ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2016-17
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Λυμένες Ασκήσεις σε Σήματα και Συστήματα

Άσκηση 1

Να προσδιορίσετε την ενέργεια του σήματος:

$$x(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}\sin(\beta t), & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

Λύση:
Από την εξίσωση ορισμού του σήματος διαπιστώνουμε ότι

$$|x(t)|^2 = |e^{-\alpha t}\sin(\beta t)|^2 = e^{-2\alpha t}\sin^2(\beta t) = \frac{1}{2}e^{-2\alpha t}[1-\cos(2\beta t)]$$

όπου για την εξαγωγή της τελευταίας έκφρασης χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2 t$.

Αντικαθιστώντας αυτήν τη σχέση στην εξίσωση ορισμού της ενέργειας και λαμβάνοντας υπόψη πως το σήμα ορίζεται μόνο στην περιοχή $t \geq 0$, θα έχουμε:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-2\alpha t}[1-\cos(2\beta t)]dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-2\alpha t}dt - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-2\alpha t}\cos(2\beta t)dt$$

Χρησιμοποιώντας τεχνικές υπολογισμού ολοκληρωμάτων, προκύπτει εύκολα ότι:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\alpha t}dt = -\frac{1}{2\alpha}e^{-2\alpha t}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2\alpha}$$

και

$$\int_0^{+\infty} e^{-2\alpha t}\cos(2\beta t)dt = \frac{\alpha}{2(\alpha^2+\beta^2)}$$

και με αντικατάσταση των παραπάνω εκφράσεων στην εξίσωση ορισμού της ενέργειας βρίσκουμε

$$E = \frac{1}{4\alpha} - \frac{1}{4}\frac{\alpha}{(\alpha^2+\beta^2)} = \frac{1}{4}(\frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}) = \frac{\beta^2}{4\alpha(\alpha^2+\beta^2)}$$

Από την τελευταία σχέση διαπιστώνουμε πως η φύση του σήματος εξαρτάται από τις τιμές των παραμέτρων α και β. Αν είναι $\alpha = 0$, το σήμα καθίσταται αμιγώς ημιτονοειδές και χαρακτηρίζεται από άπειρη ενέργεια ενώ για οποιαδήποτε άλλη πραγματική τιμή αυτών των παραμέτρων η ενέργεια του σήματος είναι πεπερασμένη και κατά συνέπεια το εν λόγω σήμα είναι σήμα ενέργειας.

Άσκηση 2

Να προσδιορίσετε την ενέργεια του σήματος $x(t) = e^{-|t|}$.

Λύση:
Από την εξίσωση ορισμού του σήματος $x(t)$ διαπιστώνουμε ότι

$$|x(t)|^2 = e^{-2|t|} = \begin{cases} e^{2t}, & t \leq 0 \\ e^{-2t}, & t > 0 \end{cases}$$

και επομένως είναι

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{0} e^{2t} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-2t} dt = \frac{1}{2} e^{2t}\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{2} e^{-2t}\Big|_{0}^{+\infty} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Παρατηρούμε πως η ενέργεια του σήματος είναι πεπερασμένη και για το λόγο αυτό το σήμα είναι σήμα ενέργειας.

Άσκηση 3
Για καθένα από τα συστήματα που περιγράφονται από τις εξισώσεις

(α') $y(t) = x(t)\cos(t)$

(β') $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

(γ') $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$

να εξετάσετε αν είναι χρονικά μεταβαλλόμενο ή χρονικά αμετάβλητο.

Λύση:
Προκειμένου να εξετάσουμε το χαρακτήρα του συστήματος ως προς το χαρακτηριστικό της χρονικής αμεταβλητότητας, θα πρέπει να ελέγξουμε αν αυτό ικανοποιεί ή όχι την ιδιότητα $y(t-t_0) = T[x(t-t_0)]$ (η κατάσταση είναι εντελώς ανάλογη αν αντί για $t - t_0$ χρησιμοποιήσουμε το $t + t_0$ κάτι που γίνεται ως εξής:

Αρχικά κάνουμε αντικατάσταση $t \to t - t_0$, για να υπολογίσουμε την παράσταση $y_{t_0}(t) = y(t-t_0)$ και στη συνέχεια προσδιορίζουμε την τιμή της παράστασης $T[x(t-t_0)$.

Λαμβάνοντας υπόψη πως ο μετασχηματισμός T εφαρμόζεται πάνω στην καθυστερημένη έκδοση του σήματος $x(t-t_0)$, θα πρέπει στην εξίσωση ορισμού του συστήματος να κάνουμε την αντικατάσταση $x(t) \to x(t-t_0)$. Αν αυτές οι δυο διαδικασίες οδηγήσουν στο ίδιο αποτέλεσμα, το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο, ενώ στην αντίθετη περίπτωση είναι χρονικά μεταβαλλόμενο. Αναλυτικά λοιπόν έχουμε:

(α') Προχωρώντας στην αντικατάσταση $t \to t - t_0$ προκύπτει εύκολα ότι

$$y(t-t_0) = x(t-t_0)\cos(t-t_0)$$

Ωστόσο, η αντικατάσταση $x(t) \to x(t-t_0)$ οδηγεί σε ένα αποτέλεσμα της μορφής

$$T[x(t-t_0)] = x(t-t_0)\cos(t)$$

Παρατηρούμε πως τα δυο αποτελέσματα δεν συμπίπτουν, δηλαδή το σύστημα είναι χρονικά μεταβαλλόμενο.

(β') Στην περίπτωση αυτή, η αντικατάσταση $t \to t - t_0$ οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$y(t-t_0) = \frac{dx(t-t_0)}{d(t-t_0)}$$

ενώ για $x(t) \to x(t-t_0)$, θα έχουμε

$$T[x(t-t_0)] = \frac{dx(t-t_0)}{dt}$$

Προχωρώντας στην αντικατάσταση $t - t_0 = \xi$ θα είναι $\xi = \xi(t) = t - t_0$ και $\xi'(t) = 1$ και επομένως

$$T[x(t-t_0)] = \frac{dx(t-t_0)}{dt} = \frac{dx(\xi)}{dt} = \frac{dx(\xi)}{d\xi}\frac{d\xi}{dt} = \frac{dx(t-t_0)}{dt-t_0}$$

Παρατηρούμε πως τα δυο αποτελέσματα συμπίπτουν, δηλαδή το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο.

(γ') Ακολουθώντας τη μεθοδολογία των προηγούμενων ασκήσεων, θέτουμε $t \to t-\theta$ και βρίσκουμε ότι

$$y(t-\theta) = \int_{-\infty}^{t-\theta} x(\tau)d\tau$$

ενώ η αντικατάσταση οδηγεί σε ένα αποτέλεσμα της μορφής

$$T[x(t-\theta)] = \int_{-\infty}^{t} x(\tau-\theta)d\tau$$

Προχωρώντας στην αλλαγή μεταβλητής $\tau - \theta = \xi$, θα είναι $d\tau = d(\xi+\theta) = d\xi$. Όσον αφορά τα όρια της ολοκλήρωσης, για $\tau \to -\infty$, θα είναι προφανώς και $\xi \to -\infty$, ενώ για $\tau = t$ θα είναι $\xi + \theta = t$ ή ισοδύναμα $\xi = t - \theta$ και η παραπάνω σχέση θα λάβει τη μορφή

$$T[x(t-\theta)] = \int_{-\infty}^{t} x(\tau-\theta)d\tau = \int_{-\infty}^{t-\theta} x(\xi)d\xi$$

Παρατηρούμε πως τα δυο αποτελέσματα ταυτίζονται, δηλαδή το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο.

Άσκηση 4

Για καθένα από τα συστήματα που περιγράφονται από τις εξισώσεις

(α') $y(t) = x(t-2) + x(2-t)$

(β') $y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)d\tau$

(γ') $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

να εξετάσετε αν είναι ευσταθές ή ασταθές.

Λύση:

(α') Διαβιβάζοντας στο σύστημα τη φραγμένη είσοδο $|x(t)| \leq \alpha$, παρατηρούμε ότι

$$|y(t)| = |x(t-2) + x(2-t)| \leq |x(t-2)| + |x(2-t)| = \alpha + \alpha = 2\alpha$$

Επομένως, πως η έξοδος του συστήματος είναι φραγμένη, δηλαδή το σύστημα είναι ευσταθές.

(β') Αν στο σύστημα διαβιβάσουμε τη φραγμένη είσοδο $|x(t)| \leq \alpha$, η έξοδός του θα είναι τέτοια, ώστε

$$|y(t)| \leq \int_{-\infty}^{2t} \alpha d\tau = \alpha \int_{-\infty}^{2t} d\tau = +\infty$$

Παρατηρούμε πως η έξοδος του συστήματος δεν είναι φραγμένη, δηλαδή το σύστημα είναι ασταθές.

(γ') Στην προκειμένη περίπτωση μπορούμε να χαρακτηρίσουμε το σύστημα ως ασταθές, αν βρούμε έστω και μια φραγμένη είσοδο για την οποία η έξοδος του συστήματος να μην είναι φραγμένη. Διαβιβάζοντας στο σύστημα τη βηματική συνάρτηση, $u(t)$, η οποία προφανώς είναι φραγμένη, η έξοδος του συστήματος θα είναι ίση με την παράγωγο της βηματικής συνάρτησης, η οποία ως γνωστό είναι η κρουστική συνάρτηση $\delta(t)$. Γνωρίζουμε, όμως, πως αυτή η συνάρτηση έχει παντού τιμή ίση με το μηδέν εκτός από τη θέση $t = 0$ στην οποία απειρίζεται. Εφόσον, λοιπόν, προσδιορίσαμε κάποια είσοδο για την οποία η έξοδος να μην είναι φραγμένη, έστω και για μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, το σύστημα θα πρέπει να χαρακτηριστεί ως ασταθές.

Άσκηση 5

(α΄) Βρείτε την $y_{zi}(t)$, την απόκριση μηδενικής εισόδου, για ένα σύστημα που περιγράφεται από την ακόλουθη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{x(t)}{dt}$$

όταν οι αρχικές συνθήκες είναι $y_{zi}(0) = 0$, $y_{zi}(0) = -5$.

Λύση:

Σημειώστε ότι $y_0(t)$, που είναι η συνιστώσα μηδενικής απόκρισης $x(t) = 0$, είναι η λύση της

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος είναι

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος είναι

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$$

Οι χαρακτηριστικές ρίζες του συστήματος είναι $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$.

Συνεπώς, η συνιστώσα μηδενικής εισόδου της τρέχουσας ανακύκλωσης είναι

$$\frac{dy_{zi}(t)}{dt} = c_1^{-t} + c_2e^{-2t}$$

Για να καθορίσουμε τις αυθαίρετες σταθερές, διαφορίζουμε την εξίσωση για να πάρουμε

$$y_{zi}(t) = -c_1e^{-t} - 2c_2e^{-2t}$$

Θέτοντας $t = 0$ στην εξίσωση και , και αντικαθιστώντας τις αρχικές συνθήκες $y_{zi}(0) = 0$ και $\dot{y}_{zi}(0) = -5$ παίρνουμε

$$0 = c_1 + c_2$$
$$-5 = -c_1 - 2c_2$$

Λύνοντας αυτές τις δυο εξισώσεις συγχρόνως ως προς τους δυο αγνώστους, έχουμε $c_1 = -5, \quad 2c_2 = 5$. Έτσι

$$y_{zi}(t) = (-5e^{-t} + 5e^{-2t})u(t)$$

Αυτή είναι η απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}(t)$ για $t > 0$.

(β΄) Η ίδια διαδικασία μπορεί να ακολουθηθεί για τις πολλαπλές ρίζες. Για παράδειγμα, για ένα σύστημα που καθορίζεται από

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 9y(t) = 3\frac{x(t)}{dt} + 5x(t)$$

έστω ότι ορίζουμε $y_{zi}(t)$, την απόκριση μηδενικής εισόδου, αν οι αρχικές συνθήκες είναι $y_{zi}(0) = 3$ και $\dot{y}_{zi}(0) = -7$.

Λύση: Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2$$

οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -3$ (πολλαπλές ρίζες). Η απόκριση μηδενικής εισόδου δίνεται ως

$$y_{zi}(t) = (c_1 + c_2t)e^{-3t}$$

Μπορούμε να βρούμε τις σταθερές c_1 και c_2 από τις αρχικές συνθήκες $y_{zi}(0) = 3$ και $\dot{y}_{zi}(0) = -7$ ακολουθώντας τη διαδικασία στο ερώτημα (α). Ο αναγνώστης μπορεί δείξει ότι $c_1 = 3$ και $c_2 = 2$. Έτσι

$$y_{zi}(t) = (3 + 2t)e^{-3t}, \quad t > 0$$

(γ΄) Για την περίπτωση των μιγαδικών ριζών, θα βρούμε την απόκριση μηδενικής εισόδου ενός συστήματος περιγράφεται από την εξίσωση

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 40y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

με αρχικές συνθήκες $y_{zi}(0) = 2$, και $\dot{y}_{zi}(0) = 16.78$.

Λύση: Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$\lambda^2 + 4\lambda + 40 = (\lambda + 2 - 6j)(\lambda + 2 + 6j)$$

Οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι $-2 \pm 6j$. Οι λύσεις μπορούν να γραφούν σε μιγαδική μορφή ή στην πραγματική μορφή. Η μιγαδική μορφή είναι $y_{zi}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$, όπου $\lambda_1 = -2 + 6j$, $\lambda_2 = -2 - 6j$. Αφού $\alpha = -2$ και $\beta = 6$, η λύση στην πραγματική μορφή είναι

$$y_{zi}(t) = ce^{-2t}\cos(6t + \theta)$$

όπου c και θ είναι τυχαίες σταθερές που καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες $y_{zi}(0) = 2$, και $\dot{y}_{zi}(0) = 16.78$. Η παραγώγιση της εξίσωσης δίνει

$$y_{zi}(t) = -2ce^{-2t}\cos(6t + \theta) - 6ce^{-2t}\sin(6t + \theta), \;\; t > 0$$

Θέτοντας $t = 0$ στις εξισώσεις και και μετά αντικαθιστώντας τις αρχικές συνθήκες, παίρνουμε

$$\begin{aligned} 2 &= c\cos\theta \\ 16.78 &= -2\cos\theta - 6c\sin\theta \end{aligned}$$

Η λύση αυτου του συστήματος εξισώσεων δίνει

$$c\cos\theta = 2, \;\; c\sin\theta = -3.463$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο και προσθέτοντας τα δυο μέλη των παραπάνω εξισώσεων δίνει

$$c^2 = 2^2 + (-3.463)^2 = 16 \Rightarrow c = 4$$

Μετά, διαιρώντας τις εξισώσεις , δηλαδή διαιρώντας $c\cos\theta$ με $c\sin\theta$ θα έχουμε

$$\tan\theta = \frac{-3.463}{2}$$

και

$$\theta = \tan^{-1}(\frac{-3.463}{2}) = -\frac{\pi}{3}$$

Έτσι

$$y_{zi}(t) = 4e^{-2t}\cos\left(6t - \frac{\pi}{3}\right)$$

Άσκηση 6

Να προσδιορίσετε την κρουστική απόκρουση του συστήματος:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{d^3x(t)}{dt^3} + 2\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 4\frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$$

Λύση:

Η παραπάνω εξίσωση προκύπτει από τη γενική διαφορική εξίσωση του συστήματος

$$\sum_{k=0}^{N} \alpha_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{l=0}^{M} \beta_l \frac{d^l}{dt^l} x(t)$$

για τιμές παραμέτρων $N = 2$, $M = 3$ και συντελεστές $\alpha_0 = 6$, $\alpha_1 = 5$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_0 = 3$, $\beta_1 = 4$, $\beta_2 = 2$ και $\beta_3 = 1$. Παρατηρούμε πως στην προκειμένη περίπτωση ισχύει η σχέση $M = 3 > N = 2$ και για το λόγο αυτό η κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος αναμένεται να περιέχει την πρώτη παράγωγο της κρουστικής συνάρτησης.

Εφαρμόζοντας τη μεθοδολογία που γνωρίζετε, θέτουμε το δεξί μέλος της εξίσωσης στη συνάρτηση $\delta(t)$, γράφοντας τη με τη μορφή

$$\frac{d^2h_o(t)}{dt^2} + 5\frac{dh_o(t)}{dt} + 6h_o(t) = \delta(t)$$

και στη συνέχεια επιλύουμε την ομογενή εξίσωση που θα προκύψει για $t > 0$ με αρχικές συνθήκες $h_o(0^+) = 0$ και $h_o'(0^+) = 1$. Θεωρώντας ως συνήθως μιγαδικές εκθετικές λύσεις της μορφής $h_o(t) = Ae^{\lambda t}$ $(A, \lambda \in C, t > 0)$ καταλήγουμε στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow (\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0$$

με ρίζες $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -3$.

Επομένως, η συνάρτηση δύναται να εκφραστεί ως ένας γραμμικός συνδυασμός της μορφής

$$h_o(t) = A_1e^{-2t} + A_2e^{-3t}$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση, καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\frac{dh_o(t)}{dt} = -2A_1e^{-2t} - 3A_2e^{-3t}$$

και εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες $h_\beta(0^+) = 0$ και $h_o'(0^+) = 1$, καταλήγουμε στο σύστημα των εξισώσεων

$$h_o(0^+) = A_1e^{-2t} + A_2e^{-3t}\big|_{t=0^+} = A_1 + A_2 = 0$$

$$\frac{dh_o(0^+)}{dt} = -2A_1e^{-2t} - 3A_2e^{-3t}\big|_{t=0^+} = -2A_1 - 3A_2 = 1$$

η λύση του οποίου αποδεικνύεται εύκολα πως είναι η $A_1 = 1$ και $A_2 = -1$. Επομένως, η συνάρτηση $h_o(t)$ ικανοποιεί τις εν λόγω αρχικές συνθήκες είναι η

$$h_o(t) = e^{-2t} - e^{-3t},\ (t > 0) = (e^{-2t} - e^{-3t})u(t)$$

Προκειμένου, λοιπόν, να προσδιορίσουμε την κρουστική απόκριση του συστήματος $h(t)$, θα πρέπει να αντικαταστήσουμε τη συνάρτηση $h_o(t)$ στη διαφορική εξίσωση

$$h(t) = \frac{d^3h_o(t)}{dt^3} + 2\frac{d^2h_o(t)}{dt^2} + 4\frac{dh_o(t)}{dt} + 3h_o(t)$$

Παραγωγίζοντας τρεις φορές ως προς το χρόνο και απλοποιώντας, όπως και πριν, τις παραστάσεις που προκύπτουν, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$ όπου η συνάρτηση $x(t)$ θα είναι είτε η e^{-2t} είτε η e^{-3t} [και στις δυο περιπτώσεις είναι $x(0) = 1$], διαδοχικά έχουμε:

$$\frac{dh_o(t)}{dt} = (3e^{-3t} - 2e^{-2t})u(t)$$

$$\frac{d^2h_o(t)}{dt^2} = (4e^{-2t} - 9e^{-3t})u(t) + \delta(t)$$

και

$$\frac{d^3h_o(t)}{dt^3} = (27e^{-3t} - 8e^{-2t})u(t) - 5\delta(t) + \frac{d\delta(t)}{dt}$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις εκφράσεις στην εξίσωση ορισμού της κρουστικής απόκρισης , βρίσκουμε

$$h(t) = \frac{d\delta(t)}{dt} - 3\delta(t) - 5e^{-2t}u(t) + 18e^{-3t}u(t)$$

που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα. Παρατηρούμε πως πράγματι η κρουστική απόκριση περιέχει την πρώτη παράγωγο της κρουστικής συνάρτησης σε πλήρη συμφωνία με ό,τι αναμέναμε.

Άσκηση 7
Να αποδειχθεί ότι

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

για κάθε συνάρτηση $x(t)$ η οποία είναι συνεχής στη θέση $t = t_0$.

Λύση:
Έστω συνάρτηση $f(t) = x(t)\phi(t)$ με τις συναρτήσεις $x(t)$ και $\phi(t)$ να είναι συνεχείς στη θέση $t = t_0$ όπως άλλωστε και η ίδια η συνάρτηση $f(t)$. Αντικαθιστώντας αυτήν τη συνάρτηση στην εξίσωση ορισμού της μετατοπισμένης συνάρτησης $\delta(t)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

θα λάβουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [x(t)\phi(t)]\delta(t-t_0)dt = x(t_0)\phi(t_0)$$

Είναι όμως ,

$$\phi(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\phi(t_0)dt$$

και η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [x(t)\phi(t)]\delta(t-t_0)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\left[x(t)\delta(t-t_0)\right]dt = x(t_0)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\phi(t_0)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\left[x(t_0)\delta(t-t_0)\right]dt$$

Θα είναι λοιπόν,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\left[x(t)\delta(t-t_0)\right]dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\left[x(t_0)\delta(t-t_0)\right]dt$$

από όπου προκύπτει ότι $x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$.

Παρατήρηση:
Αυτό το συμπέρασμα καθώς και όλα όσα στηρίζονται στη σύγκριση δυο ολοκληρωμάτων και στην εξίσωση των αντίστοιχων ποσοτήτων, αποτελεί συνέπεια της ιδιότητας της ισοδυναμίας των κατανομών σύμφωνα με την οποία δυο γενικευμένες συναρτήσεις g_1 και g_2 είναι ίσες μεταξύ τους αν και μόνο αν για κάθε κατάλληλα ορισμένη δοκιμαστική συνάρτηση ισχύει η σχέση $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)g_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)g_2(t)dt$.

Άσκηση 8
Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = x(t) + \frac{dx(t)}{dt}$$

Λύση:
Θεωρούμε το σύστημα

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = x(t) \qquad (1)$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος είναι

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

Οι χαρακτηριστικές ρίζες του συστήματος είναι $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$. Η κρουστική απόκριση του συστήματος (1), έστω $h_0(t)$, θα είναι ένας γραμμικός συνδυασμός ως:

$$h_0(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$$

Η πρώτη παράγωγος της απόκρισης είναι

$$h_0'(t) = -2c_1 e^{-2t} - 3c_2 e^{-3t}$$

Ως αρχικές συνθήκες λαμβάνουμε $h_0(0^+) = 0$, και $h_0'(0^+) = 1$. Η εφαρμογή των αρχικών συνθηκών δίνει το σύστημα εξισώσεων

$$h_0(0) = c_1 + c_2 = 0, \quad h_0'(0) = -2c_1 - 3c_2 = 1$$

από όπου $c_1 = 1$ και $c_2 = -1$. Η κρουστική απόκριση του συστήματος (1) είναι η

$$h_0(t) = e^{-2t} - e^{-3t}, \quad t > 0$$

Επομένως, η κρουστική απόκριση του συστήματος που μας δίνεται για $t > 0$ υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned}
h(t) &= \sum_k \frac{d^k}{dt^k} b_k h_0(t) \\
&= \frac{dh_0(t)}{dt} + h_0(t) = -2e^{-2t} + 3e^{-3t} + e^{-2t} - e^{-3t} \\
&= -e^{-2t} + e^{-3t}, \; t > 0 \\
&= (-e^{-2t} + 2e^{-3t})u(t)
\end{aligned}$$

Άσκηση 9

Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 3\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 7\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Λύση:

Θεωρούμε το σύστημα

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 3\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 7\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = x(t) \tag{2}$$

με κρουστική απόκριση $h_0(t)$

Η χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος είναι

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 7\lambda + 5 = (\lambda + 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 5) = 0$$

με χαρακτηριστικές ρίζες $s_1 = -1$, $s_{2,3} = -1 \pm j2$. Η κρουστική απόκριση του συστήματος (3), έστω $h_0(t)$, θα είναι ένας γραμμικός συνδυασμός ως:

$$h_0(t) = c_1 e^{-t} + e^{-t}(c_2 \cos 2t + c_3 \sin 2t)$$

Η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος της κρουστικής απόκρισης $h_0(t)$ υπολογίζονται ως

$$h_0'(t) = -c_1 e^{-t} - e^{-t}[(c_2 - 2c_3)\cos 2t + (2c_2 + c_3)\sin 2t]$$

$$h_0''(t) = c_1 e^{-t} - e^{-t}[-(3c_2 + 4c_3)\cos 2t + (4c_2 - 3c_3)\sin 2t]$$

Ως αρχικές συνθήκες λαμβάνουμε $h_0(0) = 0$, $h_0'(0) = 0$ και $h_0''(0) = 1$. Η εφαρμογή των αρχικών συνθηκών δίνει το σύστημα εξισώσεων

$$h_0(0) = c_1 + c_2 = 0$$

$$h_0'(0) = -c_1 - c_2 + 2c_3 = 0$$

$$h_0'(0) = c_1 - 3c_2 - 4c_3 = 1$$

από όπου $c_1 = \frac{1}{4}$, $\quad c_2 = -\frac{1}{4}$ και $c_3 = 0$. Οπότε είναι

$$h_0(t) = \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-t}\cos 2t, \;\; t > 0$$

Η κρουστική απόκριση υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned} h(t) &= \sum_{\kappa} \frac{d^{\kappa}}{dt^{\kappa}} b_{\kappa} h_0(t) \\ &= \frac{dh_0(t)}{dt} \\ &= -\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{-t}(\cos 2t + \sin 2t) \\ &= -\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{\sqrt{8}}e^{-t}\cos(2t - \frac{\pi}{4}), \;\; t > 0 \\ &= \Big(-\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{\sqrt{8}}e^{-t}\cos(2t - \frac{\pi}{4})\Big)u(t) \end{aligned}$$