ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2015-16
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Λυμένες Ασκήσεις - Τυχαίες Διαδικασίες

Άσκηση 1.
Έστω ένα ημιτονοειδές σήμα με τη φάση του, Θ, να αποτελεί τυχαία μεταβλητή, ως

$$X(t) = A\cos(2\pi f_c t + \Theta) \tag{1}$$

με A, f_c, σταθερές και Θ ομοιόμορφα κατανεμημένη τυχαία μεταβλητή στο διάστημα $[-\pi, \pi]$. Άρα η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής είναι

$$f_\Theta(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & -\pi \le \theta \le \pi \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{2}$$

Αυτό σημαίνει ότι η τυχαία μεταβλητή Θ είναι εξίσου πιθανό να λάβει οποιαδήποτε τιμή στο διάστημα $[-\pi, \pi]$. Κάθε τιμή του Θ αντιστοιχεί σε ένα δείγμα (πραγματοποίηση) της στοχαστικής διαδικασίας $X(t)$. Βρείτε την αυτοσυσχέτιση $R_{xx}(\tau)$.

Λύση:
Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της $X(t)$ είναι

$$\begin{aligned}
R_{xx}(\tau) &= E[X(t+\tau)X(t)] && (3)\\
&= E[A^2\cos(2\pi f_c t + 2\pi f_c \tau + \Theta)\cos(2\pi f_c t + \Theta)] && (4)\\
&= \frac{A^2}{2}E[\cos(4\pi f_c t + 2\pi f_c \tau + 2\Theta)] + \frac{A^2}{2}E[\cos(2\pi f_c \tau)] && (5)\\
&= \frac{A^2}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f_\Theta(\theta)\cos(4\pi f_c t + 2\pi f_c \tau + 2\theta)d\theta + \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_c \tau) && (6)\\
&= \frac{A^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}\cos(4\pi f_c t + 2\pi f_c \tau + 2\theta)d\theta + \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_c \tau) && (7)\\
&= 0 + \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_c \tau) && (8)\\
&= \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_c \tau) && (9)
\end{aligned}$$

Άσκηση 2.
Έστω ένα δείγμα (πραγματοποίηση) της τυχαίας διαδικασίας $X(t)$ η οποία αποτελείται από μια τυχαία ακολουθία δυαδικών συμβόλων 1 και 0. Ας θεωρήσουμε τις ακόλουθες υποθέσεις:

1. Τα σύμβολα 1 και 0 αναπαρίστανται από παλμούς με πλάτος $+A$ και $-A$, και διάρκεια T δευτερόλεπτα.

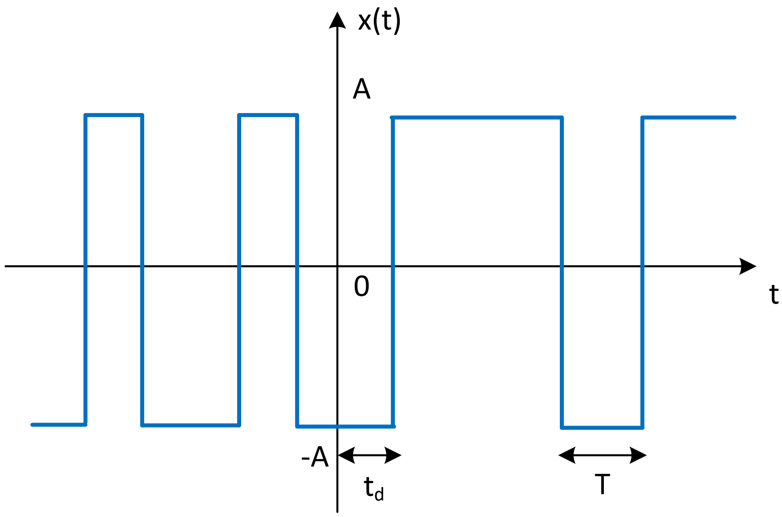
2. Οι παλμοί δεν είναι συγχρονισμένοι, άρα η θετική χρονική στιγμή έναρξης t_d του πρώτου παλμού είναι ισοπίθανο να συμβεί οποτεδήποτε μεταξύ των χρονικών στιγμών 0 και T δευτερολέπτων. Δηλαδή, το t_d μπορεί να μοντελοποιηθεί ως μια ομοιόμορφα κατανεμημένη τυχαία μεταβλητή T_d, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{T_d}(t_d) = \begin{cases} \frac{1}{T}, & 0 \le t_d \le T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{10}$$

3. Κατά ένα οποιοδήποτε χρονικό διάστημα $(n-1)T < t - t_d < nT$, όπου n ακέραιος, η παρουσία ενός 1 ή ενός 0 καθορίζεται από τη ρίψη ενός δίκαιου νομίσματος. Δηλ. αν το αποτέλεσμα είναι κορώνα, θα έχουμε ένα 1, ενώ αν το αποτέλεσμα είναι γράμματα, τότε θα έχουμε ένα 0. Αυτά τα δυο σύμβολα είναι ισοπίθανα να συμβούν, και η παρουσία ενός 1 ή ενός 0 σε οποιοδήποτε διάστημα είναι ανεξάρτητη από όλα τα υπόλοιπα διαστήματα.

Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της τυχαίας διαδικασίας.

Λύση:
Αφού τα πλάτη $\pm A$ συμβαίνουν με ίση πιθανότητα (είναι δηλ. ισοπίθανα), συνεπάγεται άμεσα ότι η μέση τιμή της τυχαίας διαδικασίας είναι μηδέν, άρα $E[X(t)] = 0, \ \forall t$. Για να βρούμε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_X(t_k, t_i)$,



Σχήμα 1: Πραγματοποίηση τυχαίας διαδικασίας για ένα τυχαίο δυαδικό σήμα.

πρέπει να εκτιμήσουμε την ποσότητα $E[X(t_k)X(t_i)]$, όπου $X(t_k), X(t_i)$ είναι τυχαίες μεταβλητές που προέρχονται από την παρατήρηση της τυχαίας διαδικασίας $X(t)$ τις χρονικές στιγμές t_k, t_i αντίστοιχα.

Ας θεωρήσουμε πρώτα την περίπτωση

$$|t_k - t_i| > T$$

Υπό αυτή τη συνθήκη, οι τυχαίες μεταβλητές $X(t_k)$ και $X(t_i)$ συμβαίνουν σε διαφορετικούς παλμούς, και άρα είναι ανεξάρτητες. Τότε θα έχουμε

$$E[X(t_k)X(t_i)] = E[X(t_k)]E[X(t_i)] = 0, \ \ |t_k - t_i| > T$$

Ας θεωροήσουμε τώρα την περίπτωση που

$$|t_k - t_i| < T$$

,με $t_k = 0$ και $t_i < t_k$. Σε μια τέτοια κατάσταση, παρατηρούμε στο Σχήμα 1 ότι οι τυχαίες μεταβλητές $X(t_k)$ και $X(t_i)$ συμβαίνουν σε διάστημα όπου λαμβάνει χώρα ο ίδιος παλμός, αν και μόνον αν η καθυστέρηση t_d ικανοποιεί τη συνθήκη

$$t_d < T - |t_k - t_i|$$

Δεδομένου λοιπόν αυτού, μπορούμε να ορίσουμε τη δεσμευμένη μέση τιμή

$$E[X(t_k)X(t_i)|t_d] = \begin{cases} A^2, & t_d < T - |t_k - t_i| \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (11)$$

Μπορούμε να πάρουμε τη μέση τιμή $E[X(t_k)X(t_i)]$ αθροίζοντας την παραπάνω δεσμευμένη μέση τιμή για κάθε t_d, άρα

$$\begin{aligned} E[X(t_k)X(t_i)] &= \int_0^{T-|t_k-t_i|} A^2 f_{T_d}(t_d)dt_d && (12)\\ &= \int_0^{T-|t_k-t_i|} \frac{A^2}{T}dt_d && (13)\\ &= A^2\Big(1-\frac{|t_k-t_i|}{T}\Big),\ \ |t_k-t_i|<T && (14)\end{aligned}$$

Με όμοιο συλλογισμό για οποιαδήποτε άλλη τιμή του t_k, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ενός τυχαίου δυαδικού σήματος, που μια πραγματοποίησή του φαίνεται στο Σχήμα 1, εξαρτάται μόνο από τη χρονική διαφορά $|t_k - t_i| = \tau$, δηλ.

$$R_x(\tau) = A^2\Big(1-\frac{|\tau|}{T}\Big),\quad |\tau|<T \tag{15}$$

και μηδέν για $|\tau| \geq T$. Άρα η διαδικασία είναι στάσιμη, ενώ η αυτοσυσχέτιση είναι το γνωστό μας τριγωνικό σήμα διάρκειας $2T$ και μεγίστου πλάτους A^2.

Άσκηση 3.
Συνεχίζοντας την προηγούμενη άσκηση, δείξαμε ότι η αυτοσυσχέτιση της τυχαίας διαδικασίας $X(t)$ είναι

$$R_x(\tau) = \begin{cases} A^2\Big(1-\frac{|\tau|}{T}\Big), & |\tau|<T\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases} \tag{16}$$

Βρείτε τη Φασματική Πυκνότητα Ισχύος της διαδικασίας.

<u>Λύση:</u>
Η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος, που είναι ο μετασχ. Fourier της αυτοσυσχέτισης, θα είναι

$$\Phi_x(f) = F\{A^2\mathrm{tri}(t/T)\} = A^2T\mathrm{sinc}^2(fT) \tag{17}$$

Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να γενικευθεί ως ακολούθως: παρατηρήστε ότι η Φασματική Πυκνότητα *Ενέργειας* (δηλ. το τετράγωνο του μέτρου του μετασχ. Fourier) ενός τετραγωνικού παλμού $g(t)$ πλάτους A και διάρκειας T δίνεται από τη σχέση

$$\Phi_g(f) = A^2T^2\mathrm{sinc}^2(fT) \tag{18}$$

Έτσι, μπορούμε να γράψουμε ότι η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος $\Phi_x(f)$ μιας τυχαίας δυαδικής διαδικασίας με σύμβολα 1 και 0, τα οποία αναπαρίστανται με παλμούς $g(t)$ και $-g(t)$, αντίστοιχα, ισούται με τη Φασματική Πυκνότητα *Ενέργειας* του παλμού $g(t)$, διά τη διάρκεια του συμβόλου T.

Άσκηση 4.
Θεωρήστε μια τυχαία διαδικασία $X(t)$ και μια άλλη, $Y(t)$, οι οποίες έχουν και οι δυο μέση τιμή μηδέν, και είναι στάσιμες. Θεωρήστε τώρα την τυχαία διαδικασία $Z(t)$ ως

$$Z(t) = X(t) + Y(t) \tag{19}$$

Βρείτε τη Φασματική Πυκνότητα Ισχύος της $Z(t)$.

<u>Λύση:</u>
Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της $Z(t)$ είναι

$$\begin{aligned} R_z(t_i,t_k) &= E[Z(t_i)Z(t_k)] && (20)\\ &= E[(X(t_i)+Y(t_i))(X(t_k)+Y(t_k))] && (21)\\ &= E[X(t_i)X(t_k)] + E[X(t_i)Y(t_k)] + E[Y(t_i)X(t_k)] + E[Y(t_i)Y(t_k)] && (22)\\ &= R_x(t_i,t_k) + R_{xy}(t_i,t_k) + R_{yx}(t_i,t_k) + R_y(t_i,t_k) && (23)\end{aligned}$$

Ορίζοντας $\tau = t_i - t_k$, έχουμε
$$R_z(\tau) = R_x(\tau) + R_{xy}(\tau) + R_{yx}(\tau) + R_y(\tau) \tag{24}$$
όταν οι τυχαίες διαδικασίες $X(t), Y(t)$ είναι επίσης από κοινού στάσιμες. Αν κάνουμε μετασχ. Fourier και στα δυο μέλη, έχουμε
$$\Phi_z(f) = \Phi_x(f) + \Phi_{xy}(f) + \Phi_{yx}(f) + \Phi_y(f) \tag{25}$$
Βλέπουμε ότι οι Διαφασματικές Πυκνότητες Ισχύος $\Phi_{xy}(f)$ και $\Phi_{yx}(f)$ αντιστοιχούν σε φασματικές συνιστώσες που προστίθενται στις Φασματικές Πυκνότητες Ισχύος των επιμέρους τυχαίων διαδικασιών $X(t)$ και $Y(t)$. Άρα, εν γένει, η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος ενός αθροίσματος στάσιμων τυχαίων διαδικασιών με μηδενική μέση τιμή δεν είναι απαραίτητα το άθροισμα των επιμέρους Φασματικών Πυκνοτήτων Ισχύος τους.

Αν όμως οι τυχαίες διαδικασίες είναι ασυσχέτιστες μεταξύ τους, οι Διαφασματικές Πυκνότητες Ισχύος $\Phi_{xy}(f), \Phi_{yx}(f)$ είναι μηδέν (δείξτε το!), και έτσι έχουμε
$$\Phi_Z(f) = \Phi_x(f) + \Phi_y(f) \tag{26}$$
όταν $X(t), Y(t)$ ασυσχέτιστες.

Άσκηση 5.

Στο μάθημα αναφέραμε συχνά μια τυχαία δυαδική ακολουθία συμβόλων 1 και 0, τα οποία αναπαρίστανται με παλμούς πλάτους 1 και 0, αντίστοιχα, και διαρκούν T_b δευτερόλεπτα το καθένα. Δείξαμε χωρίς απόδειξη ότι η αυτοσυσχέτιση μιας τέτοιας διαδικασίας είναι
$$R_x(t) = \sigma_x^2\Big(1 - \frac{|t|}{T_b}\Big) + \mu_x^2 \tag{27}$$
και άρα η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος είναι
$$\Phi_x(f) = \mu_x^2\delta(f) + \sigma_x^2 T_b \mathrm{sinc}^2(fT_b) \tag{28}$$
Ας δούμε αναλυτικά εδώ πως προκύπτουν οι παραπάνω σχέσεις.

Λύση:

Έστω ότι τα σύμβολα είναι ισοπίθανα και ότι η έναρξη της διαδικασίας t_d είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη τυχαία μεταβλητή T_d στο διάστημα $[0, T_b]$, όπως στις προηγούμενες ασκήσεις.

Έστω οι τυχαίες μεταβλητές $X(t)$ και $X(t+\tau)$, οι οποίες συμβαίνουν σε διαφορετικούς παλμούς αν $|\tau| > T_b$, οπότε και είναι ανεξάρτητες. Άρα
$$E[X(t)X(t+\tau)] = E[X(t)]E[X(t+\tau)], \ \ |\tau| > T_b \tag{29}$$
Τα σύμβολα, άρα και οι παλμοί, είναι ισοπίθανα γεγονότα. Άρα
$$E[X(t)] = E[X(t+\tau)] = \frac{1}{2} \tag{30}$$
δηλ.
$$R_x(\tau) = E[X(t)]E[X(t+\tau)] = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \tag{31}$$
Για $|\tau| \leq T_b$, οι τυχαίες μεταβλητές συμβαίνουν στον ίδιο παλμό, μόνο αν $t_d < T_b - |\tau|$. Τότε
$$E[X(t)X(t+\tau)] = \frac{1}{2} \times 1^2 + \frac{1}{2} \times 0^2 = \frac{1}{2} \tag{32}$$
Έτσι, έχουμε τη δεσμευμένη μέση τιμή
$$E[X(t)X(t+\tau)|t_d] = \begin{cases} \frac{1}{2}, & t_d < T_b - |\tau| \\ \frac{1}{4}, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{33}$$

Αθροίζοντας για κάθε πιθανή τιμή του t_d, έχουμε

$$R_x(\tau) = \int_0^{T_b-|\tau|} \frac{1}{2T_b} dt_d + \int_{T_b-|\tau|}^{T_b} \frac{1}{4T_b} dt_d = \frac{1}{4}\Big(1 - \frac{|\tau|}{T_b}\Big) + \frac{1}{4}, \;\; |\tau| < T_b \tag{34}$$

Εύκολα τώρα προκύπτει ότι η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος είναι

$$\Phi_x(f) = \frac{1}{4}\delta(f) + \frac{T_b}{4}\mathrm{sinc}^2(fT_b) \tag{35}$$

Παρατηρήστε ότι για ισοπίθανη εμφάνιση των συμβόλων 1 και 0, η τυχαία διαδικασία έχει μέση τιμή

$$\mu_x = E[X(t)] = \frac{1}{2} \tag{36}$$

και άρα

$$\mu_x^2 = \frac{1}{4} \tag{37}$$

ενώ η τυπική απόκλιση της διαδικασίας, σ_x^2, είναι

$$\sigma_x^2 = E[X^2(t)] - \mu_x^2 = R_x(0) - \mu_x^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \tag{38}$$

Άσκηση 6.
Αποδείξτε τις δύο ακόλουθες ιδιότητες της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης:

α') Αν $X(t)$ έχει σταθερή συνιστώσα ίση με A, τότε η $R_x(\tau)$ θα έχει μια σταθερή συνιστώσα ίση με A^2.

β') Αν $X(t)$ έχει μια ημιτονοειδή συνιστώσα, τότε η $R_x(t)$ θα έχει επίσης μια ημιτονοειδή συνιστώσα της ίδιας συχνότητας.

Λύση:

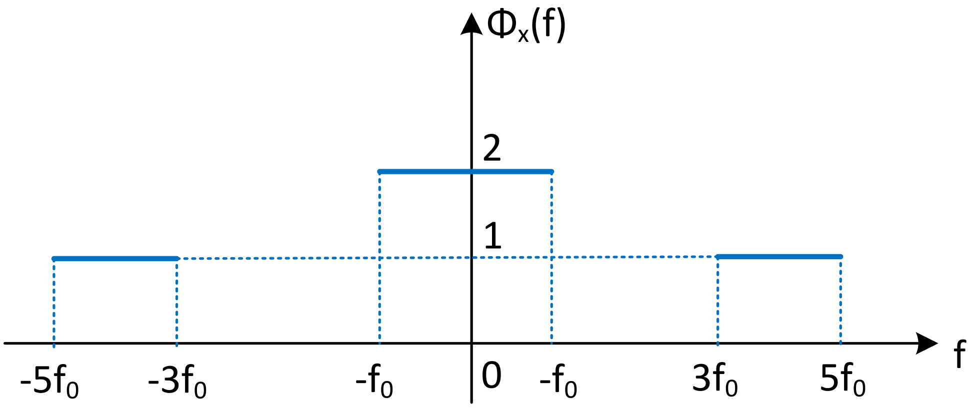
α') Έστω $X(t) = A + Y(t)$, όπου A σταθερά και $Y(t)$ μια τυχαία διαδικασία με μέση τιμή 0. Είναι:

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= E[X(t+\tau)X(t)] = E[(A+Y(t+\tau))(A+Y(t))] = \\ &= E[A^2 + AY(t) + AY(t+\tau) + Y(t+\tau)Y(t)] = \\ &= A^2 + AE[Y(t)] + AE[Y(t+\tau)] + E[Y(t+\tau)Y(t)] = \\ & A^2 + R_y(t) \end{aligned}$$

β') Έστω $X(t) = A\cos(2\pi ft+\theta) + Z(t)$, με $A\cos(2\pi ft+\theta)$ η ημιτονοειδής συνιστώσα της $X(t)$ και θ μια τυχαία φάση. Είναι:

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= E[X(t+\tau)X(t)] \\ &= E[A^2\cos(2\pi ft + 2\pi f\tau + \theta)\cos(2\pi ft+\theta)] \\ &+ E[Z(t+\tau)A\cos(2\pi ft+\theta)] + E[A\cos(2\pi ft + 2\pi f\tau + \theta)Z(t)] \\ &+ E[Z(t+\tau)Z(t)] = \\ &= \frac{A^2}{2}\cos 2\pi f\tau + R_2(\tau) + E[...] + E[...] \end{aligned}$$

Άσκηση 7.
Έστω μια στάσιμη με την ευρεία έννοια διαδικασία $X(t)$ με $\Phi_x(f)$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: Φασματική Πυκνότητα Ισχύς.

Να βρεθεί η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_x(\tau)$ της $X(t)$.

Λύση:
Είναι-

$$\Phi_x(f) = \mathrm{rect}\Big(\frac{f-4f_0}{2f_0}\Big) + \mathrm{rect}\Big(\frac{f+4f_0}{2f_0}\Big) + 2\mathrm{rect}\Big(\frac{f}{2f_0}\Big)$$
$$\xrightarrow{F_{-1}} R_x(\tau) = 2f_0\,\mathrm{sinc}(2f_0\tau)e^{-j2\pi 4f_0\tau} + 2f_0\,\mathrm{sinc}(2f_0\tau)e^{j2\pi 4f_0\tau} + 2\cdot 2f_0\,\mathrm{sinc}(2f_0\tau) =$$
$$= 2f_0\,\mathrm{sinc}(2f_0\tau)(e^{-j2\pi 4f_0\tau} + e^{j2\pi 4f_0\tau}) + 4f_0\,\mathrm{sinc}(2f_0\tau) =$$
$$= 2f_0\,\mathrm{sinc}(2f_0\tau)\cdot 2\cos(2\pi 4f_0\tau) + 4f_0\,\mathrm{sinc}(2f_0\tau) =$$
$$= 4f_0\,\mathrm{sinc}(2f_0\tau)\Big(\cos(2\pi 4f_0\tau) + 1\Big) =$$
$$= 4f_0\,\mathrm{sinc}(2f_0\tau)\cdot 2\cos^2(4\pi f_0\tau) =$$
$$= 8f_0\,\mathrm{sinc}(2f_0\tau)\cdot \cos^2(4\pi f_0\tau)$$

Αλλιώς:

$$\Phi_x(f) = \mathrm{rect}\Big(\frac{f}{10f_0}\Big) - \mathrm{rect}\Big(\frac{f}{6f_0}\Big) + 2\mathrm{rect}\Big(\frac{2}{2f_0}\Big) \xrightarrow{F^{-1}}$$
$$\xrightarrow{F^{-1}} R_x(\tau) = 10f_0\,\mathrm{sinc}(10f_0\tau) - 6f_0\,\mathrm{sinc}(6f_0\tau) + 2\cdot 2f_0\,\mathrm{sinc}(2f_0\tau) =$$
$$= 10f_0\,\mathrm{sinc}(10f_0\tau) - 6f_0\,\mathrm{sinc}(6f_0\tau) + 4f_0\,\mathrm{sinc}(2f_0\tau)$$

Άσκηση 8.
Έστω τυχαία διαδικασία $X(t)$ που δίνεται από την:

$$X(t) = A\cos(\omega t + \theta)$$

όπου ω και θ είσαι σταθερές και Α είναι τυχαία μεταβλητή. Να διερευνηθεί αν η $X(t)$ είναι στάσιμη με την ευρεία έννοια (WSS).

Λύση:
Είναι

$$E[X(t)] = E[A\cos(\omega t + \theta)] = \cos(\omega t + \theta)E[A]$$

Η παραπάνω σχέση δείχνει ότι η $E[X(t)]$ δεν είναι σταθερή εκτός αν $E[A] = 0$.

Επίσης,

$$R_x(t, t+\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] = E\Big[A^2\cos(\omega t+\theta)\cos\Big(\omega(t+\tau)+\theta\Big)\Big] = \frac{1}{2}[\cos\omega\tau + \cos(2\omega t + 2\theta + \omega\tau)]E[A^2]$$

Βλέπουμε ότι η αυτοσυσχέτιση της $X(t)$ δεν είναι συνάρτηση μόνο της χρονικής διαφοράς τ, άρα η διεργασία δεν είναι WSS.

Άσκηση 9.
Έστω η τυχαία διαδικασία $Y(t) = AX(t)\cos(\omega_c t + \theta)$, με $X(t)$ τυχαία διαδικασία, στάσιμη, με $E[X(t)] = 0$, αυτοσυσχέτιση $R_x(\tau)$ και φάσμα ισχύος $\Phi_x(f)$. Το πλάτος Α και η συχνότητα ω_c είναι σταθερές, και η φάση θ είναι τυχαία μεταβλητή με ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, 2\pi)$. Αν $X(t)$ και θ είναι ανεξάρτητες, να βρεθεί:

α΄) $E[Y(t)]$

β΄) $R_y(\tau)$

γ΄) $\Phi_y(f)$

Λύση:

α΄) $E[Y(t)] = E[AX(t)\cos(\omega_c t+\theta)] \overset{\text{ανεξ.}}{=} AE[X(t)] \cdot E[\cos(\omega_c t + \theta)] = 0$, επειδή $X(t)$, θ ανεξάρτητες.

β΄)

$$\begin{aligned} R_y(\tau) = E[Y(t)Y(t+\tau)] &= E\Big[A^2X(t)X(t+\tau)\cos(\omega_c t+\theta)\cos\Big(\omega_c(t+\tau)+\theta\Big)\Big] = \\ &= \frac{A^2}{2}E[X(t)X(t+\tau)]E[\cos(\omega_c\tau) + \cos(2\omega_c t + \omega_c\tau + 2\theta)] = \\ &= \frac{A^2}{2}R_x(\tau)\cos(\omega_c\tau) = R_y(\tau). \end{aligned}$$

Επειδή η μέση τιμή είναι σταθερή και η αυτοσυσχέτιση της $Y(t)$ εξαρτάται μόνο από τη χρονική διαφορά τ, η $Y(t)$ είναι στάσιμη με την ευρεία έννοια (WSS).

γ΄) Είναι

$$\begin{aligned} \Phi_y(f) = F\{R_y(\tau)\} &= \frac{A^2}{2}F\{R_x(\tau)\cos\omega_c\tau\} = \\ &= \frac{A^2}{2}F\{R_x(\tau)\}\cdot F\{\cos(\omega_c\tau)\} = \frac{A^2}{2}\Phi_x(f)\cdot\Big(\frac{1}{2}\delta(f-f_c) + \frac{1}{2}\delta(f+f_c)\Big) = \\ &= \frac{A^2}{4}\Phi_x(f-f_c) + \frac{A^2}{4}\Phi_x(f+f_c) \end{aligned}$$

Άσκηση 10.
Να δείξετε ότι αν η $X(t)$ είναι στάσιμη με την ευρεία έννοια (WSS), τότε:

$$E\Big[[X(t+\tau) - X(t)]^2\Big] = 2[R_{xx}(0) - R_{xx}(\tau)]$$

όπου $R_{xx}(\tau)$ είναι η αυτοσυσχέτιση της $X(t)$.

Λύση:
Είναι

$$E\Big[[X(t+\tau)-X(t)]^2\Big] = E[X^2(t+\tau) - 2X(t+\tau)X(t) + X^2(t)] = \\ = E[X^2(t+\tau)] - 2E[X(t+\tau)X(t)] + E[X^2(t)] \tag{39}$$

Γνωρίζουμε ότι $E[X(t+\tau)X(t)] = R_x(\tau)$. Για $\tau = 0$, έχουμε ότι

$$R_x(0) = E[X^2(t)] \tag{40}$$

Η (39) $\overset{(40)}{\Longrightarrow} E\Big[[X(t+\tau)-X(t)]^2\Big] = R_x(0) - 2R_x(\tau) + R_x(0) = 2R_x(0) - 2R_x(\tau) = 2\Big(R_x(0) - R_x(\tau)\Big)$

Άσκηση 11.
Δύο τυχαίες διαδικασίες $X(t)$, $Y(t)$ δίνονται από τις σχέσεις:

$$X(t) = A\cos(\omega t + \theta)$$
$$Y(t) = A\sin(\omega t + \theta)$$

όπου Α και ω είναι σταθερές και θ είναι τυχαία μεταβλητή, ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[0, 2\pi)$. Να βρεθεί η στατιστική ετεροσυσχέτιση των $X(t)$, $Y(t)$, και να δειχθεί ότι:

$$R_{xy}(-\tau) = R_{yx}(\tau)$$

Λύση:
Είναι

$$\begin{aligned} R_{xy}(t, t+\tau) &= E[X(t)Y(t+\tau)] = \\ &= E\Big[A^2\cos(\omega t + \theta)\sin\Big(\omega(t+\tau) + \theta\Big)\Big] = \\ &= \frac{A^2}{2}E[\sin(2\omega t + \omega\tau + 2\theta) - \sin(-\omega\tau)] = \\ &= \frac{A^2}{2}\sin\omega\tau = R_{xy}(\tau) \end{aligned} \tag{41}$$

Επίσης

$$\begin{aligned} R_{yx}(t, t+\tau) &= E[Y(t)X(t+\tau)] = \\ &= E\Big[A^2\sin(\omega t + \theta)\cos\Big(\omega(t+\tau) + \theta\Big)\Big] = \\ &= \frac{A^2}{2}E[\sin(2\omega t + \omega\tau + 2\theta) + \sin(-\omega\tau)] = \\ &= -\frac{A^2}{2}\sin\omega\tau = R_{yx}(\tau) \end{aligned} \tag{42}$$

Από 41, 42 βλέπουμε ότι ισχύει $R_{xy}(-\tau) = R_{yx}(\tau)$.

Άσκηση 12.
Έστω η τυχαία διαδικασία

$$x(t) = \sum_k A_k\cos(\omega_k t + \phi_k),$$

με ϕ_k τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[-\pi, pi)$. Τα A_k, ω_k θεωρούνται δεδομένα (σταθερά).

α') Ν.δ.ο. η $x(t)$ είναι στάσιμη $2^{\text{ης}}$ τάξης.

β') Ν.δ.ο. η $x(t)$ είναι εργοδική.

γ΄) Ποια είναι η φασματική πυκνότητα ισχύος της διαδικασίας;

Λύση:

α΄) Για να είναι στάσιμη $2^{\text{ης}}$ τάξης, πρέπει να ισχύουν:

$$E[x(t)] = c \in \Re \text{ και } R_x(t_1, t_2) = R_x(|t_1 - t_2|) = R_x(\tau)$$

Είναι

$$\begin{aligned} E[x(t)] &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_k A_k \cos(\omega_k t + \phi_k) \frac{1}{2\pi} d\phi_k = \sum_k A_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega_k t + \phi_k) d\phi_k = \\ &= \sum_k A_k \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

γιατί

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\alpha + x) dx = 2 \cos \alpha \cdot \sin \pi = 0$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} R(t_1, t_2) = E[x(t_1)x(t_2)] &= E\Big[\sum_k A_k \cos(\omega_k t_1 + \phi_k) \sum_k A_k \cos(\omega_k t_2 + \phi_k)\Big] = \\ &= \sum_k A_k^2 E[\cos(\omega_k t_1 + \phi_k) \cos(\omega_k t_2 + \phi_k)] = \\ &= \sum_k \frac{A_k^2}{2} \bigg(E\Big[\cos\Big(\omega_k(t_1 - t_2)\Big)\Big] + E\Big[\cos\Big(\omega_k(t_1 + t_2) + 2\phi_k\Big)\Big] \bigg) = (t_1 - t_2 = \tau) \\ &= \sum_k \frac{A_k^2}{2} \cos(\omega_k \tau) = R_x(\tau) \end{aligned}$$

Άρα η διαδικασία είναι στάσιμη $2^{\text{ης}}$ τάξης.

β΄) Για να είναι εργοδική, πρέπει

$$\bar{x} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = E[x(t)] = 0 \text{ και } \phi_k(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x(t + \tau) dt = R_x(\tau) = \sum_k \frac{A_k^2}{2} \cos(\omega_k \tau)$$

Είναι

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_k A_k \frac{1}{\omega_k} \sin(\omega_k t + \phi_k) \Big]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_k \frac{A_k}{\omega_k} 2 \cos \phi_k \sin\left(\omega_k \frac{T}{2}\right) = \sum_k A_k \cdot 2 \cos \phi_k \cdot \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \frac{\sin\left(\frac{\omega_k T}{2}\right)}{\omega_k} = \\ &= \sum_k A_k \cos \phi_k \cdot \lim_{T\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{\omega_k T}{2}\right)}{\frac{\omega_k T}{2}} = \sum_k A_k \cos \phi_k \lim_{T\to\infty} \operatorname{sinc}(f_k T) = 0 \end{aligned}$$

Εντελώς ανάλογα, και με χρήση της

$$\sin \theta - \sin \phi = 2 \cos\left(\frac{\theta + \phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta - \phi}{2}\right)$$

αποδεικνύεται ότι:

$$\phi_x(\tau) = \sum_k \frac{A_k^2}{2} \cos(\omega_k \tau)$$

γ΄) Η φασματική πυκνότητα ισχύος είναι

$$
\begin{aligned}
\Phi_x(f) &= F\{\phi_k(\tau)\} = F\{R_x(\tau)\} = \\
&= F\Big\{\sum_k \frac{A_k^2}{2}\cos(\omega_k\tau)\Big\} = \sum_k \frac{A_k^2}{2} F\{\cos(\omega_k\tau)\} = \\
&= \sum_k \frac{A_k^2}{2}\Big(\frac{1}{2}\delta(f-f_k) + \frac{1}{2}\delta(f+f_k)\Big) = \\
&= \sum_k \frac{A_k^2}{4}\Big(\delta(f-f_k) + \delta(f+f_k)\Big)
\end{aligned}
$$