

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2015-16

Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Λυμένες Ασκήσεις - Δειγματοληψία

1. Ένα συνεχές σήμα της μορφής

$$x(t) = 3 \cos(400\pi t) + 5 \sin(1200\pi t) + 6 \cos(4400\pi t) \quad (1)$$

δειγματοληπτείται με $f_s = 4000$ Hz παράγοντας την ακολουθία $x[n]$. Ελέγξτε αν η συχνότητα δειγματοληψίας είναι ικανή να μας δώσει πίσω το αρχικό σήμα από τα δείγματά του, και βρείτε τη μαθηματική έκφραση του $x[n]$.

Λύση:

Η μέγιστη συχνότητα του σήματος $x(t)$ είναι προφανώς η μέγιστη συχνότητα που υπάρχει στα ημίτονά του, κι αυτή δεν είναι άλλη από την $f_{max} = 2200$ Hz. Όμως

$$f_{max} = 2 \cdot 2200 = 4400 > f_s \quad (2)$$

άρα το κριτήριο του Shannon δεν ικανοποιείται, οπότε ΔΕΝ μπορούμε να πάρουμε πίσω το αναλογικό σήμα από τα δείγματά του. Παρ' όλα αυτά, δε μας απαγορεύει κανείς να δειγματοληπτήσουμε με αυτή τη συχνότητα και να πάρουμε ένα διακριτό σήμα. :-)

Προφανώς $t = nT_s = n \frac{1}{4000}$ sec. Αντικαθιστούμε όπου t με nT_s . Άρα θα είναι:

$$x[n] = 3 \cos(400\pi nT_s) + 5 \sin(1200\pi nT_s) + 6 \cos(4400\pi nT_s) \quad (3)$$

$$= 3 \cos\left(\frac{n\pi}{10}\right) + 5 \sin\left(\frac{12n\pi}{40}\right) + 6 \cos\left(\frac{44n\pi}{40}\right) \quad (4)$$

2. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi k f_0 t}. \quad (5)$$

Λύση:

Παρατηρήστε ότι το άθροισμα των συναρτήσεων Δέλτα είναι περιοδικό: επαναλαμβάνεται κάθε T_0 χρονικές στιγμές. Άρα μπορούμε να το αναπτύξουμε σε σειρά Fourier. Προφανώς η περίοδος του είναι T_0 και κάθε μια περίοδος περιλαμβάνει μόνο μια συνάρτηση Δέλτα. Ας βρούμε τους συντελεστές Fourier, X_k :

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk2\pi f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) e^{-jk2\pi f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \quad (6)$$

γιατί

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) e^{jk2\pi f_0 t} dt = 1e^0 = 1 \quad (7)$$

Άρα

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} e^{j2\pi k f_0 t} = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi k f_0 t} \quad (8)$$

που είναι και το ζητούμενο.

3. Δείξτε ότι το φίλτρο

$$h(t) = \frac{\sin(2\pi f_c t)}{\pi f_s t}, \quad (9)$$

με $f_M < f_c < f_s - f_M$ και $f_s = \frac{1}{T_s}$ παίρνει την τιμή $h[nT_s] = \delta[n]$ για κάθε n , αν ισχύει ότι $f_c = \frac{f_s}{2}$. Δίνεται ότι η διακριτή συνάρτηση Δέλτα (ή αλλιώς Dirac Δέλτα) ορίζεται ως:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (10)$$

Λύση:

Αντικαθιστώντας, έχουμε

$$h(t) = \frac{\sin(2\pi f_c t)}{\pi f_s t} = \frac{\sin(\pi f_s t)}{\pi(f_s t)} = \text{sinc}(f_s t) \quad (11)$$

Δειγματοληπτούμε με $f_s = \frac{1}{T_s}$, αντικαθιστώντας όπου t με nT_s , κι έχουμε

$$h[nT_s] = \text{sinc}(f_s n T_s) = \text{sinc}\left(\frac{1}{T_s} n T_s\right) \iff h[n] = \text{sinc}(n) \quad (12)$$

Προφανώς, επειδή το συγκεκριμένο $\text{sinc}(n) = \frac{\sin(\pi n)}{\pi n}$ μηδενίζεται όταν μηδενίζεται ο αριθμητής, δηλαδή

$$\sin(\pi n) = 0 \iff \sin(\pi n) = \sin(k\pi) \quad (13)$$

άρα στις θέσεις

$$\pi n = k\pi \iff n = k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (14)$$

και οι τιμές του n , ως ακέραιες, είναι ακριβώς πάνω σε αυτά τα σημεία μηδενισμού, ισχύει ότι

$$h[n] = \begin{cases} \text{sinc}(0) = 1, & n = 0, \\ \text{sinc}(n) = 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

που ουσιαστικά είναι ο ορισμός της διακριτής συνάρτησης Δέλτα, άρα

$$h[n] = \delta[n] \quad (15)$$

4. Έστω το σήμα $x(t)$ με μετασχ. Fourier $X(f)$, ο οποίος έχει μη μηδενικές τιμές στο διάστημα $[-B, B]$. Βρείτε το ρυθμό Nyquist για τη δειγματοληψία των παρακάτω σημάτων:

(α) $x(t)$

(β) $x(t - t_0)$

(γ) $x(t)e^{j2\pi f_0 t}$

(δ) $x(t - t_0) + x(t + t_0)$

(ε) $\frac{dx(t)}{dt}$

(ς) $x(t)x(t)$

(ζ) $x(t) * x(t)$

Λύση:

Προφανώς η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας (ρυθμός Nyquist) καθορίζεται ΜΟΝΟ από το φάσμα του σήματος. Άρα:

(α) Η μέγιστη συχνότητα είναι B , άρα ο ρυθμός Nyquist είναι $f_s = 2B$.

(β) Ισχύει ότι

$$x(t - t_0) \longleftrightarrow X(f)e^{-j2\pi f t_0} \quad (16)$$

Η μέγιστη συχνότητα του σήματος παραμένει B , άρα ο ρυθμός Nyquist είναι $f_s = 2B$.

(γ) Ισχύει ότι

$$x(t)e^{j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow X(f - f_0) \quad (17)$$

Το σήμα έχει μετατοπιστεί γύρω από τη συχνότητα f_0 , άρα ο ρυθμός του είναι πλέον $f_0 + B$, άρα $f_s = 2(f_0 + B)$.

(δ) Ισχύει ότι

$$x(t - t_0) + x(t + t_0) \longleftrightarrow X(f)e^{-j2\pi f t_0} + X(f)e^{j2\pi f t_0} = 2X(f) \cos(2\pi f t_0) \quad (18)$$

Η μέγιστη συχνότητα του φάσματος παραμένει B , άρα $f_s = 2B$.

(ε) Ισχύει ότι

$$\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow j2\pi f X(f) \quad (19)$$

Κι εδώ, η μέγιστη συχνότητα του φάσματος παραμένει B , άρα $f_s = 2B$.

(ς) Ισχύει ότι

$$x(t)x(t) \longleftrightarrow X(f) * X(f) \quad (20)$$

Η συνέλιξη, όπως έχουμε δει, δυο σημάτων που είναι μη μηδενικά σε πεπερασμένα διαστήματα είναι μη μηδενική στο διάστημα που ορίζεται ως το άθροισμα των άκρων των διαστημάτων. Άρα το φάσμα είναι μη μηδενικό στο διάστημα $[-B - B, B + B] = [-2B, 2B]$. Οπότε ο ρυθμός Nyquist είναι $f_s = 4B$.

(ζ) Ισχύει ότι

$$x(t) * x(t) \longleftrightarrow X(f)X(f) = X^2(f) \quad (21)$$

Προφανώς ο ρυθμός Nyquist είναι $f_s = 2B$.

5. Βρείτε το ρυθμό Nyquist για τα σήματα

(α') $\text{sinc}^2(100t)$

(β') $\frac{1}{100}\text{sinc}^2(100t)$

(γ') $\text{sinc}(100t) + 3\text{sinc}^2(60t)$

(δ') $\text{sinc}(50t) * \text{sinc}(100t)$

Λύση:

Ο ρυθμός Nyquist είναι η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας που ικανοποιεί το θεώρημα του Shannon, δηλ. η $2f_{max}$ του σήματος.

Επίσης, εδώ θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της Δυσκότητας του Μετασχ. Fourier, που θυμίζεται ότι είναι

$$x(t) \longleftrightarrow X(f) \implies X(t) \longleftrightarrow x(-f) \quad (22)$$

Επειδή εδώ έχουμε σήματα $\text{sinc}(\cdot)$ στο χρόνο, από τα γνωστά μας ζεύγη (θέτοντας $A = 1$), και με την ιδιότητα της Δυσκότητας που μας λέει ότι αν

$$\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow T\text{sinc}(fT) \quad , \text{ τότε} \quad (23)$$

$$T\text{sinc}(tT) \longleftrightarrow \text{rect}\left(\frac{-f}{T}\right) = \text{rect}\left(\frac{f}{T}\right) \quad (24)$$

και αν

$$\text{tri}\left(\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow T\text{sinc}^2(fT) \quad , \text{ τότε} \quad (25)$$

$$T\text{sinc}^2(tT) \longleftrightarrow \text{tri}\left(\frac{-f}{T}\right) = \text{tri}\left(\frac{f}{T}\right) \quad (26)$$

όπου το $-f$ γίνεται f επειδή οι συναρτήσεις $\text{sinc}(\cdot)$, $\text{rect}(\cdot)$ είναι άρτιες. Άρα θα είναι

(α')

$$\text{sinc}^2(100t) \longleftrightarrow \frac{1}{100}\text{tri}\left(\frac{f}{100}\right) \quad (27)$$

Το σήμα $\text{tri}(\cdot)$ είναι ένας τριγωνικός παλμός με διάρκεια στο $[-100, 100]$ Hz. Άρα η μέγιστη συχνότητα του σήματος είναι 100 Hz, άρα ο ρυθμός Nyquist θα είναι $f_s = 200$ Hz.

(β') Η αλλαγή στο πλάτος δεν επηρεάζει το φάσμα, άρα κι εδώ $f_s = 200$ Hz.

(γ')

$$\text{sinc}(100t) + 3\text{sinc}^2(60t) \longleftrightarrow \frac{1}{100}\text{rect}\left(\frac{f}{100}\right) + 3\frac{1}{60}\text{tri}\left(\frac{f}{60}\right) \quad (28)$$

αρα η μέγιστη συχνότητα είναι 60 Hz, οπότε ο ρυθμός Nyquist είναι $f_s = 120$ Hz.

(δ')

$$\text{sinc}(50t) * \text{sinc}(100t) \longleftrightarrow \frac{1}{50}\text{rect}\left(\frac{f}{50}\right) \frac{1}{100}\text{rect}\left(\frac{f}{100}\right) \quad (29)$$

άρα η μέγιστη συχνότητα είναι 25 Hz, οπότε ο ρυθμός Nyquist θα είναι $f_s = 50$ Hz.