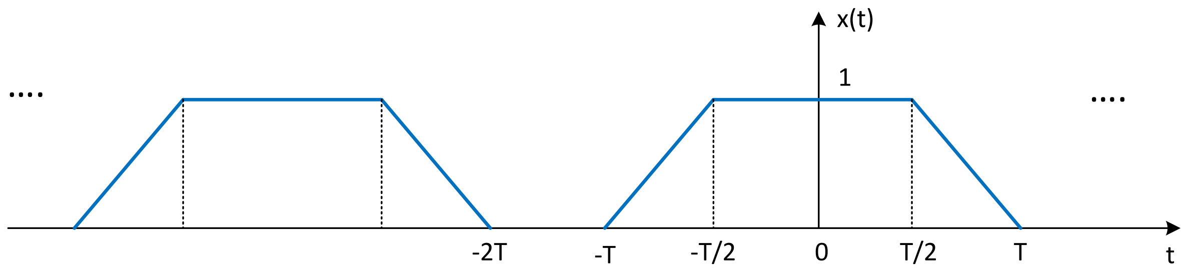
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2015-16
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Λυμένες Ασκήσεις - Επαναληπτικά Θέματα

1. **Βρείτε το ανάπτυγμα σε εκθετική σειρά Fourier του σήματος στο Σχήμα** 1



Σχήμα 1: Τραπεζοειδές σήμα Άσκησης 1

Λύση:
Ο αναλυτικός υπολογισμός της σειράς μέσω των τύπων είναι χρονοβόρος. Μπορούμε να πάμε μέσω του Μετασχ. Fourier. Γνωστό θεώρημα λέει ότι η εύρεση των συντελεστών της εκθετικής σειράς Fourier μπορεί να γίνει μέσω του μετασχ. Fourier σε μια περίοδο, δηλ.

$$X_k = \frac{1}{T_0} X_{T_0}(f)\Big|_{f=\frac{k}{T_0}=kf_0} \tag{1}$$

όπου $X_{T_0}(f)$ είναι ο μετασχ. Fourier του σήματος σε μια περίοδο (δηλ. θεωρούμε το σήμα ως μη περιοδικό, κρατώντας μόνο μια περίοδό του). Προφανώς η περίοδος του σήματος είναι $T_0 = 3T$. Έστω $x_{T_0}(t)$ η μια περίοδος του $x(t)$. Ο μετασχ. Fourier αυτού του σήματος μπορεί να υπολογιστεί αρκετά εύκολα μέσω της ιδιότητας των παραγώγων:

$$F\{\frac{dx_{T_0}(t)}{dt}\} \longleftrightarrow j2\pi f X_{T_0}(f) \tag{2}$$

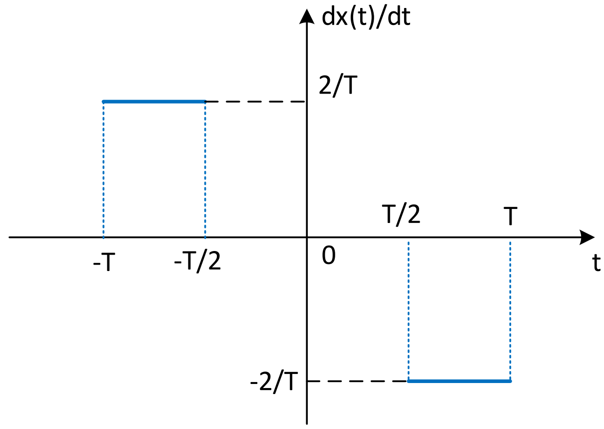
Παραγωγίζοντας λοιπόν το σήμα, παίρνουμε το σήμα του Σχήματος 2.

Αυτο μπορει να γραφεί ως:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_{T_0}(t)}{dt} &= \frac{2}{T}\mathrm{rect}\Big(\frac{t+\frac{3T}{4}}{\frac{T}{2}}\Big) - \frac{2}{T}\mathrm{rect}\Big(\frac{t-\frac{3T}{4}}{\frac{T}{2}}\Big) \longleftrightarrow \\
F\{\frac{dx_{T_0}(t)}{dt}\} &= \frac{T}{2}\frac{2}{T}\mathrm{sinc}\Big(\frac{fT}{2}\Big)e^{j2\pi f\frac{3T}{4}} - \frac{T}{2}\frac{2}{T}\mathrm{sinc}\Big(\frac{fT}{2}\Big)e^{-j2\pi f\frac{3T}{4}} \\
&= \mathrm{sinc}\Big(\frac{fT}{2}\Big)(e^{j2\pi f\frac{3T}{4}} - e^{-j2\pi f\frac{3T}{4}}) = \mathrm{sinc}\Big(\frac{fT}{2}\Big)2j\sin\Big(2\pi f\frac{3T}{4}\Big) \Leftrightarrow \\
j2\pi f X(f) &= \mathrm{sinc}\Big(\frac{fT}{2}\Big)2j\sin\Big(2\pi f\frac{3T}{4}\Big) \Leftrightarrow \qquad (3) \\
X(f) &= \frac{3T}{2}\mathrm{sinc}\Big(f\frac{3T}{2}\Big)\mathrm{sinc}\Big(f\frac{T}{2}\Big) \qquad (4)
\end{aligned}$$

Άρα τελικά

$$X_k = \frac{1}{T_0}X_{T_0}(f)\Big|_{f=\frac{k}{T_0}=\frac{k}{3T}} = \frac{1}{2}\mathrm{sinc}\Big(\frac{k}{2}\Big)\mathrm{sinc}\Big(\frac{k}{6}\Big) \tag{5}$$



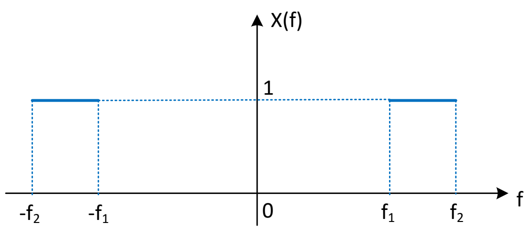
Σχήμα 2: Παράγωγος του τραπεζοειδούς σήματος Άσκησης 1

Οπότε η εκθετική σειρά Fourier μπορεί να γραφεί ως εξής:

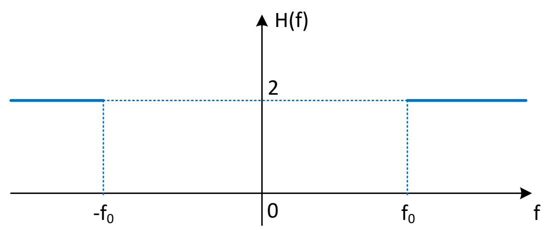
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi \frac{k}{3T} t} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}\Big(\frac{k}{2}\Big)\mathrm{sinc}\Big(\frac{k}{6}\Big) e^{j2\pi \frac{k}{3T} t} \tag{6}$$

που είναι και το ζητούμενο.

2. **Έστω πραγματικό σήμα** $\mathrm{x(t)}$ **με μετασχ. Fourier όπως στο παρακάτω Σχήμα** 3α΄. **Το σήμα αυτό περνάει**



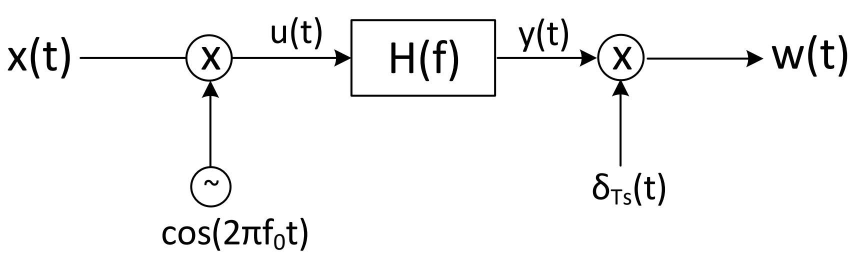
(α΄) Φάσμα $X(f)$ Άσκησης 2



(β΄) Φίλτρο $H(f)$ Άσκησης 2

Σχήμα 3: Άσκηση 2: Φάσματα

από το σύστημα του Σχήματος 4 **με το** $\mathrm{H(f)}$ **όπως στο Σχήμα** 3β΄ **και**



Σχήμα 4: Σύστημα Άσκησης 2

$$\delta_{\mathbf{T_s}}(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{k}=-\infty}^{+\infty} \delta(\mathbf{t} - \mathbf{kT_s})$$

(α') **Βρείτε το $\mathbf{y(t)}$ μέσω του $\mathbf{Y(f)}$**

(β') **Βρείτε το $\mathrm{w(t)}$ και σχεδιάστε το φάσμα του. Ποιά γνωστή σας διαδικασία σας θυμίζει η κατασκευη του $\mathrm{w(t)}$;**

(γ') **Βρείτε την ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας $\mathrm{f_s}$ για να μπορεί να ανακατασκευαστεί το $\mathrm{y(t)}$ από το $\mathrm{w(t)}$.**

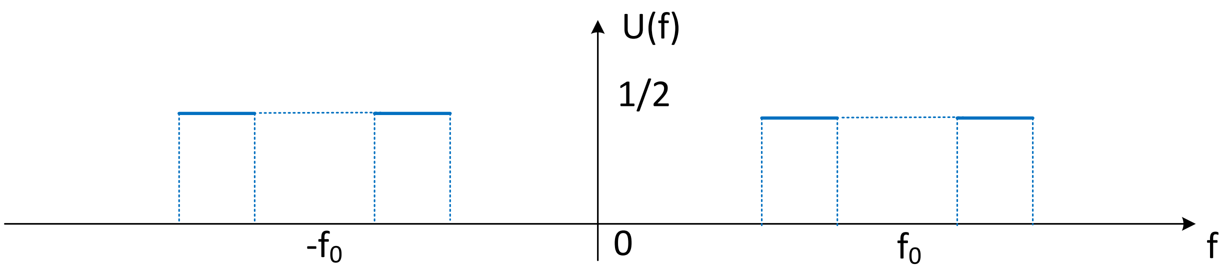
Λύση:

(α') Είναι

$$\begin{aligned} u(t) &= x(t)\cos(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow U(f) = X(f) * \Big(\frac{1}{2}\delta(f+f_0) + \frac{1}{2}\delta(f-f_0)\Big) \Leftrightarrow \\ U(f) &= \frac{1}{2}X(f+f_0) + \frac{1}{2}X(f-f_0) \end{aligned}$$

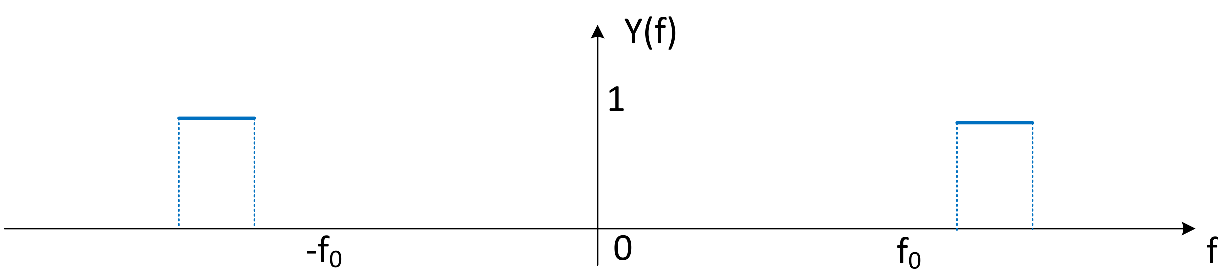
από γνωστή ιδιότητα της συνέλιξης σήματος με συναρτήσεις Δέλτα.

Το παραπάνω λέει ουσιαστικά ότι το φάσμα του $U(f)$ αποτελείται απ'το φάσμα του $X(f)$ μετατοπισμένο γύρω απ'τη συχνότητα $f = -f_0$ και γύρω απ'τη συχνότητα $f = f_0$, με πλάτος $1/2$ το καθένα.
Σχηματικά, φαίνεται στο Σχήμα 5. Ο πολλαπλασιασμός των δυο σημάτων, $U(f)$ και $H(f)$, στη συχνότητα



Σχήμα 5: Το φάσμα του σήματος $U(f)$ Άσκησης 2

θα μας δώσει το $Y(f)$ όπως φαίνεται στο Σχήμα 6. Πρέπει να βρούμε τώρα το $Y(f)$. Υπάρχουν δυο τρόποι



Σχήμα 6: Το φάσμα του σήματος $H(f)U(f)$ Άσκησης 2

για να το κάνουμε αυτό.
1ος τρόπος:
Παρατηρούμε ότι το φάσμα αποτελείται από δυο τετραγωνικούς παλμούς (παράθυρα), που έχουν κέντρο τη συχνότητα $f_c = \pm(f_0 + \frac{f_1+f_2}{2})$. Άρα χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της μετατόπισης στη συχνότητα,

$$x(t)e^{\pm j2\pi f_c t} \leftrightarrow X(f \mp f_c)$$

καθώς και την ιδιότητα της δυικότητας,

$$x(t) \longleftrightarrow X(f) \Rightarrow X(t) \longleftrightarrow x(-f)$$

θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} Y(f) &= \mathrm{rect}\Big(\frac{f+f_c}{f_2-f_1}\Big) + \mathrm{rect}\Big(\frac{f-f_c}{f_2-f_1}\Big) \longleftrightarrow \\ y(t) &= (f_2-f_1)\mathrm{sinc}((f_2-f_1)t)e^{-j2\pi f_c t} + (f_2-f_1)\mathrm{sinc}((f_2-f_1)t)e^{j2\pi f_c t} \end{aligned}$$

<u>2ος τρόπος:</u>
Ένας δεύτερος τρόπος είναι να παρατηρήσουμε ότι τα δυο παράθυρα μπορούν να προκύψουν αν θεωρήσουμε ένα μεγάλο παράθυρο που ξεκινάει από το $-(f_0+f_2)$ και τελειώνει στο f_0+f_2, και από αυτό να αφαιρέσουμε ένα λίγο μικρότερο, που ξεκινάει από το $-(f_0+f_1)$ και τελειώνει στο f_0+f_1. Αυτό θα μας δώσει:

$$\begin{aligned} Y(f) &= \mathrm{rect}\Big(\frac{f}{2(f_0+f_2)}\Big) - \mathrm{rect}\Big(\frac{f}{2(f_0+f_1)}\Big) \longleftrightarrow \\ y(t) &= 2(f_0+f_2)\mathrm{sinc}(2(f_0+f_2)t) - 2(f_0+f_1)\mathrm{sinc}(2(f_0+f_1)t) \end{aligned}$$

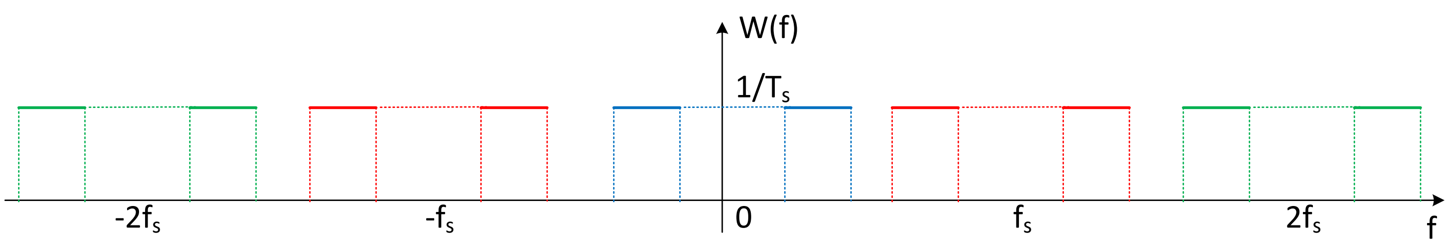
(β΄) Είναι

$$w(t) = \delta_{T_s}(t)y(t) = y(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(kT_s)\delta(t-kT_s)$$

Ο πολλαπλασιασμός ενός σήματος με μια άπειρη σειρά από συναρτήσεις δέλτα, οι οποίες ισαπέχουν μεταξύ τους κατά χρόνο T_s, είναι η γνωστή μας διαδικασία της δειγματοληψίας. Περίοδος δειγματοληψίας είναι η T_s και συχνότητα δειγματοληψίας η $f_s = \frac{1}{T_s}$. Για να βρούμε το φάσμα, έχουμε:

$$W(f) = Y(f) * F\{\delta_{T_s}(t)\} = Y(f) * \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(f-kf_s) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y(f-kf_s)$$

λόγω της γνωστής ιδιότητας $X(f) * \delta(f-f_0) = X(f-f_0)$. Αυτό μας λέει ότι το φάσμα του $W(f)$ είναι το φάσμα του $Y(f)$ επαναλαμβανόμενο γύρω από τις συχνότητες kf_s, που θα μπορούσαμε να το εξάγουμε κατέυθείαν από τη θεωρία μας σχετικά με τη δειγματοληψία - απλά εδώ το δείξαμε και με μαθηματικά. Αν το f_s είναι αρκετά μεγάλο, τότε το φάσμα θα είναι όπως στο Σχήμα 7, όπου τα χρωματιστά φάσματα αναπαριστούν τις περιοδικές επαναλήψεις του βασικού (μπλέ) φάσματος.



Σχήμα 7: Το φάσμα του σήματος $W(f)$ Άσκησης 2

(γ΄) Σύμφωνα με το θεώρημα του Shannon, για να μπορεί να ανακατασκευαστεί ένα σήμα από τη δειγματοληπτημένη μορφή του, θα πρέπει η συχνότητα δειγματοληψίας να είναι μεγαλύτερη από τη διπλάσια μέγιστη συχνότητα του σήματος που πρόκειται να δειγματοληπτηθεί. Αν κοιτάξουμε το φάσμα του $Y(f)$, βλέπουμε ότι η μέγιστη συχνότητά του είναι η $f_{max} = f_0 + f_2$. Άρα η f_s πρέπει να είναι γνήσια μεγαλύτερη με $2(f_0+f_2)$, για να μπορεί να ανακτηθεί το σήμα από τα δείγματά του. Άρα πρέπει $f_s > 2(f_0+f_2)$.

3. **Έστω**

$$\mathbf{H(s) = \frac{2s^2e^{-2s}}{(s-2)(s-3)}}$$

το οποίο έχει αντίστρ. μετασχ. Laplace ένα $\mathrm{h(t)}$ που είναι αμφίπλευρο σήμα. Βρείτε την περιοχή σύγκλισης και το $\mathrm{h(t)}$.

Λύση:
Αφού το $H(s)$ είναι αμφίπλευρο και έχει πόλους, το πεδίο σύγκλισής του θα είναι μια \λωρίδα"στο μιγαδικό επίπεδο. Οι πόλοι είναι στις θέσεις $s = 2, s = 3$, άρα το πεδίο σύγκλισης (από τα 3 πιθανά) θα είναι το

$$ROC : 2 < \Re\{s\} < 3$$

Είναι

$$H(s) = \frac{2s^2e^{-2s}}{(s-2)(s-3)} = \frac{2s^2}{(s-2)(s-3)}e^{-2s} = 2G(s)e^{-2s} \longleftrightarrow h(t) = 2g(t-2)$$

με

$$G(s) = \frac{s^2}{(s-2)(s-3)}$$

Οπότε αρκεί να βρούμε το $g(t)$ και να αντικαταστήσουμε. Θα κάνουμε ανάλυση σε μερικά κλάσματα στο $G(s)$ λοιπόν. Παρατηρώντας το $G(s)$, βλέπουμε ότι ο βαθμός του πολυωνύμου του παρονομαστή είναι ίσος με τον βαθμό του αριθμητή, άρα δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε αμέσως ανάλυση σε μερικά κλάσματα. Για να γίνει αυτό, πρέπει να έχουμε βαθμό πολυωνύμου παρονομαστή > βαθμό πολυωνύμου αριθμητή. Για να έρθουμε σε μια τέτοια περίπτωση, θα κάνουμε διαίρεση των πολυωνύμων. Οπότε θα έχουμε:

$$G(s) = \frac{s^2}{(s-2)(s-3)} = 1 + \frac{5s-6}{(s-2)(s-3)} = 1 + \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-3}$$

με

$$\begin{aligned} A &= \frac{5s-6}{(s-2)(s-3)}(s-2)\Big|_{s=2} = -4 \\ B &= \frac{5s-6}{(s-2)(s-3)}(s-3)\Big|_{s=3} = 9 \end{aligned}$$

άρα τελικά

$$G(s) = 1 - \frac{4}{s-2} + \frac{9}{s-3}$$

Ξέρουμε ότι

$$2 < \Re\{s\} < 3 \Leftrightarrow \Re\{s\} > 2$$

και

$$\Re\{s\} < 3$$

Προφανώς το πρώτο πεδίο αντιστοιχεί στον πρώτο όρο και το δεύτερο πεδίο στο δεύτερο όρο. Κοιτώντας τους πίνακες με τα ζεύγη των μετασχ. Laplace, καταλήγουμε ότι:

$$G(s) = 1 - \frac{4}{s-2} + \frac{9}{s-3} \leftrightarrow g(t) = \delta(t) - 4e^{2t}\epsilon(t) - 9e^{3t}\epsilon(-t) \tag{7}$$

Οπότε τελικά θα έχουμε:

$$h(t) = 2g(t-2) = 2\delta(t-2) - 8e^{2(t-2)}\epsilon(t-2) - 18e^{3(t-2)}\epsilon(-t+2) \tag{8}$$

που είναι το ζητούμενο.

4. **Έστω $\mathbf{h(t)}$ πραγματικό σήμα, που έχει ρητό μετασχ. Laplace με 4 πόλους εκ των οποίων ένας είναι στο $\mathbf{s_1 = -1 + j}$, και δυο στο $\mathbf{s_2 = 2}$. Επίσης, έχει δυο μηδενικά στο $\mathbf{s_0 = 1}$. Τέλος, γνωρίζουμε οτι $\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h(t)dt = 1}$. Να βρεθούν:**
   (α') **το $\mathbf{H(s)}$.**
   (β') **τα πιθανά πεδία σύγκλισης.**
   (γ') **πότε το $\mathbf{H(s)}$ είναι ευσταθές;**

Λύση:
Από εκφώνηση, ξέρουμε ότι

$$H(s) = \frac{A(s-1)^2}{(s-2)^2(s-(-1+j))(s-s_3)}$$

(α') Επειδή το σήμα $h(t)$ είναι πραγματικό, οι πόλοι είναι σε συζυγή θέση, άρα ο τέταρτος πόλος είναι ο $s_3 = s_1^* = -1 - j$. Άρα θα είναι

$$H(s) = \frac{A(s-1)^2}{(s-2)^2(s-(-1+j))(s-(-1-j))}$$

Επίσης, από το ολοκλήρωμα της εκφώνησης, ισχύει ότι

$$H(0) = \frac{A(0-1)^2}{(0-2)^2(0-(-1+j))(0-(-1-j))} = \frac{A}{8} = 1 \Leftrightarrow A = 8$$

Άρα τελικά το $H(s)$ θα είναι

$$H(s) = \frac{8(s-1)^2}{(s-2)^2(s-(-1+j))(s-(-1-j))} \tag{9}$$

(β') Τα πιθανά πεδία σύγκλισης είναι τα $\Re\{s\} > 2$, $-1 < \Re\{s\} < 2$, ή $\Re\{s\} < -1$.

(γ') Το $H(s)$ είναι ευσταθές μόνον αν $-1 < \Re\{s\} < 2$ γιατί μόνο τότε το πεδίο σύγκλισης περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα.

5. **Βρείτε το Μετασχηματισμό Fourier του σήματος:**

$$\mathbf{x(t)} = \begin{cases} t, & 0 \le t < 2 \\ -2t+6, & 2 \le t < 3 \end{cases}$$

με χρήση παραγώγων.

Λύση:
Παραγωγίζοντας το σήμα, έχουμε

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 2 \\ -2, & 2 \le t < 3 \end{cases}$$

Παρατηρούμε οτι η παράγωγος δεν περιλαμβάνει καμία συνάρτηση Δέλτα, καθώς το αρχικό σήμα $x(t)$ είναι συνεχές σε κάθε σημείο του. Άρα η παράγωγος γράφεται ως

$$\begin{aligned}
\frac{dx(t)}{dt} &= \mathrm{rect}\Big(\frac{t-1}{2}\Big) - 2\mathrm{rect}\Big(\frac{t-\frac{5}{2}}{1}\Big) \leftrightarrow \\
F\{\frac{dx(t)}{dt}\} &= 2\mathrm{sinc}(2f)e^{-j2\pi f} - 2\mathrm{sinc}(f)e^{-j\frac{5}{2}2\pi f} \\
j2\pi f X(f) &= 2\mathrm{sinc}(2f)e^{-j2\pi f} - 2\mathrm{sinc}(f)e^{-j5\pi f} \\
X(f) &= 2\frac{e^{-j(2\pi f + \pi/2)}}{2\pi f}\mathrm{sinc}(2f) - 2\frac{e^{-j(5\pi f+\pi/2)}}{2\pi f}\mathrm{sinc}(f)
\end{aligned} \tag{10}$$

6. **Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:**

$$\mathbf{\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t)}$$

με αρχικές συνθήκες $\mathbf{y(0^-) = 2}$, $\mathbf{y'(0^-) = 1}$ **και είσοδο** $\mathbf{x(t) = e^{-4t}\epsilon(t)}$.

Λύση:
Εφαρμόζοντας το μετασχ. Laplace και στα δυο μέλη, έχουμε:

$$\begin{aligned}
L\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\} + L\{5\frac{dy(t)}{dt}\} + L\{6y(t)\} &= L\{\frac{dx(t)}{dt}\} + L\{x(t)\} \\
s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) + 5sY(s) - 5y(0^-) + 6Y(s) &= sX(s) - x(0^-) + X(s) \\
s^2Y(s) - 2s - 1 + 5sY(s) - 10 + 6Y(s) &= sX(s) - 0 + X(s) \\
Y(s)(s^2 + 5s + 6) - 2s - 11 &= X(s)(s+1) \\
Y(s)(s^2 + 5s + 6) - 2s - 11 &= \frac{s+1}{s+4} \\
Y(s)(s^2 + 5s + 6) &= \frac{s+1}{s+4} + 2s + 11 \\
Y(s) &= \frac{\frac{s+1}{s+4} + 2s + 11}{s^2 + 5s + 6} \\
Y(s) &= \frac{2s^2 + 20s + 45}{(s+2)(s+3)(s+4)}
\end{aligned} \tag{11}$$

Μπορούμε να εφαρμόσουμε Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα, μια και η τάξη του πολυωνύμου του παρονομαστή είναι μεγαλύτερη της τάξης του αριθμητή. Οπότε

$$Y(s) = \frac{2s^2 + 20s + 45}{(s+2)(s+3)(s+4)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s+4}$$

με

$$\begin{aligned}
A &= Y(s)(s+2)\Big|_{s=-2} = \frac{2s^2 + 20s + 45}{(s+3)(s+4)}\Big|_{s=-2} = \frac{13}{2} \\
B &= Y(s)(s+3)\Big|_{s=-3} = \frac{2s^2 + 20s + 45}{(s+2)(s+4)}\Big|_{s=-3} = -3 \\
C &= Y(s)(s+4)\Big|_{s=-4} = \frac{2s^2 + 20s + 45}{(s+2)(s+3)}\Big|_{s=-4} = -\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Άρα τελικά

$$Y(s) = \frac{13}{2}\frac{1}{s+2} - 3\frac{1}{s+3} - \frac{3}{2}\frac{1}{s+4}$$

Οπότε πηγαίνοντας πίσω στο χρόνο, θα είναι

$$y(t) = \frac{13}{2}e^{-2t}\epsilon(t) - 3e^{-3t}\epsilon(t) - \frac{3}{2}e^{-4t}\epsilon(t) \tag{12}$$

7. **Δείξτε ότι**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}^{\mathbf{2}}(\mathbf{kt})\mathbf{dt} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{k}}$$

Λύση:
Από το θεώρημα του Parseval, έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

Γνωρίζουμε ότι

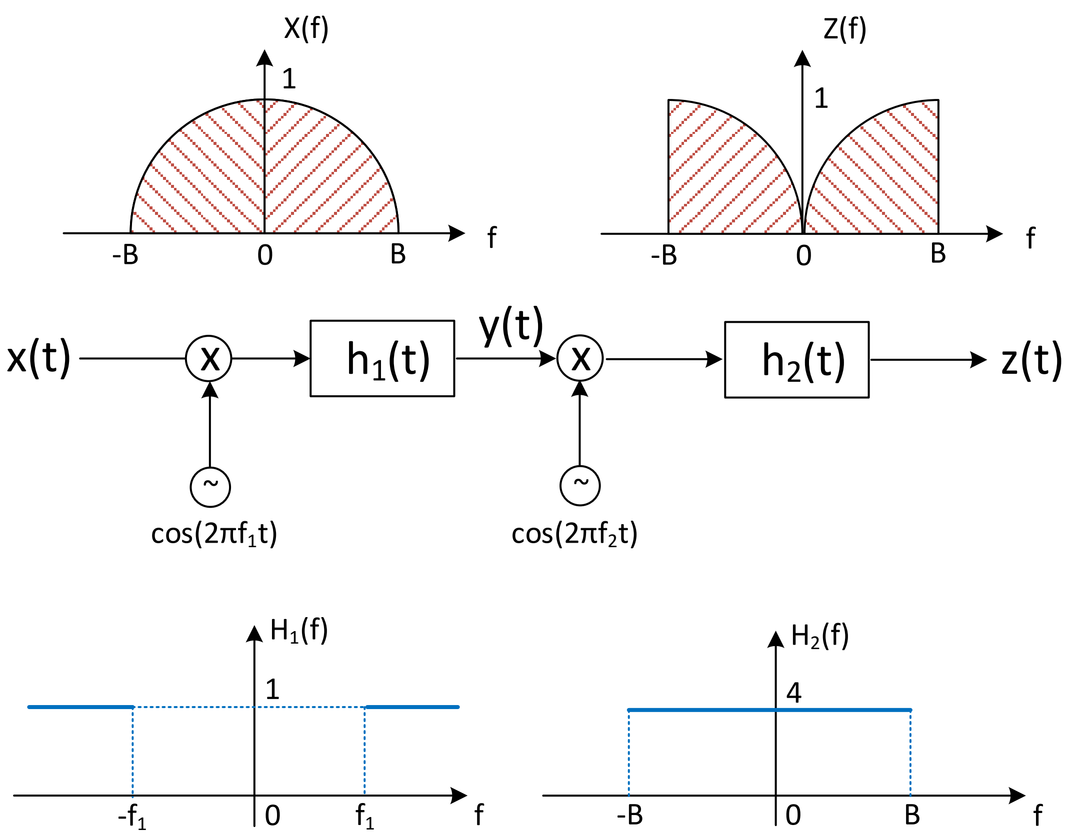
$$\mathrm{rect}\Big(\frac{t}{T}\Big) \longleftrightarrow T\mathrm{sinc}(fT) \Rightarrow \mathrm{sinc}(Tt) \longleftrightarrow \frac{1}{T}\mathrm{rect}\Big(\frac{f}{T}\Big)$$

Άρα

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}^2(kt)dt = \frac{1}{k^2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}^2\Big(\frac{f}{k}\Big)df = \frac{1}{k^2}\int_{-k/2}^{k/2} df = \frac{1}{k^2} f\Big|_{-k/2}^{k/2} = \frac{1}{k} \tag{13}$$

που είναι και το ζητούμενο.

8. **Δίδεται το παρακάτω σύστημα του Σχήματος 8, το οποίο χρησιμοποιείται για voice scrambling, ώστε να παρέχει προστασία από υποκλοπές. Ας υποτεθεί ότι το φάσμα της φωνής έχει μετασχηματισμό**



Σχήμα 8: Voice Scrambler Άσκησης 8

Fourier $\mathrm{X(f)}$ που φαίνεται στο Σχήμα. Το ιδανικό υψιπερατό φίλτρο $\mathrm{H_1(f)}$ επιτρέπει τη διέλευση μόνο των φασματικών συνιστωσών με συχνότητα μεγαλύτερη της $\mathrm{f_1}$. Το ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο $\mathrm{H_2(f)}$ επιτρέπει τη διέλευση μόνο των φασματικών συνιστωσών με συχνότητα μικρότερη της B. Στην έξοδο του όλου συστήματος, το σήμα έχει φάσμα με ανεστραμμένο φασματικό περιεχόμενο που το καθιστά σχεδόν ακατάληπτο.

(α΄) **Να δείξετε ότι** $\mathbf{x(t)\cos(2\pi f_1 t) = x(t)\cos(2\pi f_1 t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}X(f - f_1) + \frac{1}{2}X(f + f_1)}$.

(β΄) **Να σχεδιάσετε το φάσμα** $\mathrm{Y(f)}$.

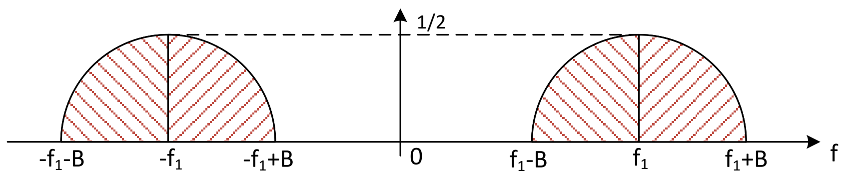
(γ΄) **Να βρείτε την τιμή της** $\mathrm{f_2}$ **ως συνάρτηση της** B **και της** $\mathrm{f_1}$ **ώστε το** $\mathrm{Z(f)}$ **να έχει τη μορφή που δίνεται στο Σχήμα. Υποθέστε ότι** $\mathrm{f_2 > f_1}$.

Λύση:
Θα έχουμε:

(α΄) Είναι

$$x(t)\cos(2\pi f_1 t) \longleftrightarrow X(f) * \Big(\frac{1}{2}\delta(f+f_1) + \frac{1}{2}\delta(f-f_1)\Big) = \frac{1}{2}X(f+f_1) + \frac{1}{2}X(f-f_1) \quad (14)$$

και φαίνεται στο Σχήμα 9.

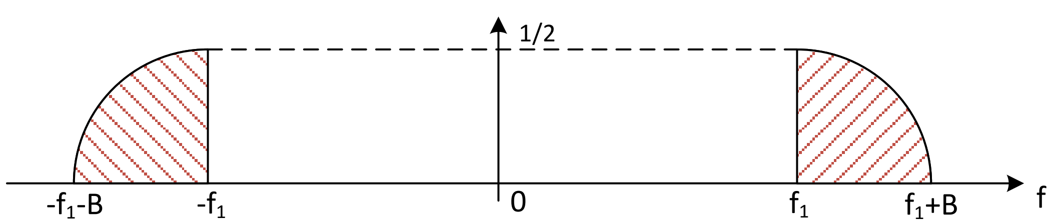


Σχήμα 9: Φάσμα $x(t) * \cos(2\pi f_1 t)$ Άσκησης 8

(β΄) Πρέπει να βρούμε το $Y(f)$. Το $Y(f)$ προκύπτει αν περάσουμε το σήμα που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα μέσα από το σύστημα-φίλτρο $H_1(f)$. Είναι

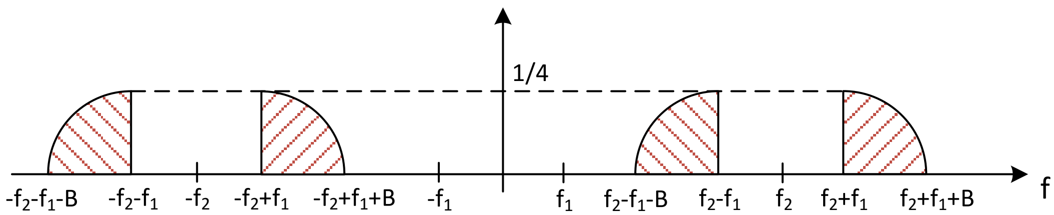
$$Y(f) = \Big(\frac{1}{2}X(f+f_1) + \frac{1}{2}X(f-f_1)\Big)H_1(f) \quad (15)$$

Το αποτέλεσμα φαίνεται στο Σχήμα 10.

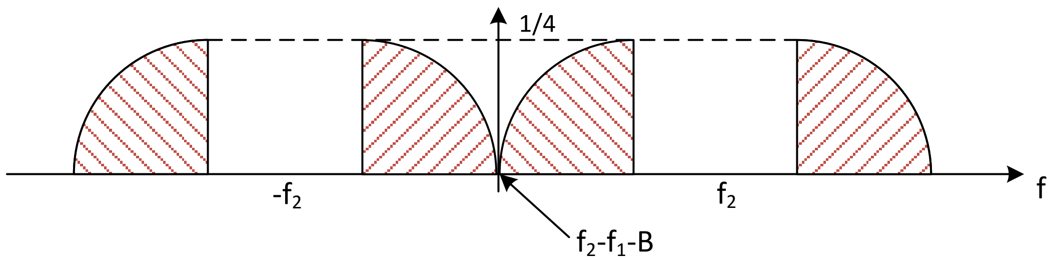


Σχήμα 10: Φάσμα $Y(f)$ Άσκησης 8

(γ΄) Ας υποθέσουμε μια τυχαία $f_2 >> f_1$. Ο πολλαπλασιασμός του φάσματος του Σχήματος 10 με $\cos(2\pi f_2 t)$ θα μας δώσει το Σχήμα 11. Προφανώς, για να πάρουμε το $Z(f)$ που δίνεται στην εκφώνηση, πρέπει τα

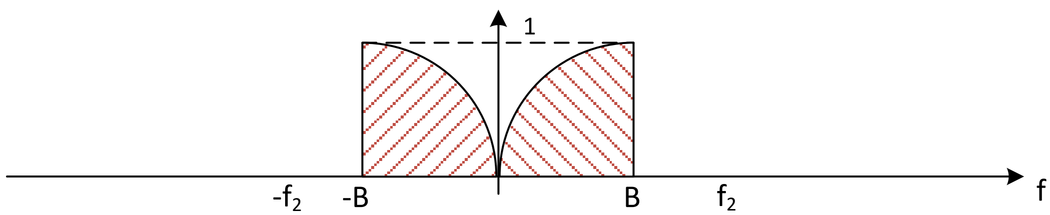


Σχήμα 11: Φάσμα $y(t) * \cos(2\pi f_2 t)$ Άσκησης 8



Σχήμα 12: Ζητούμενο φάσμα $y(t) * \cos(2\pi f_2 t)$ Άσκησης 8

φάσματα να μην είναι όπως στο Σχήμα 11, όπου τα φάσματα είναι μακριά μεταξύ τους, αλλά όπως φαίνονται στο Σχήμα 12. Οπότε, μετά από την εφαρμογή του φίλτου $H_2(f)$, όπως αυτό δίνεται στην εκφώνηση, θα απομείνει το φάσμα του Σχήματος 13. Άρα, η σχέση που συνδέει τη συχνότητα f_2 με την f_1 και τη B είναι



Σχήμα 13: Φάσμα $Z(f)$ Άσκησης 8

αυτή που φαίνεται και στο Σχήμα 12, δηλ.

$$f_2 - f_1 - B = 0 \Longleftrightarrow f_2 = f_1 + B \tag{16}$$

9. **Έστω το σύστημα**

$$\mathbf{H(s) = \frac{s-1}{s^3+2s^2-s-2}} \tag{17}$$

Σχολιάστε την ευστάθεια και την αιτιατότητα του συστήματος, για κάθε πιθανό ROC που μπορεί να προκύψει, χωρίς να υπολογίσετε το $\mathrm{h(t)}$. Αν πολλαπλασιάσουμε το $\mathrm{H(s)}$ με $\mathrm{e^{2s}}$, τι αλλάζει σχετικά με την ευστάθεια και την αιτιατότητα;

<u>Λύση:</u>
Είναι

$$\begin{aligned} H(s) &= = \frac{s-1}{s^3+2s^2-s-2} \\ &= \frac{s-1}{(s-1)(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} \end{aligned}$$

με

$$\begin{aligned} A &= H(s)(s+1)\Big|_{s=-1} = \frac{1}{s+2}\Big|_{s=-1} = 1 \\ B &= H(s)(s+2)\Big|_{s=-2} = \frac{1}{s+1}\Big|_{s=-2} = -1 \end{aligned}$$

και άρα

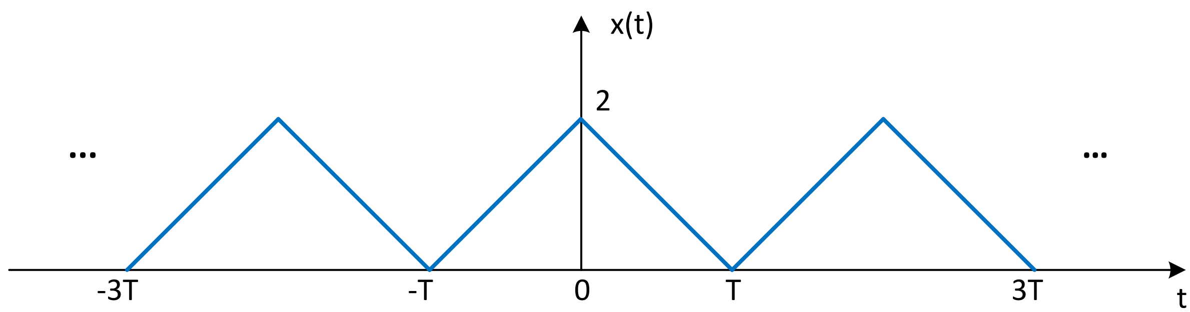
$$H(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

Τα πιθανά πεδία σύγκλισης είναι τα $-2 < \Re\{s\} < -1$, $\Re\{s\} < -2$, $\Re\{s\} > -1$.

- $-2 < \Re\{s\} < -1$: το σήμα είναι μη ευσταθές, γιατί δεν περιλαμβάνεται ο φανταστικός άξονας στο πεδίο σύγκλισης, ενώ είναι αμφίπλευρο και άρα μη αιτιατό.
- $\Re\{s\} < -2$: το σήμα είναι μη ευσταθές, γιατί δεν περιλαμβάνεται ο φανταστικός άξονας στο πεδίο σύγκλισης, ενώ είναι αριστερόπλευρο και άρα μη αιτιατό.
- $\Re\{s\} > -1$: το σήμα είναι ευσταθές, γιατί ο φανταστικός άξονας περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης, ενώ είναι δεξιόπλευρο και αιτιατό, γιατί αποτελείται από απλά κλάσματα χωρίς καθυστέρηση.

Ο πολλαπλασιασμός με e^{2s} δίνει το σήμα $h(t+2)$. Δεν αλλάζει τίποτα όσον αφορά την ευστάθεια, αφού τα πεδία σύγκλισης δεν αλλάζουν, αφού δεν άλλαξαν οι πόλοι. Όσον αφορά την αιτιατότητα, το σήμα δεν είναι αιτιατό σε καμία περίπτωση.

10. **Βρείτε τους συντελεστές του δίπλευρου αναπτύγματος σε σειρά Fourier του περιοδικού σήματος του Σχήματος 14.**



Σχήμα 14: Περιοδικό Τριγωνικό Σήμα Άσκησης 10

Λύση:
Θα βρούμε πρώτα το μετασχ. Fourier μιας περιόδου του σήματος $x(t)$ και μετά θα δειγματοληπτήσουμε το φάσμα για να βρούμε τους συντελεστές Fourier. Είναι

$$x(t,T_0) = 2tri\Big(\frac{t}{T_0}\Big) \longleftrightarrow X(f,T_0) = 2T_0 \mathrm{sinc}^2(fT_0)$$

Η περίοδος του περιοδικού σήματος είναι $T_0 = 2T$, άρα οι συντελεστές Fourier θα είναι

$$X_k = \frac{1}{T_0} X(f,T_0)\Big|_{f=\frac{k}{T_0}} = \frac{1}{2T} 2T \mathrm{sinc}^2\Big(\frac{k}{2T}T\Big) = \mathrm{sinc}^2\Big(\frac{k}{2}\Big) \tag{18}$$

που είναι και το ζητούμενο.

11. **Αποδείξτε ότι ένα σήμα δεν μπορεί να είναι πεπερασμένο στο χώρο του χρόνου και, ταυτόχρονα, πεπερασμένο στο χώρο της συχνότητας.**

Λύση:
Έστω ότι ένα σήμα $x(t)$ είναι ταυτοχρόνως πεπερασμένο και στους δυο χώρους. Στο χώρο της συχνότητας, θα είναι:

$$X(f) = 0,\ |f| > B$$

Τότε, μπορούμε να γράψουμε το σήμα αυτό ως

$$X'(f) = X(f)\mathrm{rect}\Big(\frac{f}{2B}\Big)$$

Μεταφερόμενοι στο χώρο του χρόνου, θα είναι

$$X'(f) = X(f)\mathrm{rect}\Big(\frac{f}{2B}\Big) \longleftrightarrow x'(t) = x(t) * 2B\mathrm{sinc}(2Bt)$$

Η παραπάνω σχέση μας λέει ότι το $x'(t)$ (και άρα και το $x(t)$) δεν μπορεί να είναι πεπερασμένο στο χρόνο, γιατί η συνάρτηση sinc έχει άπειρη διάρκεια. Άρα άτοπο, οπότε δε γίνεται να υπάρξει σήμα πεπερασμένο και στους δυο χώρους.

12. **Να βρεθεί η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας για το σήμα**

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \mathrm{sinc}\Big(\frac{\mathbf{at}}{\pi}\Big)$$

<u>Λύση</u>:
Γνωρίζουμε ότι

$$A\mathrm{rect}\Big(\frac{t}{T}\Big) \longleftrightarrow AT\mathrm{sinc}(fT)$$

Επίσης γνωρίζουμε από την ιδιότητα της δυικότητας ότι

$$x(t) \longleftrightarrow X(f) \quad \text{τότε} \quad X(t) \longleftrightarrow x(-f)$$

Εφαρμόζοντας αυτή τη σχέση, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} T\mathrm{sinc}(tT) \quad &\longleftrightarrow \quad \mathrm{rect}\Big(\frac{-f}{T}\Big) \\ \mathrm{sinc}(tT) \quad &\longleftrightarrow \quad \frac{1}{T}\mathrm{rect}\Big(\frac{-f}{T}\Big) \end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι για $T = \frac{a}{\pi}$ έχουμε τη σχέση της εκφώνησης, άρα

$$\mathrm{sinc}\Big(\frac{at}{\pi}\Big) \longleftrightarrow \frac{\pi}{a}\mathrm{rect}\Big(\frac{f}{\frac{a}{\pi}}\Big)$$

αφού η συνάρτηση rect είναι άρτια.

Προφανώς το παραπάνω rect ορίζεται στη συχνότητα στο $\big[-\frac{a}{2\pi}, \frac{a}{2\pi}\big]$, οπότε η μέγιστη συχνότητά του είναι η $f_{max} = \frac{a}{2\pi}$. Οπότε η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας για την πλήρη αναπαράσταση του σήματος από τα δείγματά του είναι η

$$f_s = 2f_{max} = \frac{a}{\pi} \tag{19}$$

που ειναι και το ζητούμενο.

13. **Μοντελοποιούμε ένα καμπαναριό ως ένα σύστημα όπου το σφυρί (που χτυπά την καμπάνα) είναι η είσοδος, η καμπάνα είναι το σύστημα, και ο ήχος της καμπάνας είναι η έξοδος. Απαντήστε με μικρές, συνοπτικές προτάσεις στις ακόλουθες ερωτήσεις.**

    (α΄) **Είναι το σύστημα γραμμικό; Είναι χρονικά αμετάβλητο;**

    (β΄) **Είναι το σύστημα ευσταθές;**

    (γ΄) **Δώστε μια μαθηματική έκφραση (σε μια γραμμή) που πιστεύετε ότι εκφραζει την κρουστική απόκριση, $\mathrm{h}(\mathrm{t})$, του συστήματος. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.**

Λύση:

(α') Το σύστημα είναι γραμμικό, γιατί αν χτυπήσουμε δυο φορές την καμπάνα με διαφορετικό τρόπο, αυτό που θα ακούσουμε θα είναι το άθροισμα των ήχων, αν τη χτυπούσαμε ξεχωριστά, με διαφορετικό τρόπο. Επίσης, ειναι χρονικά αμετάβλητο, γιατί αν καθυστερήσουμε να χτυπήσουμε την καμπάνα t_0 δευτερόλεπτα, τότε ο ήχος της θα καθυστερήσει να ακουστεί επίσης t_0 δευτερόλεπτα.

(β') Το σύστημα είναι ευσταθές, γιατί για οποιοδήποτε, οσο δυνατό, χτύπο του σφυριού, ο ήχος που θα ακουστεί θα 'σβήσει' με την πάροδο του χρόνου. Άρα για φραγμένη είσοδο, θα πάρουμε φραγμένη έξοδο.

(γ') Θα μπορούσε κανεις να περιγράψει την κρουστική απόκριση (δηλ. τον ήχο που θα ακουστεί από την καμπάνα όταν τη χτυπήσουμε ακαριαία, σαν να εφαρμόζουμε μια $\delta(t)$ ως είσοδο) ως ένα εκθετικά φθίνον συνημίτονο συχνότητας f_0. Άρα

$$h(t) = e^{-at}\cos(2\pi f_0 t)\epsilon(t), \;\; a > 0$$