

HY-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2016-17

Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Πρώτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 10/2/2017

Ημερομηνία Παράδοσης: 17/2/2017

Οι ασκήσεις με [*] είναι **bonus**, +10 μονάδες η καθεμία στο βαθμό αυτής της σειράς ασκήσεων (δηλ. μπορείτε να πάρετε μέχρι 80/60 σε αυτή τη σειρά.)

Άσκηση 1 - Μιγαδικοί Αριθμοί I

Εκφράστε καθέναν από τους παρακάτω μιγαδικούς αριθμούς σε καρτεσιανή μορφή $(x + jy)$ και σχεδιάστε τους στο καρτεσιανό επίπεδο:

i) $\frac{1}{2}e^{j\pi}$, ii) $\frac{1}{2}e^{-j\pi}$, iii) $e^{j\pi/2}$, iv) $e^{-j\pi/2}$, v) $e^{j5\pi/2}$, vi) $\sqrt{2}e^{j\pi/4}$, vii) $\sqrt{2}e^{j9\pi/4}$, viii) $\sqrt{2}e^{-j9\pi/4}$

Άσκηση 2 - Μιγαδικοί Αριθμοί II

Εκφράστε καθέναν από τους παρακάτω μιγαδικούς αριθμούς σε πολική μορφή $re^{j\theta}$, $-\pi < \theta \leq \pi$, και σχεδιάστε τους με χρήση της πολικής τους μορφής στο καρτεσιανό επίπεδο, δείχνοντας κάθε φορά το μέτρο και τη γωνία τους:

i) 5, ii) -2, iii) $-3j$, iv) $\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$, v) $1 + j$, vi) $(1 - j)^2$, vii) $j(1 - j)$, viii) $\frac{1+j}{1-j}$, ix) $\frac{\sqrt{2}+j\sqrt{2}}{1+j\sqrt{3}}$

Άσκηση 3 - Τριγωνομετρικές Εξισώσεις I

Λύστε την ακόλουθη εξίσωση ως προς θ :

$$\Re\{(1 + j)e^{j\theta}\} = -1 \quad (1)$$

$$\text{Απ.: } \theta = \begin{cases} 2k\pi + \frac{\pi}{2}, & k \in \mathbb{Z} \\ 2k\pi - \pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

[*] Άσκηση 4 - Τριγωνομετρικές Εξισώσεις II

Έστω η τριγωνομετρική εξίσωση

$$5 \cos(2\pi f_0 t) - 4 \cos(2\pi f_0 t + \psi) = M \cos\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{4}\right) \quad (2)$$

ως προς ψ, M .

α) Δείξτε ότι η εύρεση των ψ, M μπορεί να αναχθεί στη λύση του συστήματος

$$5 = 4 \cos(\psi) + \frac{\sqrt{2}}{2} M \quad (3)$$

$$0 = 4 \sin(\psi) + \frac{\sqrt{2}}{2} M \quad (4)$$

β) Δείξτε ότι

$$\psi = \begin{cases} -0.405\pi \\ -0.095\pi \end{cases} \quad \text{και} \quad M = \begin{cases} 5.406 \\ 1.665 \end{cases} \quad (5)$$

Hint: Μετατρέψτε τα συνημίτονα σε πραγματικά μέρη μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων.

Άσκηση 5 - Άθροισμα Ημιτόνων Ίδιας Συχνότητας I

Έστω το σήμα

$$x(t) = 7 \cos\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{2}\right) + 6 \cos(2\pi f_0 t) \quad (6)$$

Γράψτε το $x(t)$ στη μορφή $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$.

Απ.: $A = 9.2195, \phi = 0.8622$

Άσκηση 6 - Άθροισμα Ημιτόνων Ίδιας Συχνότητας II

Έστω το σήμα

$$x(t) = \sqrt{3} \cos(2\pi f_0 t + \pi/3) + \sin(2\pi f_0 t + \pi/2) \quad (7)$$

Βρείτε ένα μιγαδικό σήμα $z(t)$ για το οποίο να ισχύει $x(t) = \Re\{z(t)\}$.

Απ.: $z(t) = 2.394e^{j(2\pi f_0 t + 0.677)}$

[*] Άσκηση 7 - Μιγαδικές Εξισώσεις

Λύστε την εξίσωση

$$z^6 = -1 \quad (8)$$

Πόσες διαφορετικές λύσεις βρίσκετε;

Απ.: 6 διαφορετικές λύσεις ($e^{j\pi/6}, e^{j\pi/2}, e^{j5\pi/6}, e^{j7\pi/6}, e^{j3\pi/2}, e^{j11\pi/6}$)

Άσκηση 8 - Σήματα στο MATLAB

Ο παρακάτω κώδικας εκτυπώνει τμήμα της γραφικής παράστασης του σήματος

$$x(t) = \Re\{-(3 + 2j)e^{j2\pi 12t}\} \quad (9)$$

παίρνοντας τιμές του σήματος $x(t)$ ανά 1/6000 δευτερόλεπτα¹ στο διάστημα $[-0.05, 0.15]$ s.

```
f0 = 12;
Z = -(3+2i);
dt = 1/6000;
t = -0.05:dt:0.15;
xx = real(Z*exp(j*2*pi*f0*t));
plot(t, xx); grid;
title('Signal part'), xlabel('Time (s)');
```

Διαβάστε προσεκτικά τον παραπάνω κώδικα και παραδώστε κώδικα που τυπώνει στο ίδιο διάστημα και με ίδιο dt

α) το σήμα

$$x(t) = 7 \cos\left(2\pi 20t + \frac{\pi}{2}\right) + 6 \cos(2\pi 20t) \quad (10)$$

β) το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του σήματος

$$z(t) = 2.394e^{j(2\pi 80t + 0.677)} \quad (11)$$

Παραδώστε τον κώδικα και τις γραφικές παραστάσεις που προκύπτουν.

¹Δηλ. 6000 τιμές της συνάρτησης $x(t)$ σε ένα δευτερόλεπτο!