χρειάζεται να διαχειριστούμε ρητά τη μνήμη (εν αντιθέσει με τη C και τις αντίστοιχες `malloc`).

```
% Keno dianysma gia to aristero xeri - arxikopoihsh
signal_left = [ ];

% For loop gia na gemisoume to dianysma me ta diadoxika hmitona
for i = 1:N
    % Se ka8e loop, bazoume ena s{i} sto telos tou
    % prohgoumenou signal_left pou exoume ftia3ei
    signal_left = [ signal_left  s{i} ];
end
```

(ϛ΄) Επαναλάβατε τη διαδικασία για το δεξι χέρι, δηλ. τις μεταβλητές `righthand`, `rhdur` και αποθηκεύστε τα αποτελέσματά σας σε ξεχωριστές μεταβλητές. Παρατηρήστε ότι το δεξί χέρι παίζει λιγότερες νότες από το αριστερό.

(ζ΄) Δημιουργήστε το συνολικό σήμα, αθροίζοντας τα δυο σήματα ως

```
sig = signal_left + signal_right;
```

Αν τα έχετε κάνει όλα σωστά, το MATLAB θα σας επιστρέψει σφάλμα, γιατί λόγω αριθμητικών στρογγυλοποιήσεων, το ένα σήμα βγήκε λίγο μικρότερο από το άλλο, οπότε δε γίνεται να προστεθούν[2]. Χρησιμοποιήστε την εντολή `length` και μετρήστε το μήκος του κάθε σήματος. Πόση είναι η διαφορά τους σε πλήθος τιμών;

(η΄) Για μια γρήγορη διόρθωση στο παραπάνω πρόβλημα, χρησιμοποιήστε τις εντολές

```
D = length(signal_right)-length(signal_left);
signal_left = [signal_left zeros(1, D)];
sig = signal_left + signal_right;
```

[2]Να θυμάστε ότι τα πάντα στο MATLAB είναι πίνακες, και όλες οι πράξεις πρέπει να τηρούν τους κανόνες διάστασης των πινάκων.

(θ΄) Μπορείτε τώρα να ακούσετε το σήμα σας!

```
soundsc(sig, fs);
```

Σχολιάστε το αποτέλεσμα. Να σημειωθεί ότι ένα πραγματικό πλήκτρο πιάνου δεν παράγει ένα ημίτονο, όπως κάναμε εμείς, αλλά ένα άθροισμα από ημίτονα, με συχνότητες σχεδόν ακέραιες πολλαπλάσιες της θεμελιώδους συχνότητας και διαφορετικά μεταξύ τους πλάτη. Με άλλα λόγια, παράγει - προσεγγιστικά - μια *σειρά Fourier*, με πεπερασμένο πλήθος όρων, την οποία θα μελετήσουμε στη συνέχεια. Επίσης, σε ένα πραγματικό πιάνο, υπάρχουν πάρα πολλές λεπτομέρειες που μας χαρίζουν τον πλούσιο ήχο του, οι οποίες δεν είναι απλό να μοντελοποιηθούν[3].

Παραδώστε πλήρη κώδικα MATLAB, σκελετό του οποίου θα βρείτε στο αρχείο `fe.m`, που παράγει τα σήματα του δεξιού και του αριστερού χεριού, δημιουργεί το συνολικό σήμα, και το παίζει ως ήχο.

[3]Δείτε το - διαθέσιμο στο διαδίκτυο - άρθρο με τίτλο "Perceptual significance of inharmonicity and spectral envelope in the piano bass range", των Galembo et al., σελ. 6., εξίσωση (7), για να καταλάβετε πόσο πολύπολοκο είναι να συνθέσει κανείς έναν ήχο πλήκτρου πιάνου που να μοιάζει με τον πραγματικό. Η απλή όψη της εξίσωσης είναι αρκετή για να σας πείσει! ;-)