

**HY-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς**  
**Εαρινό Εξάμηνο 2015/16**

**Επιμέλεια: Γιώργος Π. Καφεντζής**

Δρ. Επιστήμης Η/Υ Πανεπιστημίου Κρήτης  
Δρ. Επεξεργασίας Σήματος Πανεπιστημίου Rennes 1

## Δειγματοληψία

### 1 Εισαγωγή

Οι περισσότερες μετρήσιμες φυσικές διαδικασίες που συμβαίνουν στον κόσμο μας είναι αναλογικές. Από την ηλιακή ακτινοβολία, την ανθρώπινη φωνή, τον ήχο μιας λύρας, τα σεισμικά κύματα, ως μια φωτογραφία, το χτύπο της καρδιάς, και τα εγκεφαλικά κύματα, όλα αυτά είναι *αναλογικά σήματα*.

Αυτά τα σήματα είναι συναρτήσεις του χρόνου, δηλ. αλλάζουν τιμές με την πάροδο του. Ο όρος *αναλογικός* έχει την έννοια της συνεχούς συνάρτησης, σε χρόνο και πλάτος, δηλ. ένα αναλογικό σήμα ορίζεται για κάθε χρονική στιγμή και έχει τιμή με άπειρα δεκαδικά ψηφία. Οι τιμές αυτές εκφράζουν κάτι διαφορετικό, ανάλογα με την εφαρμογή (π.χ. στη φωτογραφία εκφράζουν το χρώμα του pixel, ενώ στον ήχο την ένταση του ήχου).

Με την έκρηξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών τη δεκαετία του '50, αναζητήθηκε ο τρόπος να μπορούν να αποθηκευτούν τέτοια σήματα σε έναν υπολογιστή, για περαιτέρω επεξεργασία. Φυσικά, ένας υπολογιστής δεν καταλαβαίνει στην ουσία τίποτα άλλο εκτός από 0 και 1, ενώ η χωρητικότητα και η ακρίβειά του είναι πεπερασμένες. Έτσι λοιπόν έπρεπε να βρεθεί ένας τρόπος να καταγραφούν αυτά τα αναλογικά σήματα σε ψηφιακή μορφή, αλλά με την ικανότητα να μπορούν να “δώσουν πίσω” το αναλογικό σήμα από το οποίο προήλθαν. Με άλλα λόγια, από το συνεχές/αναλογικό σήμα, να μπορούμε να πάρουμε κάποια *δείγματα* του, αλλά αυτά τα δείγματα να είναι ικανά να μας δώσουν πίσω ολόκληρο το σήμα συνεχούς χρόνου! Σίγουρα δύσκολη δουλειά! :-). Η διαδικασία μετατροπής, λοιπόν, ενός αναλογικού σήματος σε ΔΙΑΚΡΙΤΟ (κι όχι ψηφιακό) λέγεται **Δειγματοληψία**.

Ας δώσουμε ένα παράδειγμα της όλης διαδικασίας από την καθημερινότητά σας. :-). Ο Τερζής (respect), όταν τραγουδάει μπροστά σε ένα μικρόφωνο, τα ηχητικά κύματα από τη φωνή του ταξιδεύουν στον αέρα και φτάνουν ως το μικρόφωνο. Τα ηχητικά αυτά κύματα χτυπούν ένα διάφραγμα μέσα στο μικρόφωνο, το οποίο πάει μπρος - πίσω (ταλαντώνεται). Ένα πηνίο, που είναι συνδεδεμένο με το διάφραγμα, κινείται κι αυτό μπρος - πίσω. Ένας μαγνήτης που είναι μαζί με το πηνίο, παράγει μαγνητικό πεδίο που το διαπερνά, και λόγω της ταλάντωσης του πηνίου, παράγεται ροή ηλεκτρικού ρεύματος. Το ρεύμα αυτό ρέει προς έναν ενισχυτή ή μια συσκευή καταγραφής<sup>1</sup>. Άρα στην περίπτωση μας, το αναλογικό σήμα είναι ηλεκτρικό, αλλά δε μας απασχολεί η φύση του σήματος. Είναι ένα σήμα. Αυτό το σήμα θέλουμε να το αποθηκεύσουμε σε έναν υπολογιστή. Πρέπει λοιπόν να το δειγματοληψήσουμε, δηλ. να διαλέξουμε κάποιες χρονικές στιγμές και να πάρουμε τις τιμές του ηλεκτρικού σήματος σε εκείνες τις στιγμές, να πάρουμε δηλ. *δείγματα* του σήματος.

Εδώ ας κάνουμε μια παρένθεση για να ορίσουμε λίγο την ορολογία. Ορίζουμε ως **περίοδο δειγματοληψίας**  $T_s$  την απόσταση (σε δευτερόλεπτα) μεταξύ των δειγμάτων που παίρνουμε. Συνήθως είναι σταθερή. Επίσης, ορίζουμε ως **συχνότητα δειγματοληψίας**  $f_s$  το αντίστροφο της περιόδου δειγματοληψίας ( $f_s = \frac{1}{T_s}$ ), και είναι ένας αριθμός που μας λέει πόσα δείγματα παίρνουμε ανά δευτερόλεπτο. Για παράδειγμα, στα μουσικά CD του εμπορίου, η συχνότητα δειγματοληψίας είναι 44100 Hz. Αυτό σημαίνει ότι σε ένα δευτερόλεπτο πραγματικού ηχητικού κομματιού, έχουμε πάρει 44100 δείγματα, τα οποία απέχουν  $\frac{1}{44100}$  δευτερόλεπτα μεταξύ τους! Πολλά δείγματα, πολύ κοντά το ένα με το άλλο! Γι' αυτό και η ποιότητα της μουσικής είναι τόσο καλή. Ας κλείσουμε όμως εδώ την παρένθεση κι ας επιστρέψουμε

<sup>1</sup>Άλλα μικρόφωνα χρησιμοποιούν διαφορετικό τρόπο αλλά στην ουσία πάλι μετατρέπουν ηχητική ενέργεια σε ηλεκτρική.

στη θεωρία...

Τα ερωτήματα που μπορεί κανείς να σκεφτεί και να θέσει άμεσα είναι: ποιά δείγματα να πάρω; Όποια θέλω; Και κάθε πότε να τα παίρνω; Όποτε θέλω; Να πάρω δηλ. ένα δείγμα τώρα κι ένα δείγμα μετά από 5 sec, κι άλλο ένα μετά από 40 sec; Ή πρέπει να υπάρχει ένα σταθερό χρονικό διάστημα στο οποίο θα πρέπει να παίρνω δείγματα; Και αν τα πάρω αυτά τα δείγματα, μετά θα μπορώ να ανακατασκευάσω και να ακούσω το τραγούδι του Πλούταρχου από ένα ηχείο ή θα ακούσω bits; :-) Όλα αυτά τα ερωτήματα τα απάντησε ο Nyquist και ο Shannon, το 1928 ο πρώτος, και το 1949 ο δεύτερος, με κάποιες διαφορές στις εργασίες τους. Το θεώρημα που απαντάει σε αυτά τα ερωτήματα ονομάστηκε Θεώρημα των Shannon-Nyquist.

**Ένα σήμα με μέγιστη συχνότητα  $B$  Hz, μπορεί να ανακτηθεί από τα δείγματά του, αν δειγματοληπτηθεί με συχνότητα δειγματοληψίας**

$$f_s > 2B, \quad (1)$$

**δηλ. με περίοδο δειγματοληψίας**

$$T_s < \frac{1}{f_s} \quad (2)$$

**Η συνθήκη:**

$$f_s > 2B \quad \left( \text{ή } T_s < \frac{1}{2B} \right) \quad (3)$$

**λέγεται συνθήκη του Shannon.**

**Η μέγιστη συχνότητα  $B$  συνήθως αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως  $f_{\max}$  και λέγεται *συχνότητα Nyquist*, ενώ η ελάχιστη συχνότητα  $2B$  για την οποία πληρείται η συνθήκη του Shannon λέγεται *ρυθμός Nyquist*.**

## 2 Θεωρία

Όπως πρέπει να σας έχει γίνει ήδη αντιληπτό, το θεώρημα της δειγματοληψίας εμπλέκει μέσα το πεδίο της συχνότητας, εκτός από αυτό του χρόνου. Το πεδίο της συχνότητας, όπως ΠΡΕΠΕΙ ήδη να ξέρετε πολύ καλά, δεν είναι τίποτα άλλο από την αναπαράσταση του ίδιου σήματος ως προς τη συχνότητα  $f$ .

Έστω λοιπόν ότι έχουμε ένα αναλογικό σήμα  $x(t)$  που θέλουμε να δειγματοληψήσουμε και αυτό το σήμα έχει φάσμα (μετασχηματισμό Fourier δηλαδή)  $X(f)$ , όπως στο Σχήμα (1) και (2). Παρατηρείτε ότι το φάσμα του σήματος έχει μέγιστη συχνότητα  $B$ . Μετά τη συχνότητα αυτή, δεν υπάρχουν πλάτη (μπλε γραμμή) για τις υπόλοιπες συχνότητες. Το ίδιο και για το αρνητικό μέρος των συχνοτήτων.

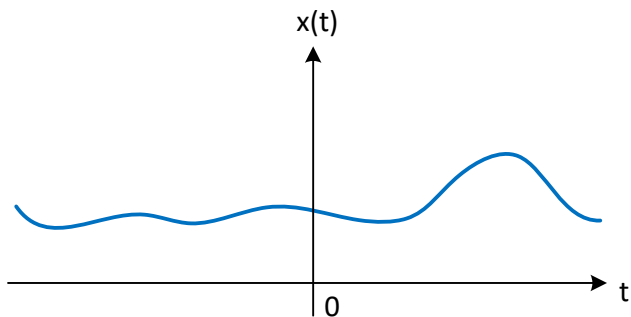
### 2.1 Δειγματοληψία

Ας κάνουμε τώρα δειγματοληψία στο σήμα μας στο χρόνο, με περίοδο δειγματοληψίας  $T_s = \frac{1}{f_s}$ . Πώς όμως θα αναπαραστήσουμε μαθηματικά τη δειγματοληψία; Θυμηθείτε ότι

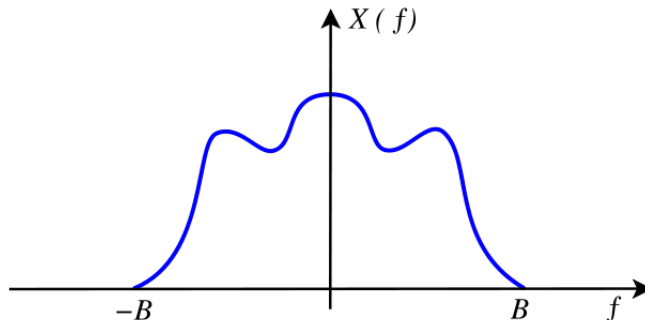
$$x(t)\delta(t \pm t_0) = x(\mp t_0)\delta(t \pm t_0) \quad (4)$$

Άρα η συνάρτηση δειγματοληψίας δεν είναι τίποτα άλλο από μια σειρά από τις γνωστές μας Συναρτήσεις Δέλτα:

$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) \quad (5)$$

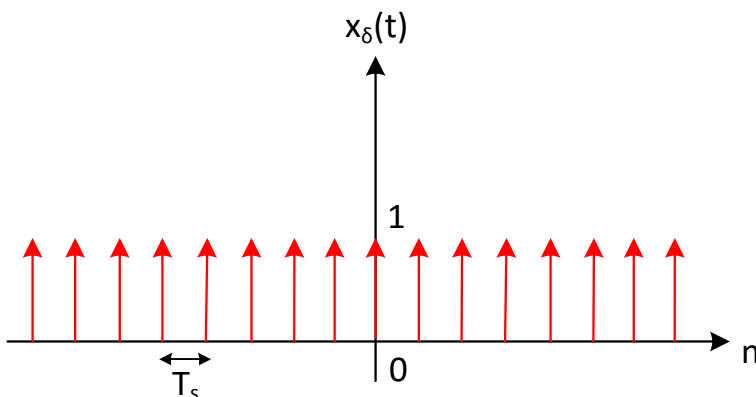


Σχήμα 1: Αναλογικό σήμα



Σχήμα 2: Μετασχηματισμός Fourier του αναλογικού σήματος.

Η συνάρτηση δειγματοληψίας φαίνεται στο Σχήμα (3).



Σχήμα 3: Συνάρτηση Δειγματοληψίας

Όπως φαίνεται, αυτές οι συναρτήσεις Δέλτα απέχουν μεταξύ τους χρόνο  $T_s$ .

Ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης δειγματοληψίας εύκολα μπορεί να δειχθεί ότι είναι:

$$x_{\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) \longleftrightarrow \Delta(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nf_s) \quad (6)$$

Αφού η συνάρτηση  $x_{\delta}(t)$  είναι περιοδική με περίοδο  $T_s$ , μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier. Οι συντελεστές Fourier δίνονται ως

$$X_k = \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} x(t) e^{-jk2\pi f_s t} dt = \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} \delta(t) e^{-jk2\pi f_s t} dt = \frac{1}{T_s} \quad (7)$$

γιατί

$$\int_{-T_s/2}^{T_s/2} \delta(t) e^{jk2\pi f_s t} dt = 1e^0 = 1 \quad (8)$$

λόγω γνωστής ιδιότητας<sup>2</sup>. Άρα

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{jk2\pi f_s t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_s} e^{jk2\pi f_s t} = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{jk2\pi f_s t} \quad (10)$$

Όμως από το τυπολόγιο του Μετασχ. Fourier, ξέρουμε ότι

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{jk2\pi f_0 t} \longleftrightarrow X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \delta(f - kf_0) \quad (11)$$

Άρα τελικά

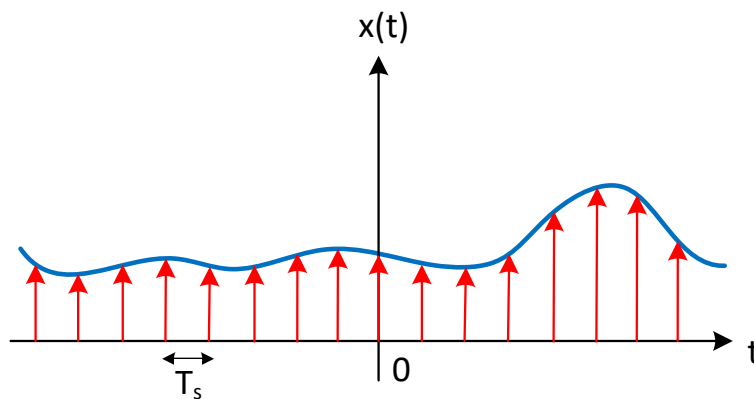
$$\Delta(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nf_s) \quad (12)$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι και ο μετασχ. Fourier της άπειρης σειράς από Συναρτήσεις Δέλτα στο χρόνο είναι μια άπειρη σειρά από συναρτήσεις Δέλτα ΚΑΙ στη συχνότητα, οι οποίες μάλιστα απέχουν μεταξύ τους  $f_s$  Hz.

Η δειγματοληψία μπορεί να αναπαρασταθεί λοιπόν μαθηματικά από τον πολλαπλασιασμό στο χρόνο του σήματος πληροφορίας  $x(t)$  με τη σειρά από συναρτήσεις Δέλτα,  $x_\delta(t)$ . Άρα θα έχουμε:

$$x_s(t) = x(t)x_\delta(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s) \quad (13)$$

Οπότε αυτό που θα πάρουμε θα είναι οι κόκκινες τιμές στις κορυφές των συναρτήσεων Δέλτα. Οι υπόλοιπες τιμές χάνονται. Αυτό που μένει λοιπόν είναι το ΔΙΑΚΡΙΤΟ σήμα μας,  $x[n]$ . Αυτό το  $x[n]$  δεν είναι τίποτα άλλο από τις τιμές  $x(nT_s)$  που πήραμε παραπάνω. Όλα αυτά μας τα δείχνει εποπτικά η Εικόνα (4) και (5).

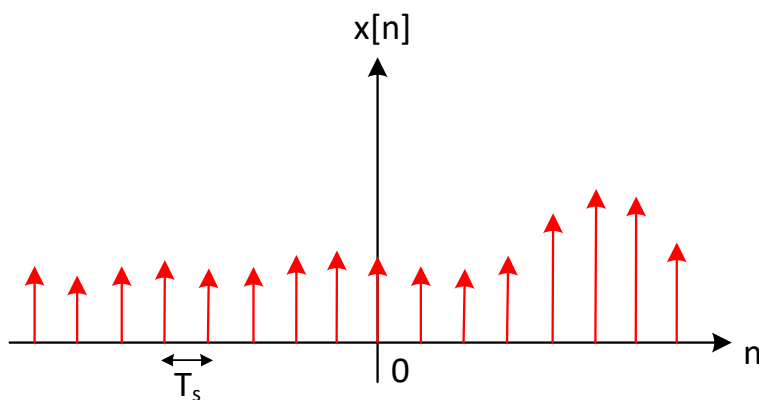


Σχήμα 4: Δειγματοληψία

Ας δούμε τι συμβαίνει στο πεδίο της συχνότητας. Το γινόμενο των δυο παραπάνω σημάτων,  $x_s(t) = x(t)x_\delta(t)$ ,

<sup>2</sup>Από την ιδιότητα της συνάρτησης Δέλτα:

$$\int x(t)\delta(t)dt = x(0) \quad (9)$$



Σχήμα 5: Δειγματοληπτημένο σήμα

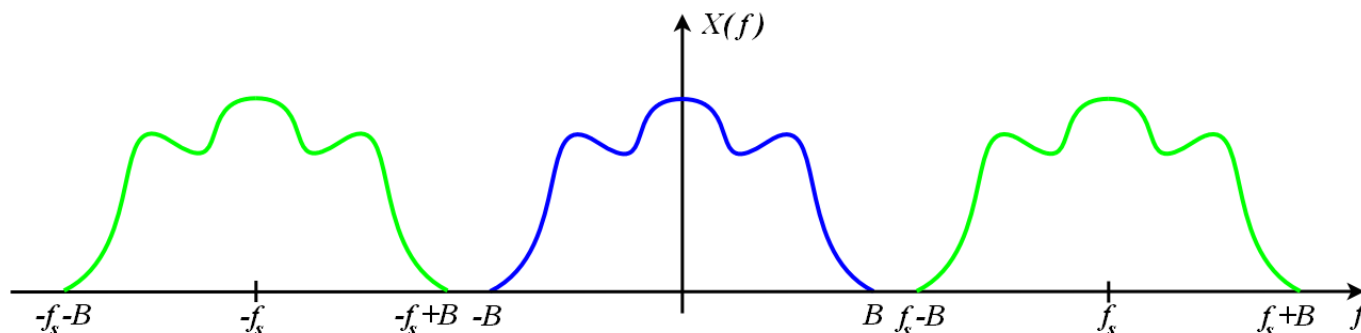
γίνεται συνέλιξη στη συχνότητα :

$$\begin{aligned}
 X_s(f) &= X(f) * \Delta(f) = X(f) * \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nf_s) \\
 &= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (X(f) * \delta(f - nf_s)) \\
 &= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - nf_s)
 \end{aligned} \tag{14}$$

γιατί ξέρουμε ότι η συνέλιξη σήματος με μια συνάρτηση Δέλτα δίνει το ίδιο το σήμα μετατοπισμένο στη θέση της συνάρτησης Δέλτα, δηλ.

$$X(f) * \delta(f \pm f_0) = X(f \pm f_0) \tag{15}$$

Άρα λοιπόν, αυτό που παίρνουμε στο πεδίο της συχνότητας σύμφωνα με την παραπάνω σχέση, είναι επαναλήψεις του φάσματος  $X(f)$  γύρω από τις συχνότητες  $\pm nf_s$ . Αν η συχνότητα δειγματοληψίας είναι “αρκετά μεγάλη” (θα δούμε παρακάτω τι σημαίνει αυτό), τότε αυτό που θα συμβεί στο πεδίο της συχνότητας φαίνεται στο Σχήμα (6).

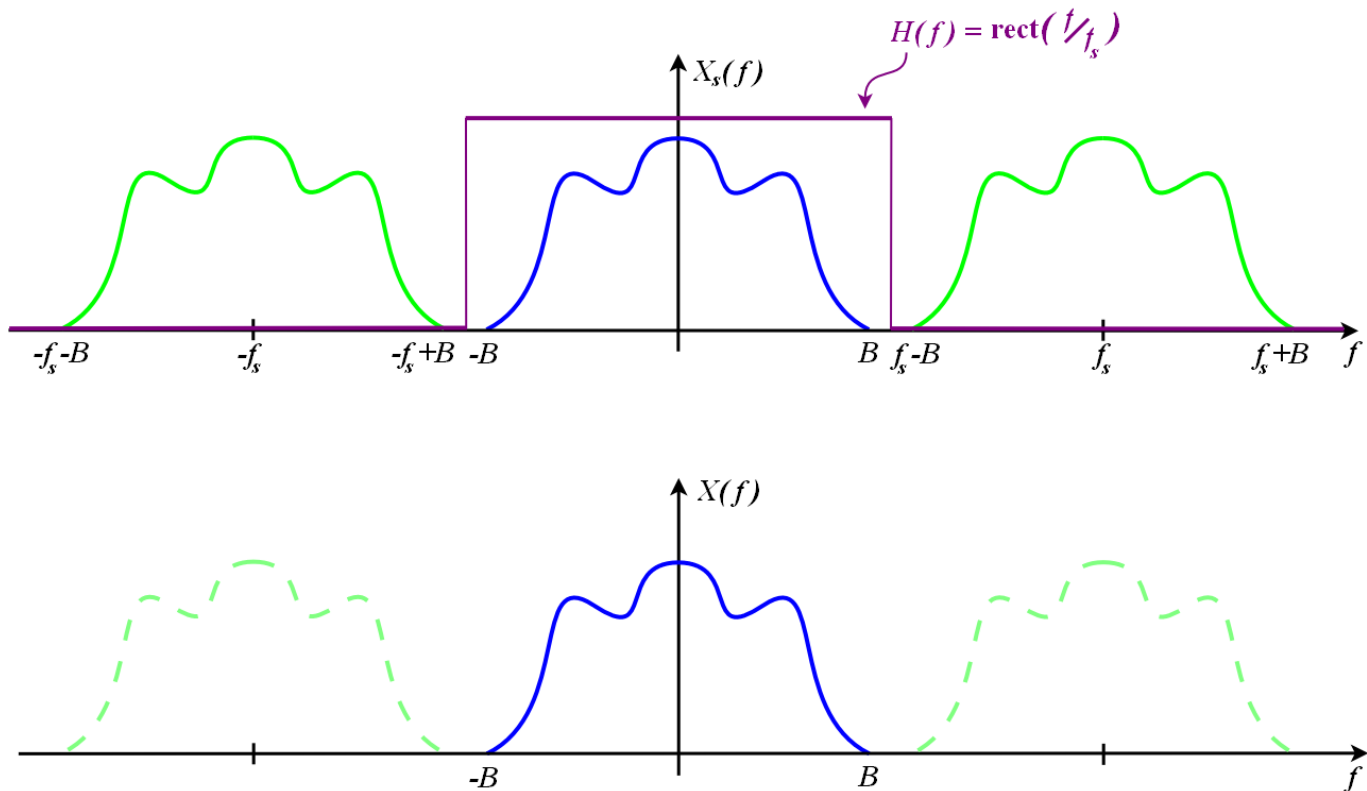


Σχήμα 6: Μη επικαλυπτόμενο φάσμα

Τι παρατηρούμε και στο Σχήμα (6); Παρατηρούμε ξανά ότι, λόγω της διαδικασίας της δειγματοληψίας, εμφανίστηκαν από το πουθενά περιοδικές “επαναλήψεις” του αρχικού φάσματος γύρω από τις συχνότητες  $\pm nf_s$ . Αυτό είναι το φάσμα του δειγματοληπτημένου (= ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ) σήματος. Στο Σχήμα (6) φαίνονται μόνο οι “επαναλήψεις” του φάσματος γύρω από τις συχνότητες  $\pm f_s$ , αλλά αυτή η επανάληψη συνεχίζεται σε όλα τα πολλαπλάσια της  $f_s$ , από το  $-\infty$  ως το  $+\infty$ . Το ίδιο φάσμα δηλ. εμφανίζεται και γύρω από τη συχνότητα  $2f_s, 3f_s$ , κλπ. Το ίδιο και στις αρνητικές τους. Απλά για λόγους ευκολίας, εδώ δείχνουμε μόνο τις επαναλήψεις γύρω από την  $f_s$  και την  $-f_s$ .

## 2.2 Ανακατασκευή

Υπενθυμίζεται ότι μετά την αποθήκευση ή επεξεργασία του διακριτού σήματος στον υπολογιστή, σκοπός μας είναι να μπορούμε να πάρουμε πίσω το αρχικό σήμα, δηλ. την μπλέ φασματική καμπύλη. Αυτό γίνεται με την εφαρμογή ενός χαμηλοπερατού (lowpass) φίλτρου γύρω από το κεντρικό φάσμα, κόβοντας τα “περισσευούμενα” φάσματα και κρατώντας μόνο το κεντρικό, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα. Θυμίζεται ότι το κεντρικό (μπλε) φάσμα είναι το φάσμα του αρχικού αναλογικού σήματος, ενώ τα πράσινα “ξεφύτρωσαν” λόγω της διαδικασίας της δειγματοληψίας. Οπότε αν θέλουμε να ανακτήσουμε το αναλογικό σήμα, θα πρέπει να κρατήσουμε μόνο το κεντρικό φάσμα, γιατί ΜΟΝΟ αυτό αντιστοιχεί στο αναλογικό σήμα, όπως δείχνει το Σχήμα (7). Το φίλτρο αυτό, που προφανώς το ορίζουμε



Σχήμα 7: Φίλτρο ανακατασκευής

στη συχνότητα, πρέπει να σας θυμίζει κάτι. :-) Ναι, είναι ένας τετραγωνικός παλμός (!!) που δίνεται από την εξίσωση:

$$H(f) = \frac{1}{f_s} \text{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right) = T_s \text{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right) \quad (16)$$

Αυτό σημαίνει ότι το παράθυρο ορίζεται στο διάστημα  $[-f_s/2, f_s/2]$ . Ο αντίστροφος μετασχ. Fourier του σήματος αυτού ξέρουμε ότι είναι:

$$h(t) = T_s f_s \text{sinc}(t f_s) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right) \quad (17)$$

λόγω της ιδιότητας της Δυσκότητας<sup>3</sup>. Πολλαπλασιάζοντας το σήμα  $H(f)$  με το φάσμα του διακριτού σήματος

$$\frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - n f_s)$$

<sup>3</sup>Υπενθυμίζεται:

$$x(t) \longleftrightarrow X(f) \implies X(t) \longleftrightarrow x(-f) \quad (18)$$

και για το γνωστό μας ζεύγος είναι

$$\text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow AT \text{sinc}(fT) \implies AT \text{sinc}(tT) \longleftrightarrow \text{Arect}\left(-\frac{f}{T}\right) = \text{Arect}\left(\frac{f}{T}\right) \quad (19)$$

θα έχουμε:

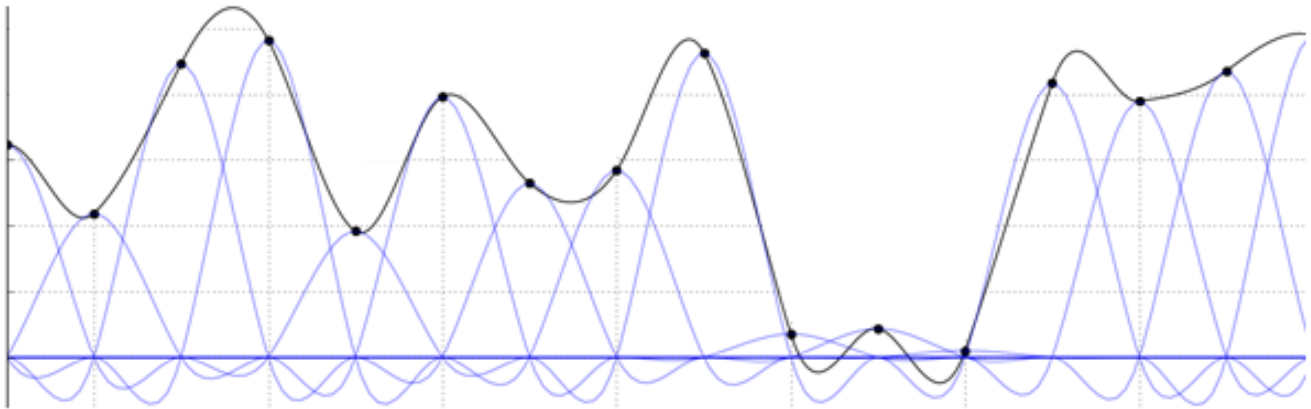
$$\frac{1}{T_s} H(f) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - n f_s) = \frac{1}{T_s} T_s X(f) = X(f) \quad (20)$$

αφού το  $H(f)$  είναι μη μηδενικό στο διάστημα  $[-f_s/2, f_s/2]$ .

Τέλος, το γινόμενο στη συχνότητα γίνεται συνέλιξη στο χρόνο:

$$h(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) h(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) \text{sinc}\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right) \quad (21)$$

Η παραπάνω σχέση είναι πολύ σημαντική. Μας λέει ότι, ιδανικά, ένα αναλογικό σήμα (το οποίο ορίζεται σε κάθε χρονική στιγμή - άρα σε άπειρες χρονικές στιγμές) μπορεί να ανακατασκευαστεί όταν τα δείγματά του  $x(nT_s)$  (δηλ. από κάποιες διακριτές μόνο χρονικές στιγμές του σήματος) συνδυαστούν γραμμικά με συναρτήσεις sinc( $\cdot$ ), όταν κάθε μία έχει τον κεντρικό λοβό της γύρω από τις χρονικές στιγμές  $nT_s$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ !!! Δείτε το Σχήμα (8) και παρατηρήστε πώς αυτές οι συναρτήσεις sinc( $\cdot$ ) με κατάλληλη μετατόπιση (μπλε γραμμές) κατασκευάζουν ένα σήμα στο συνεχή χρόνο (μαύρη γραμμή) από τα δείγματά του (κουκκίδες).



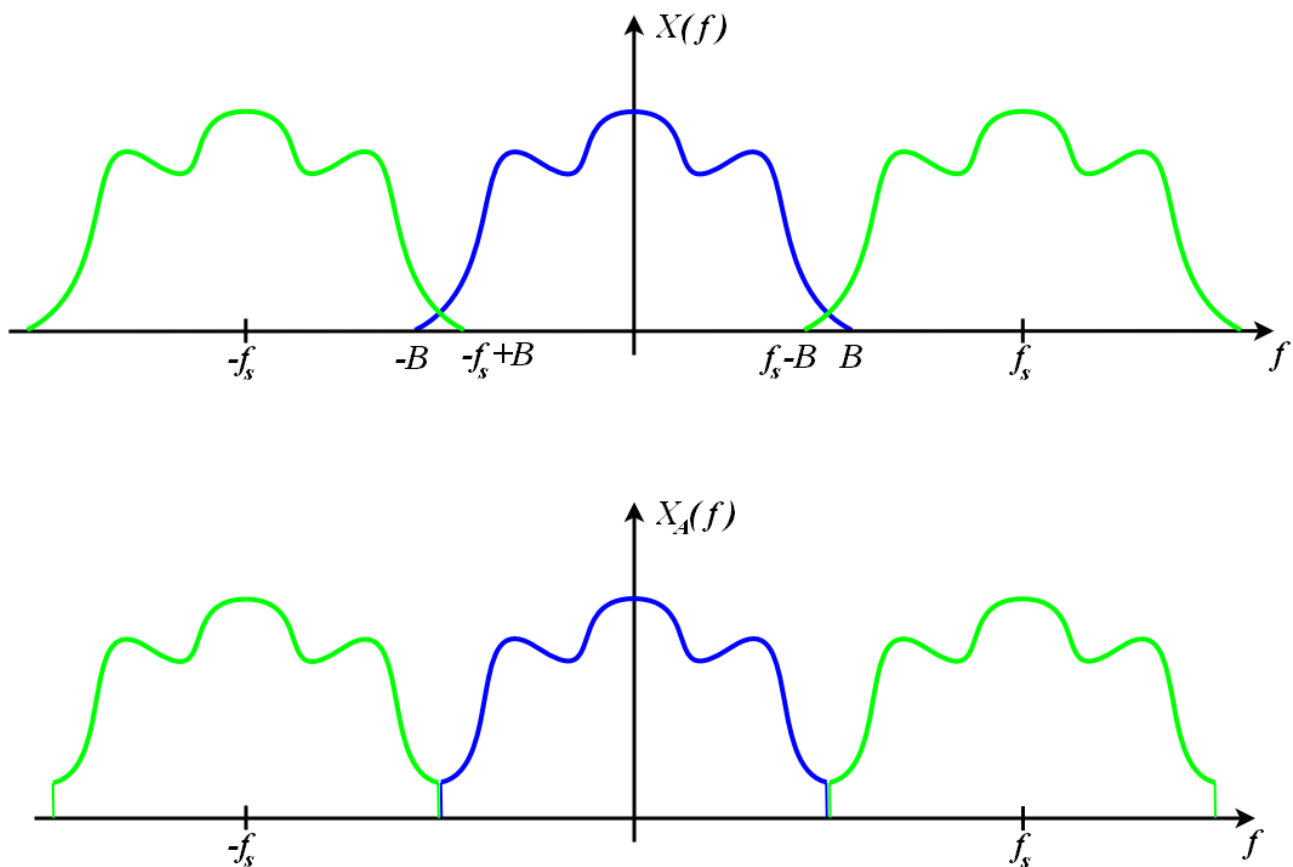
Σχήμα 8: Ανακατασκευή από Συναρτήσεις sinc

Ας επανέλθουμε λίγο στο φάσμα του διακριτού σήματος, που το παραθέτουμε ξανά για ευκολία, στο Σχήμα (9)(a). Παρατηρήστε λίγο το δεξί άκρο της μπλέ γραμμής και το αριστερό άκρο της πράσινης γραμμής (του δεξιού φάσματος). Βλέπετε ότι το ένα έχει συχνότητα  $B$  και το άλλο έχει συχνότητα  $f_s - B$ . Αν αυτά τα δυο άκρα ήταν πιο κοντά, όπως φαίνεται στο Σχήμα (9)(b), τότε θα "έμπαινε" το ένα φάσμα μέσα στο άλλο, θα είχαμε δηλ. *επικάλυψη* στα φάσματα, και σε εκείνο το διάστημα τα φάσματα θα προστίθενται, αλλοιώνοντας έτσι το αρχικό μας σήμα, όπως φαίνεται στο Σχήμα (9)(c).

Για να μη συμβαίνει αυτό, καταλαβαίνετε ότι πρέπει να έχουμε μια κατάσταση όπως στο Σχήμα (9)(a), δηλ. το αριστερό άκρο της πράσινης γραμμής να είναι ΠΑΝΤΑ μεγαλύτερο από το δεξί άκρο της μπλέ γραμμής, δηλ. να ισχύει

$$B < f_s - B \iff f_s > 2B \quad (22)$$

που είναι το κριτήριο του Shannon. Αυτή ουσιαστικά είναι η απόδειξη του θεωρήματος της δειγματοληψίας (χωρίς μαθηματικά :-)). Προέρχεται απλά από την παρατήρηση αυτού του σχήματος. Δείτε στο Σχήμα (9)(c), τι συμβαίνει αν το κριτήριο του Shannon παραβιάζεται, δηλ. η συχνότητα δειγματοληψίας  $f_s$  είναι μικρότερη από τη διπλάσια μέγιστη συχνότητα  $B$  του σήματος. Βλέπετε ότι πλέον η μπλέ γραμμή δεν είναι η ίδια με πριν. Στα άκρα της έχουν προστεθεί συχνότητες "ξένες", και έχουν αλλοιώσει το κεντρικό φάσμα. Καταλαβαίνετε τι γίνεται αν η  $f_s$  είναι ακόμα πιο κοντά στο μηδέν... χαμός!



Σχήμα 9: Υποδειγματοληψία: Φάσμα με ξένες συχνότητες

Το φαινόμενο αυτό της επικάλυψης των φασμάτων ονομάζεται **aliasing** στα Αγγλικά<sup>4</sup>.

### 3 Παρατηρήσεις

1. Προσέξτε ότι στην παραπάνω ανάλυσή μας, θεωρήσαμε ότι το  $x(t)$  είναι ένα σήμα πεπερασμένης ζώνης συχνοτήτων, δηλ. το φάσμα του,  $X(f)$ , είναι μη μηδενικό σε ένα πεπερασμένο διάστημα συχνοτήτων (στο  $[-B, B]$ ). Αυτό μπορεί να ΜΗΝ ισχύει πάντα, και πράγματι ΔΕΝ ισχύει για όλα τα σήματα που μπορούμε να κατασκευάσουμε στην πράξη, μια και όλα τα υπαρκτά σήματα είναι πεπερασμένης διάρκειας στο χρόνο, άρα άπειρης διάρκειας στη συχνότητα! :-). Τότε πρέπει να εφαρμόσουμε εκ των προτέρων στο φάσμα του σήματος ένα φίλτρο, σαν το  $H(f)$  που είδαμε, ώστε να περιορίσουμε το εύρος ζώνης του, ώστε να ισχύει η ανάλυση που κάναμε παραπάνω. Το φίλτρο αυτό πρέπει να είναι κατάλληλο ώστε να μην “κόβει” μεγάλο κομμάτι απ’ την πληροφορία του σήματος.
2. Δείτε το φίλτρο  $H(f)$  που χρησιμοποιήσαμε στην ανάλυσή μας (Σχήμα (7)). Αυτό το φίλτρο είναι ιδανικό, αλλάζει τιμές στα άκρα του με ακαριαίο τρόπο, είναι ασυνεχές και άρα μη υλοποιήσιμο στην πράξη, όμως υπάρχουν αρκετά παρόμοια που το προσεγγίζουν. Αυτή η “παραχώρηση” που κάνουμε εισάγει παραμόρφωση στο σήμα μας, αλλά δεν μπορεί να γίνει αλλιώς... :-)
3. Η συνάρτηση δειγματοληψίας  $x_\delta(t)$  επίσης δεν μπορεί να υλοποιηθεί στην πράξη. Προσεγγίζεται αρκετά καλά όμως από τετραγωνικούς παλμούς (αντί για συναρτήσεις Δέλτα) με πολύ μικρό εύρος, όπως ο παλμός που είδαμε στο Κεφάλαιο για το μετασχ. Fourier

$$\delta(t) \approx \frac{1}{\epsilon} \text{rect}\left(\frac{t}{\epsilon}\right) \quad (23)$$

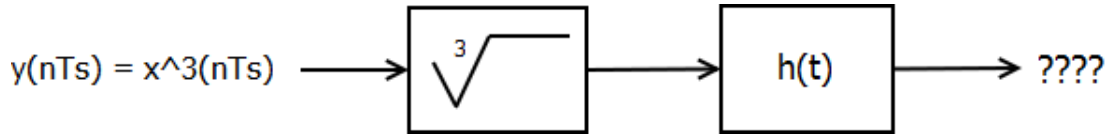
όπου όσο το  $\epsilon \rightarrow 0$ , τόσο η προσέγγιση πλησιάζει πιο κοντά στη θεωρητική συνάρτηση Δέλτα.

<sup>4</sup>Όχι, δεν έχω ιδέα πώς μπορεί κάποιος να το μεταφράσει στα Ελληνικά χωρίς να βγει μια λέξη που να ηχεί παράξενα. :-D Μια προσπάθεια μετάφρασης θα ήταν “ψευδώνυμες συχνότητες” :-)



4. Για προχωρημένους: :-) Η συνθήκη του Shannon δεν είναι αναγκαία για τη σωστή ανάκτηση του σήματος. Γιατί; Δείτε το παρακάτω παράδειγμα:

Έστω  $x(t) \longleftrightarrow X(f)$ , με  $f \in [-B, B]$ . Έστω  $y(t) = x^3(t)$ , άρα θα είναι  $Y(f) \neq 0$  στο  $[-3B, 3B]$ . Για ανάκτηση του σήματος σύμφωνα με τα όσα έχουμε πει, πρέπει  $f_s > 6B$ . Έστω ότι το δειγματοληπούμε με  $f_s = 2B$ . Τι συμβαίνει; Προφανώς υπάρχουν επικαλύψεις στο φάσμα του διακριτού σήματος  $y(nT_s)$ . Όμως για δείτε την διάταξη στο Σχήμα 10. Γίνεται ή όχι σωστή ανάκτηση του σήματος από την παραπάνω διάταξη; :-)



Σχήμα 10: Διάταξη ανάκτησης σήματος

5. Προφανώς όλη η ανάλυση που κάναμε παραπάνω αφορά *πραγματικά* σήματα (όχι φανταστικά ή μιγαδικά).
6. Ίσως αναρωτηθήκατε “γιατί δεν παίρνουμε μια αρκετά μεγάλη συχνότητα δειγματοληψίας ώστε να μην αναγκαστούμε να κοιτάμε κάθε φορά το θεώρημα του Shannon;”. Η απάντηση σε αυτό είναι το κόστος. :-) Για παράδειγμα, σε ηχογραφήσεις φωνής, μια συχνότητα δειγματοληψίας μεγαλύτερη από 20 kHz ίσως είναι πλεονασματική, γιατί οι σημαντικές συχνοτικές συνιστώσες της ανθρώπινης φωνής σπάνια ξεπερνούν τα 10 kHz. Οπότε μια συχνότητα δειγματοληψίας μεγαλύτερη από  $2 \cdot 10 = 20$  kHz αποθηκεύει πληροφορία με λίγη σημασία για την καταληπτότητα και την καθαρότητα της φωνής.

Αντίθετα, μερικά μουσικά όργανα μπορούν να παράγουν συχνότητες ως και τα 20 – 25 kHz, οπότε θα πρέπει να δειγματοληψήσουμε τέτοιες ηχογραφήσεις με συχνότητα δειγματοληψίας  $f_s > 2 \cdot \{20 - 25\} = 40 - 50$  kHz. Όμως το ανθρώπινο αυτί μπορεί να ακούσει συχνότητες από 20 Hz ως περίπου 20 kHz. Άρα μια συχνότητα δειγματοληψίας μεγαλύτερη από  $2 \cdot 20 = 40$  kHz πρακτικά δεν έχει πολύ νόημα.

Παρ’ όλα αυτά, τα CD του εμπορίου καθιέρωσαν (με πρωτεργάτρια τη Sony τη δεκαετία του ’70) τη συχνότητα δειγματοληψίας των 44.1 kHz, τόσο για το ότι είναι κοντά στο όριο των 20 kHz του ανθρώπινου αυτιού, όσο και για πρακτικούς λόγους υλοποίησης του τετραγωνικού παραθύρου που ανακατασκευάζει το φάσμα του σήματος συνεχούς χρόνου από το περιοδικό φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος.

## 4 Παραδείγματα Aliasing

Δείτε παραδείγματα του φαινομένου του aliasing σε εικόνες, με την αριστερή εικόνα κάθε ζεύγους να μην έχει aliasing, ενώ η δεξιά εικόνα να έχει.

